ISSN (p) 2303-4890, **ISSN (o) 1986–518X**

ISTRAŽIVANJE MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA
http://www.imvibl.org/dmbl/meso/imo/imo2.htm
Vol. VIII (2016), Broj 15, 1–8
Stručni rad

METODIČKE TRANSFORMACIJE SADRŽAJA U UNIVERZITETSKOJ NASTAVI MATEMATIKE

Miomir Anđić

Fakultet za informacione tehnologije, Univerzitet Mediteran
Bulevar Josipa Broza Tita bb, Stari aerodrom, 81000 Podgorica, Crna Gora
E-mail: andjicm@t-com.me

Aleksandar M Anđić

Studije sajber bezbjednosti, Univerzitet Donja Gorica
Donja Gorica bb, 81000 Podgorica, Crna Gora
E-mail: aleksandar@andjic.me

Sažetak: Neuspjesi studenata u matematici i nedovoljno znanje koje pokazuju nakon završenog školovanja dobrim su dijelom posljedice činjenice da se nastava većinom izvodi na nižem nivou, gdje se suviše insistira samo na usvajanju gradiva, a zapostavlja se viši nivo nastave. Razlog zapostavljanja leži u činjenici da su za viši nivo nastave matematike potrebne zahtjevnije nastavne metode zasnovane na heurističkoj i problemskoj nastavi.

U univerzitetskoj nastavi se nedovoljno koristi savremena metodika nastave matematike, koja pruža razne mogućnosti za rješavanje problema uvođenjem studenata u samostalan i istraživački rad, razvijanje njihovih sposobnosti za rješavanje problema kao i razvoja njihovog stvaralačkog mišljenja i sposobnosti.

Rad koji slijedi na prvi pogled izgleda jednostavno, međutim, njegov cilj je da ukaže kako se u univerzitetskoj nastavi matematike mogu vršiti metodičke transformacije konkretnih sadržaja, npr. analitičke geometrije, geometrije i matematičke analize i uspješno primjenjivati principi postupnosti i očiglednosti, misaone operacije analize i sinteze i analogija kao oblik zaključivanja.

Ključne riječi i fraze: *mimoilazne prave, hiperboloidna površ, rotacija kocke, Kavalijerijev princip, zapremina rotacionog tijela*

Abstract: Failures of students in mathematics and a lack of knowledge that they express after graduation are largely due to the fact that teaching is mostly performed at a lower level, where the focus is only on the acquisition of content, and the higher level of education is neglected. The reason for neglecting lies in the fact that demanding teaching methods based on heuristic and problem teaching are necessary for a higher level of mathematics.

The university teaching insufficiently uses contemporary methods of teaching mathematics which provide a variety of options for solving problems by introducing students to independent and research work, developing their abilities to solve problems, and developing their creative thinking and competences.

This paper may seem very simple at first glance, but its aim is to show how methodical transformation of specific content can be made in university teaching of mathematics, such as analytic geometry and geometry and mathematical analysis, and how the principles of gradualism and obviousness, thoughtful operations of analysis and synthesis, and analogy as a form of reasoning can be successfully applied.

Keywords and phrases: *skew lines, hyperboloid surface, cube rotation, Cavalieri's principle, rotation-body volume*

„Nije dovoljno samo znati; treba i primijeniti. Nije dovoljno htjeti; treba i učiniti“

Johann Wolfgang von Goethe

Na dvočasu vježbi iz Matematike 2 na Fakultetu za informacione tehnologije Univerziteta „Mediteran“ u Podgorici, na kraju semestra, da bih angažovao kompletnu grupu studenata, predložio sam sljedeću „igru sa matematičkim asocijacijama“.

Igra počinje tako što pišem na tabli kratku rečenicu sa nekom matematičkom sadržinom. Igrači – studenti treba da smisle sljedeću „matematičku rečenicu“, čija se sadržina nadovezuje na sadržinu prethodne rečenice. Rečenicu najhitrijeg igrača napisaćemo na tabli, ispod prve rečenice. Poslije toga će studenti formulisati treću rečenicu, vezanu za sadžinu prethodne rečenice, pa četvrtu rečenicu sa asocijacijama sa trećom rečenicom i tako dalje. Cilj igre je da se na ovaj način obuhvati što više gradiva.

Za početak odabrao sam matematičku rečenicu:

U pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu u prostoru date su prave $l_1\left[A(a,0,0),\ C_1(0,a,a)\right]$ *i* $l_2\left[A_1(a,0,a),\ D_1(0,0,a)\right]$*, pri čemu je* $a>0$.

Prve rečenice studenata, podstaknute prethodnom izjavom, bile su:

Vektor prave l_1 *je* $\overrightarrow{s_1}=(0-a,\ a-0,\ a-0)=(-a,a,a)$*, a njena jednačina*

$$l:\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{a-0}=\frac{z-0}{a-0},\ tj.\ -x+a=y=z\,.$$

Vektor prave l_2 *je* $\overrightarrow{s_2}=(-a,\ 0,\ 0)$*, a njena jednačina* $l_2:\dfrac{x-a}{-a}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{0}$.

Treća rečenica je bila:

Prave l_1 *i* l_2 *su mimoilazne, jer je*

$$\overrightarrow{AA_1}\cdot(\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2})=\begin{vmatrix}0&0&a\\-a&a&a\\-a&0&0\end{vmatrix}=a^3\neq 0\,.$$

Uslijedila je i četvrta rečenica:

Najkraće rastojanje između mimoilaznih pravih l_1 *i* l_2 *iznosi*

$$d=\frac{a\sqrt{2}}{2}\,. \qquad (1)$$

Zaista,

$$d=\frac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot(\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2})|}{|\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}|}=\frac{|a^3|}{\begin{Vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-a&a&a\\-a&0&0\end{Vmatrix}}=\frac{a^3}{\sqrt{0^2+(-a^2)^2+(a^2)^2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Zatim je usijedila i peta rečenica:

Ugao između pravih l_1 *i* l_2 *je* $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. *To je ugao između njihovih vekora* $\vec{s_1}$ *i* $\vec{s_2}$ *i računa se po formuli*

$$\cos\alpha = \frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|} = \frac{(-a,a,a)\cdot(-a,0,0)}{\sqrt{(-a)^2+a^2+a^2}\cdot\sqrt{(-a)^2+0^2+0^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2}\cdot\sqrt{a^2}},$$ *odakle je*

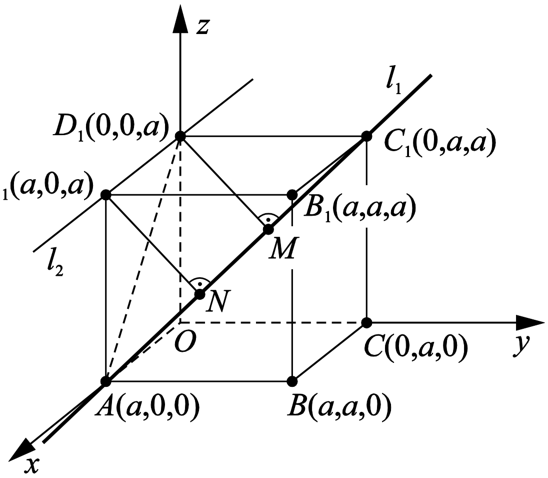
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{2}$$

Poslije toga jedan od studenata je uočio:

Date tačke A, C_1, A_1, D_1 *su tjemena kocke*

$$ABCOA_1B_1C_1D_1\left[O(0,0,0), B(a,a,0), C(0,a,0), B_1(a,a,a)\right].$$

Nacrtali smo na tabli koordinatni sistem u prostoru sa tačkama $A, B, C, O, A_1, B_1, C_1, D_1$ (slika 1).



Slika 1

Stizale su i konstatacije:

Rastojanje tačke D_1 *od dijagonale* AC_1 *iznosi*

$$D_1M = a\sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{3}$$

Zaista, iz pravouglog trougla AD_1C_1 je

$$P = \frac{AD_1\cdot D_1C_1}{2} = \frac{AC_1\cdot D_1M}{2} \Rightarrow a\sqrt{2}\cdot a = a\sqrt{3}\cdot D_1M \Rightarrow D_1M = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Rastojanje tačke A_1 *od dijagonale* AC_1 *kocke je takođe* $a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

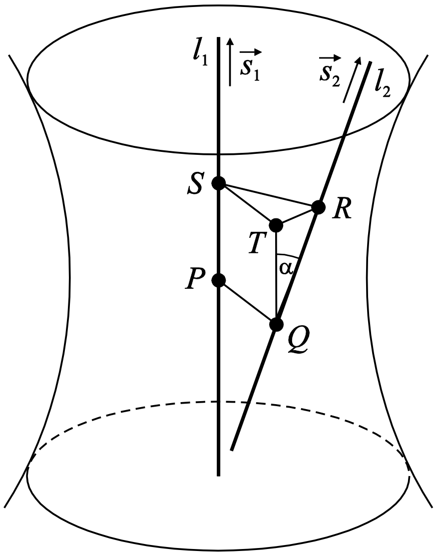
Rotacijom prave l_2 *oko mimoilazne prave* l_1 *nastaje površ – hiperboloid.*

Time se ukazala zgodna prilika da se studentima istakne potreba za dokazom nekih matematičkih istina.

Neko vrijeme smo ćutali i razmišljali, a onda su Filipu oči zablistale i uzviknuo je: „*Ja sam uvjeren da iskaz važi, jer ja to vidim!“*. Na moj začuđen pogled Filip mi je pokazao ovaj crtež (slika 2).

Na slici su predstavljene date mimoilazne prave l_1 i l_2. Filip je uočio njihovu zajedničku normalu PQ, pri čemu je već izračunato da je $PQ = d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Pri rotaciji tačaka prave l_2 oko prave – ose l_1 kružnica najmanjeg poluprečnika dobija se pri rotaciji tačke Q. Filip je dalje na pravoj l_2 uočio tačku R, različitu od tačke Q i normalu RS iz tačke R na pravu l_1. Uočio je pravu koja sadrži tačku Q paralelnu pravoj l_1 i pravu koja sadrži tačku S i paralelna je pravoj PQ. Označio je sa T presječnu tačku tih pravih. Sa y je označio rastojanje RS, sa z rastojanje PS i $\angle RQT$ sa α. Trougao RST je pravougli sa katetama $ST = d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ i $RT = z\,\mathrm{tg}\alpha$.



Slika 2

Kako je već izračunao da je $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, to je $tg\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \sqrt{2}$, pa je $RT = \sqrt{2}\,z$.

Dalje je $RS^2 = ST^2 + RT^2$, tj.

$$y^2 = d^2 + (\sqrt{2}\,z)^2 \Rightarrow y^2 - 2z^2 = d^2$$

$$\Rightarrow y^2 - 2z^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

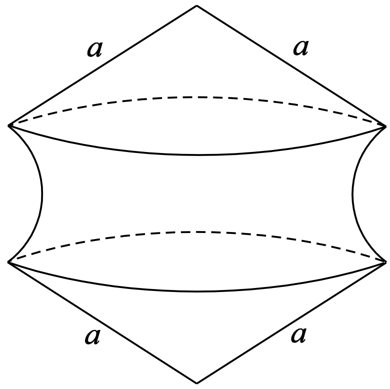
$$\Rightarrow \frac{y^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 1.$$

Na ovaj način je dobio jednačinu hiperbole, pri čijoj rotaciji se dobija ista površ, kao pri rotaciji prave l_2 oko prave l_1 - ose rotacije. Zaključio je da se rotacijom prave l_2 oko mimoilazne prave l_1 dobija površ koja se zove hiperboloid. Kako su njegovi presjeci sa ravnima paralelnim ravni Oxy kružnice, to je njegova jednačina

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 1. \tag{4}$$

Ovaj Filipov rezultat je podstakao nekoliko studenata na razmišljanje kako da riješe problem koji je, prema izjavi, zaokupljao njihovu pažnju već duži niz godina. Riječ je o nalaženju zapremine tijela nastalog rotacijom kocke ivice dužine a oko svoje dijagonale. Bez Filipovog rezultata određivanje zapremine tog tijela nije trivijalan zadatak.

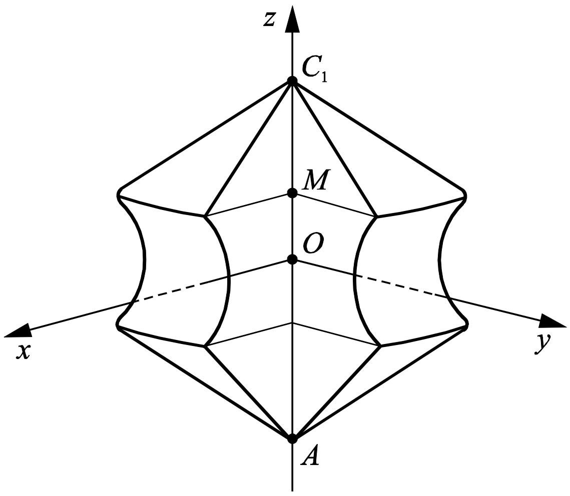
Matilda je radosno uzviknula: „*Ja znam kako izgleda to tijelo*“ i prikazala ga crtežom (slika 3).



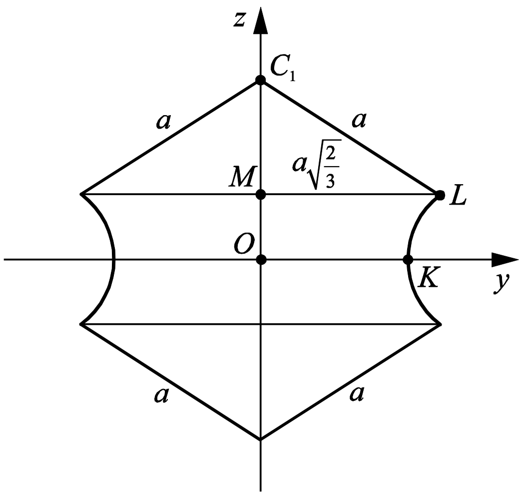
Slika 3

Čuje se nekoliko uzvika: „*Sada ovo tijelo treba smjestiti pogodno u pravougli koordinatni sistem u prostoru i onda nije teško izračunati njegovu zapreminu, koristeći integralni račun.*“

Matilda kaže: „*Neka dijagonala kocke* AC_1 *bude na* z *- osi, a njeno središte u koordinatnom početku*“, kao na slici 4.



Slika 4



Slika 5
(Presjek tijela sa ravni $x = 0$)

Ovdje je z osa usmjerena duž ose rotacije (glavna dijagonala kocke).

Tijelo se sastoji od gornjeg i donjeg konusa i srednjeg dijela ograničenog pomenutom hiperboloidnom površi.

Lako je sada naći koordinate tačaka K i L hiperbole $\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}-\dfrac{z^2}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=1$, kao i koordinate tačke M . Tražene koordinate su $K\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},0\right)$, $L\left(a\sqrt{\dfrac{2}{3}},\dfrac{a}{2\sqrt{3}}\right)$ i $M\left(0,\dfrac{a}{2\sqrt{3}}\right)$.

Zapremina konusa je $V_K=\dfrac{1}{3}(ML)^2\pi\cdot MC_1=\dfrac{1}{3}\left(a\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2\pi\cdot\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, tj.

$$V_K=\frac{2a^3\pi}{9\sqrt{3}} \tag{5}$$

Zapremina tijela ograničenog hiperboloidom je

$$V_H=2\pi\int_0^{\frac{a}{2\sqrt{3}}}y^2(z)dz=2\pi\int_0^{\frac{a}{2\sqrt{3}}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\left(1+\frac{z^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)dz\text{, odnosno}$$

$$V_H=\frac{5\pi a^3}{9\sqrt{3}} \tag{6}$$

Ukupna zapremina tijela nastalog rotacijom kocke oko njene glavne dijagonale je

$$V=2V_K+V_H=\frac{4}{9\sqrt{3}}a^3\pi+\frac{5}{9\sqrt{3}}a^3\pi\text{, tj.}$$

$$V=\frac{a^3\pi}{\sqrt{3}} \tag{7}$$

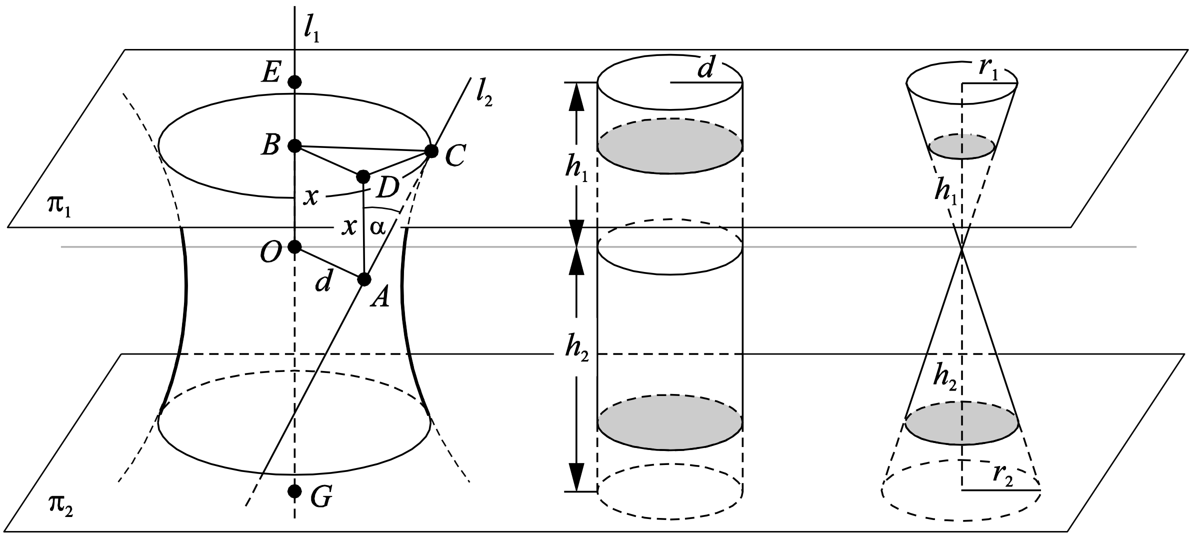
Studentima sam postavio pitanje:

„*Da li se zapremina središnjg dijela ograničenog hiperboloidom može izračunati na elementaran način, bez primjene integralnog računa?*“

Kako su studenti bezuspješno pokušavali da nađu postupak, uputio sam ih na Kavalijerijev princip i sliku 2. Međutim, i pored datih inputa nijesu se snašli, pa sam im pomogao u određivanju zapremine.

Iskoristili smo sliku 2 sa drugačijom numeracijom.

Pri rotaciji prave l_2 oko mimoilazne prave l_1 (ose rotacije), kao što smo vidjeli, nastaje hiperboloidna površ. Neka je OA zajednička normala mimoilaznih pravih l_1 i l_2 i neka je $OA=d$ (slika 6).



Slika 6

Neka su π_1 i π_2 dvije ravni normalne na osu rotacije l_1 i nalaze se sa raznih strana tačke O na rastojanju, redom h_1 i h_2. Označimo sa B i E tačke na pravoj l_1, takve da je B (O,B,E), pri čemu je $OB = x$ i $OE = h_1$ i sa α ugao između pravih l_1 i l_2.

Uočimo pravu koja sadrži tačku A i paralelna je pravoj l_1 i pravu koja sadrži tačku B i paralelna je pravoj OA. Neka je presjek ove dvije prave tačka D. Postavimo ravan, normalnu na l_1 , na rastojanju x od tačke O. Poluprečnik BC tog kruga je $\sqrt{d^2 + x^2\mathrm{tg}^2\alpha}$, a njegova površina inosi $\pi(d^2 + x^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha)$.

Zapremina V_1 tijela ograničenog hiperboloidnom površi i ravnima koje su u tačkama O i E normalne na osu rotacije l_1, prema Kavalijerijevom principu jednak je zbiru zapremina cilindra visine h_1 i poluprečnika osnove d i konusa visine h_1 i poluprečnika osnove $h_1\mathrm{tg}\alpha$.

To slijedi iz $\pi(d^2 + x^2\mathrm{tg}^2\alpha) = \pi d^2 + \pi x^2 tg^2\alpha,\ 0 \le x \le h_1$ pa je

$$V_1 = d^2\pi h_1 + \frac{1}{3}(h_1\mathrm{tg}\alpha)^2\pi h_1. \tag{8}$$

Slično se nalazi da je zapremina V_2 tijela ograničenog hiperboloidnom površi i ravnima koje su u tačkama O i G (B (G,O,E)) normalne na osu rotacije l_1, jednaka zbiru zapremine cilindra visine h_2 i poluprečnika osnove d i konusa visine h_2 i poluprečnika osnove $h_2\mathrm{tg}\alpha$, tj. da iznosi

$$V_2 = d^2\pi h_2 + \frac{1}{3}(h_2\mathrm{tg}\alpha)^2\pi h_2. \tag{9}$$

Konačno, zapremina tijela ograničenog hiperboloidnom površi i ravnima π_1 i π_2 je

$$V_H = V_1 + V_2 = \pi d^2(h_1 + h_2) + \frac{1}{3}\pi h_1^3\mathrm{tg}^2\alpha + \frac{1}{3}\pi h_2^3\mathrm{tg}^2\alpha \tag{10}$$

Sa slike 5 zaključujemo da je $h_1 = h_2 = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$, tj. da je $h_1 + h_2 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, a već smo izračunali da je $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ i $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, što zamjenom u (10) dobijamo da je

$$V_H = \frac{5\pi a^3}{9\sqrt{3}} .$$

Filipove i Matildine slike su nas oduševile očiglednošću i motivisale da i na elementaran način nađemo traženu zapreminu. U to se dvočas završio.

Imao sam utisak da smo od ove matematičke igre svi imali koristi, kako studenti, tako i ja. Ponovili smo niz detalja iz prethodnog gradiva, utvrdili smo veze između raznih oblasti. Iznenada smo se sukobili sa nalaženjem jednačine hiperboličke površi i na kraju našli smo tri izvanredno lijepa dokaza.

S obzirom na činjenicu da se radi o studentima informacionih tehnologija, ovaj dvočas ih je motivisao da o ovom problemu razmišljaju i u slobodno vrijeme, pa su pretraživanjem internet sadržaja došli do adekvatne simulacije rotacije kocke oko svoje dijagonale. Pomenuta animacija se može pogledati na adresi: http://i.stack.imgur.com/jQN3Y.gif

Literatura

[1] G. Polya, *Kako ću riješiti matematički zadatak* (*prevod USA*), Školska knjiga, Zagreb, 1966.

[2] Б. С. Каплан, Н. М. Рогановский, Н. К. Рузин, А. А. Столяр, *Практикум по педагогике математики*, Вишэйшая школа, Минск, 1978.

[3] M. Anđić, *Matematika 1(teoreme, definicije, primjeri,zadaci)*, Fakultet za informacione tehnologije, Univerzitet „Mediteran“, Podgorica, 2009. ISBN 9789940514105

[4] M. Anđić, *Matematika 2(teoreme, definicije, primjeri,zadaci)*, Fakultet za informacione tehnologije, Univerzitet „Mediteran“, Podgorica, 2009. ISBN 9789940514099

[5] Simulacija rotacije kocke – dostupno na: http://i.stack.imgur.com/jQN3Y.gif

Primljeno u redakciju 13.07.2016. Dostupno online 29.08.2016.