ISSN (p) 2303-4890, ISSN (o) 1986–518X

ISTRAŽIVANJE MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA
http://www.imvibl.org/dmbl/meso/imo/imo2.htm
Vol. VIII (2016), Broj 15, 9–15
Оригинални истраживачки рад

Процјена успјешности на пријемном испиту

Даниел А. Романо

Универзитет у Бања Луци, Машински факултет, 78000 Бања Лука
Босна и Херцеговина
e-mail: bato49@hotmail.com

Сажетак. Анализитане су типичне математичке и дидактичке грешке које тестирани кандидати праве при рјешавању задатака улазног теста из Математике при упису на факултет. Посебна пажња поклоњена је концептним и процесним уоченим математичким грешкама.

Кључне ријечи и фразе: математичке и дидактичке грешке, концептне, процесне и процедуралне математичке грешке

Abstract. Typical mathematical and didactic mistakes that the tested candidates in real problem solving in mathematics entrance test for admission to the Faculty are analyzed. Special attention was given to the identified conceptual and processul mathematical mistakes.

Key words and phrases: mathematical and didactic mistakes, concept's, process' and procedural mathematical mistakes

1. УВОД

Анализиране су повратне информације тестирања пријављених кандидата за упис на машински факултет Универзитета у Бањој Луци реализованог 27.06.2016. Популација од 125 кандидата је тестирано моделом од 10 математичких задатака дизајнираних тако да омогућавају установљавање нивоа опште математичке писмености. Сем тога, модел омогућава установљавање нивоа матерматичких умјећа тестираних кандидата. У овом тексту, понуђена су промишљања о врстама грешака које су кандидати направили током тестирања.

Питања које се поставља су:

Како ефикасна, успјешна и сврсисходна настава математике може бити ако се кандидатима не укаже на начине отклањања грешка које су учинити при улазном тестирању?

Како се претходна активност може ефективно реализовати ако није установљена нека дијагностика учињених грешака?

Опште је прихваћено да на продукцију грешака утиче значајан број параметара као што су: кандидат, његов наставник, наставни програм унутар којег се кандидат образовао, дидактички приступи реализацији средњошколске наставе математике унутар које је кандидат математички сазријевао, опредјељења друштвене и академске заједнице о социо-математичким нормама којих се наставник придржавао при реализацији наставе математике, и томе слично. Наравно, не треба занемаривати ни ниво кандидатове мотивације као ни његово фокусирање за успјешно аплицирање на студиј машинства.

Schwab ([8]) гледа на математику као на когнитивно високо захтјевну дисциплину о структурама. Он идентификује двије врсте стурктура: концептуалне и синтактичке. Домен концепруалних структура можемо схватати као домен математичких објеката као што су математички концепти (детерминације математичких објеката) и њихови међусобни односи (искази о математичким објектима и математичким процесима). Домен синстактичких структура састоји се од процеса који се користе у рјешавању проблема. Свако рјешавање задатака / проблема подразумијева адекватно разумијевање поменуте двије структуре.

2. ВРСТЕ ГРЕШАКА У МАТЕМАТИЧКОМ ОБРАЗОВАЊУ

Грешке су неизбјежне у учењу математике, јер је људски мозак није генетски програмиран да запамти мноштво концепата (тзв. Концептуална математичка знања) и процеса са њима (тзв. Процесна математичка знања) и процедура за спровођење математичких алгоритама (тзв. Процедурална математичка знања). Историја анализе грешака (такође назван 'Анализа шаблона грешака') у математичком образовању почиње радом Radatz ([6]). Од тада, много радова је фокусирано на двије кључне области анализе грешака у математици:

(а) идентификација и интерпретација типова ученичких грешака, и

(б) најбоље праксе за промјену ученичких увјерења у вези са уоченим грешкама.

Прва компонента анализе грешке, способност да се идентификују и тумаче ученичке уобичајене грешке, подразумијева да реализатор наставе математике не само да мора да посједује довољно велика математика знања и значајна методичка у складу са парадигмом 'школска математичка знања' већ и значајне способности разумијевања процеса подучавања и ученичког учења.

Оливиер ([5]) разликује *грешке*, *омашке* и *неразумијевања*. Легутко ([4]) их класификује као математичке и дидактичке грешке: Математичку грешку прави особа (ученик, наставник) који у датом тренутку сматра да је неки исказ ваљан иако је математички некоректан. Дидактичке грешке се односи на ситуацију када су увјерења реализатора наставе математике којих се придржава у супротности са дидактичким, методолошки и здравог разумом.

Подсјетимо се како су Џереми Килпатрик, Џејн Сваффорд и Брадфорд Финдел у својој чувеној књизи Kilpatrick, Swafford and Findell: "*Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*" ([2]) описали математичка умјећа.

Прихватајући да не постоји општеприхваћени термин који би у потпуности покривао све аспекте стручности, способности, знања и вјештина у настави математике, одабрали су да термином 'математичка умјећа' покрију све оно што академска заједница математичког образовања вјерује да је потребно свакоме да успјешно научи математику. Према тој књизи, састоје се од слиједећих пет испреплетених струна:

Концептуално разумијевање – Разумијевање математичких појмова (објеката и процеса), операција са њима и њихових међусобних односа;

Процедуралне вјештине – Вјештост у обављању поступака флуентно, тачно, учинковито и на одговарајући начин;

Стратешка надлежност – Могућност формулчисања, представљања и рјешавања математичких проблема;

Прилагодљиво расуђивање – Капацитет за логичко мишљење, промишљање, објашњавање и оправдавање;

Продуктивна диспозиција / Оперативна склоност – стална склоност да се на математику гледа као на рационалну, корисну и апликативну људску дјелатност уз властиту увјереносту и сопствену ефикасност.

3. ИСТРАЖИВАЊЕ

Тестирана су 125 кандидата. Тестирани су кандидатска математичка умјећа посредством десет задатака из средљошколске математике. Модел посредством којег су тестирани кандидати дизајниран је тако да аритметичко-раноалгебарски задаци чине 30%, алгебарски задаци такође 30%, геометријски задаци 20% док задаци за установљавање нивоа развоја логичког и скуповно-релацијског мишљења су износили по 10%.

Математички грешке могу бити концептне, процесне или процедуралне. Процедуралне грешке су повезане са процедуралним знањем, а концептне грешке су повезане са знањем и разумијевањем математичких објеката и концепата. Процесне грешке су повезане са познавањем и разумијевањем међусобних односа математичких концепата.

Код '∅' значи да кандидат није уопште покушао да понуди било какво промишљање као рјешење постављеног задатка. Код '0' значи да су ионформације које је кандидат понудио као рјешење задатка потпуно неприхватљиве. Сваки задатак вреднован је са 5 индексних поена. При вредновању успјешности примјењиван је поступак 'корак по корак' аналирања понуђеног рјешења.

3.1. Рано-алгебарски задаци: Процјена атирметичких и рано-алгебарских умјећа

Овим задацима су тестирана аритметичко-раноалгебарска умјећа кандидата ([1], [7]). У процесу конструисању прихватљивих рјешења за ове задатке долази до изражаја како ниво аритметичког и раноалгебарског мишљења тако и процедурална умјећа унутар тих домена.

Задатак 1. Скратити разломак $\frac{a^2-8a+16}{b(a^2-4a)}$ ($a,b \in \boldsymbol{R}$) и записати услове под којима добијене једнакости важе.

Задатак / Успјешност	∅	0	1	2	3	4	5	**Σ**
Успјешност	14	35	3	0	3	52	18	**125**
Проценат (%)	11.2	28.0	2.4	.0	2.4	41.6	14.4	**100**

Табела 1: Процјена успјешности у рјешавању задатка 1 (N = 125)

Према подацима датим у табели 1, 35 (или 28.0%) кандидата понудило је неприхватљиве информације као рјешење задатка што са 12.2% кандидата који нису понудили никакво рјешење износи скоро 40% кандидата чијасу процедурална аритметичка и рано-алгебарска умјећа екстремно ниска. 52 кандидата (или 41.6%) није се освртало на захтијев да треба описати окружење $b \neq 0$ и $a \neq 0$ и $a \neq 4$ ($a,b \in \boldsymbol{R}$) у којем су добијене једнакости $\frac{a^2-8a+16}{b(a^2-4a)} = \frac{(a-4)^2}{ba(a-4)} = \frac{a-4}{ba}$ валидне. Дакле, само 14.4 % тестиране популације понудило је потпуно прихватљива рјешења постављеног задатка којем се манифестује рано-алгебарско мишљење и процедурална умијећа на нивоу старијих разреда основне школе и првог разреда средње школе.

Задатак 2. Изврши назначене математичке операције / радње

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)+\frac{2}{ab}:\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2.$$

Задатак / Успјешност	∅	0	1	2	3	4	5	**Σ**
Успјешност	9	61	10	1	6	25	13	**125**
Проценат (%)	7.2	48.8	8.0	.8	4.8	20.0	10.4	**100**

Табела 2: Процјена успјешности у рјешавању задатка 2 (N = 125)

Услови под којима задатак постоји су:

$$b \neq 0,\ a \neq 0,\ \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right) \neq 0,\ \ \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 \neq 0\ \ (a,b \in \boldsymbol{R}).$$

Према ресултатима тестирања (Табела 2), 70 кандидата (или, 56.0%) или није понудило никаква или је понудило неприхватљива промишљања као рјешење овог задатка. Скоро 90% кандидата погријешило је у детерминацији подскупа $b \neq 0$, $a \neq 0$ и $a \neq -b$. скупа $\boldsymbol{R}$ реалних бројева за које вриједи $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)+\frac{2}{ab}:\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 = 1$. 30.4% (или 38) кандидата експонирало је знање алгоритма којим се омогућава конструисање прихватљивог рјешења. Уочене најчешће грешке у тој процедури су:

- проблеми сабирање општих разломака са различитим називницима;
- проблеми проширивања општих разломака до заједничког називника;
- проблеми скраћивања општих разломака; и
- препознавање потпуног квадрата $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$.

Задатак 3. Ријеши неједначину $(x + 1)(x + 2) + 3(1 - x) < (x - 1)^2$ у уређеном пољу $\boldsymbol{R}$ реалних бројева.

Задатак / Успјешност	∅	0	1	2	3	4	5	**Σ**
Успјешност	5	39	2	0	4	7	68	**125**
Проценат (%)	4.0	31.2	1.6	.0	3.2	5.6	54.4	**100**

Табела 3: Процјена успјешности у рјешавању задатка 3 (N = 125)

Задатак је когнитивно ниско захтијеван на нивоу линеарних једначина и неједначина. 44 кандидата (или 34.2%) није понудило ваљане информације као рјешење ове неједначине. Уочене значајније погрешеке у процедури којом се рјешева ова неједнаћина су:

- непознавање односа између операција адиције и мултипликације и релације уређења у прстену $\boldsymbol{Z}$ цијелих бројева (као подскупа уређеног поља $\boldsymbol{R}$ реалних бројева);
- погрешно разумијевање својстава уређеног поља $\boldsymbol{R}$ реалних бројева;
- значајно непознавање математичког алфабета; и
- погрешно конструисање (унутар домене уређеног поља $\boldsymbol{R}$ реалних бројева) формуле $x < -2$ у облику $x \in \{-\infty, -2\}$ умјесто у облику $x \in \langle -\infty, -2\rangle$, односно у облику $-\infty < x < -2$, при чему је $\langle -\infty, -2\rangle = \{x \in \boldsymbol{R}: -\infty < x \wedge x < -2\}$ интервал у уређеног поља $\boldsymbol{R}$ реалних бројева.

3.2. Алгебарски задаци: Процјена алгебарских умјећа

Овим задацима су тестирана алгебарска умјећа кандидата (према класификацији Ширли крејглер, [2]). У процесу конструисању прихватљивих рјешења за ове задатке долази до изражаја осим ниво алгебарског мишљења тако и концептана, процесна и процедурална умјећа унутар тих домена.

Задатак 4. Ријеши неједначину $\frac{x-3}{x+1} \geq \frac{x-5}{x-3}$ у уређеном пољу $\boldsymbol{R}$ реалних бројева.

Задатак / Успјешност	∅	0	1	2	3	4	5	**Σ**
Успјешност	5	65	6	20	6	4	19	**125**
Проценат (%)	4.0	52.0	4.8	16.0	4.8	3.2	15.2	**100**

Табела 4: Процјена успјешности у рјешавању задатка 4 (N = 125)

Задатак је значајно захтјеван у когнитивном и афективном домену. У когнитивном домену требало је детерминисати окружење $x \neq -1$ и $x \neq 3$ унутар којег се ова њедначина може рјешавати. Послије неколико алгебарских трансформација и добијања еквивалентне неједначине $\frac{-2x-14}{(x+1)(x-3)} \geq 0$ требало се опердијелити за кориштење одговарајуће таблице или логичку анализу којом се одређују реални бројеви који задовољавају ову последњу неједначини. Према резултатима тесирања, 77.6% тестиране популације или нема развијене логичке способности или нема довољних знаља о својствима множења реалних бројева (или и једно и друго). Уобичајени уочени проблеми су:

- Непрепознавање услова $(-2x\text{-}14 \geq 0 \ \wedge (x+1)(x\text{-}3) > 0) \vee (-2x\text{-}14 \leq 0 \ \wedge (x+1)(x\text{-}3) < 0)$ када је разломак $\frac{-2x-14}{(x+1)(x-3)}$ позитиван ;
- Непрепознавање услова када је производ $(x+1)(x\text{-}3)$ позитиван, односно негативан.

- Непрецизно записивање рјешења нејдначине.

На жалост, само 23 кандидата (или 18.4%) тестираних кандидата понудило је прихватљиво рјешење овог задатка којим се експонира ниво развоја алгебарског мишљења.

Задатак 5. Ријеши једначину $log(x-1)+2log\sqrt{x+2}=1$ у уређеном пољу ***R*** реалних бројева.

Задатак / Успјешност	∅	0	1	2	3	4	5	Σ
Успјешност	4	9	7	7	5	25	68	**125**
Проценат (%)	3.2	7.2	5.6	5.6	4.0	20.0	54.4	**100**

Табела 5: Процјена успјешности у рјешавању задатка 5 (N = 125)

Успјешност у конструисању рјешења овог задатка је потпуно прихватљива будући да је 74.4% тестиране популације понудило прихватљив или готово прихватљив поступак за рјешавање ове једначине.

Задатак 6. Ријеши једначину $a^x-a^{x-3}-a^3+1=0$ у уређеном пољу ***R*** реалних бројева.

Задатак / Успјешност	∅	0	1	2	3	4	5	Σ
Успјешност	16	87	2	1	0	18	1	**125**
Проценат (%)	12.8	69.6	1.6	.8	.0	14.4	.8	**100**

Табела 6: Процјена успјешности у рјешавању задатка 6 (N = 125)

3.3. **Геометријски задаци:** Процјена нивоа геометријског мишљења

Овим задацима су тестирана геометријска умјећа кандидата. У процесу конструисању прихватљивих рјешења за ове задатке требало је да до изражаја дођу осим овладани нивои геометријског мишљења (по ван Хиеловој класификацији, [9]) тако и концептана, процесна и процедурална умјећа унутар Елементарне геометрије али и стратешка умјећа и умјећа прилагођавања. Међутим, у овом тестирању посредством понуђеног модела задатака, нису прикупљене информације од интереса за истраживање.

Задатак 7. Дат је правоугли троугао ΔABC чије су катете CA = b и CB = a . Прави угао код тјемена C подијељен је на три једнака дијела дужима CD = p и CE = q. Изрази варијабле / величине p и q као функције варијабли / величина a и b.

Задатак / Успјешност	∅	0	1	2	3	4	5	Σ
Успјешност	46	26	53	0	0	0	0	**125**
Проценат (%)	36.8	20.8	42.4	.0	.0	.0	.0	**100**

Табела 7: Процјена успјешности у рјешавању задатка 7 (N = 125)

Задатак 8. У троуглу чија је основица a и висина h уписати правоугаоник највеће површине. Наћи површину тог правоугаоника.

Задатак / Успјешност	∅	0	1	2	3	4	5	Σ
Успјешност	61	50	10	1	0	0	3	**125**
Проценат (%)	48.8	40.0	8.0	.8	.0	.0	2.4	**100**

Табела 8: Процјена успјешности у рјешавању задатка 8 (N = 125)

3.4. **Логички задаци:** Процјена логичког мишљења

Овим задацима су тестирана умјећа примјене логичких алата. Међутим, у овом тестирању посредством понуђеног модела задатака, нису прикупљене информације од интереса за истраживање.

Задатак 9. Сваки од кандидата ако освоји минимално 15 бодова на овом тестирању добија право да се упише на Машински факултет. Одредити хипотезу / претпоставку и консеквент / закључак у овој изјави.
Конструисати: (а) Обрат ове изјаве; (б) Негацију ове изјаве; (в) Контрапозицију ове изјаве.

Задатак / Успјешност	∅	0	1	2	3	4	5	**Σ**
Успјешност	46	77	1	1	0	0	0	**125**
Проценат (%)	36.8	61.6	.8	.8	.0	.0	.0	**100**

Табела 9: Процјена успјешности у рјешавању задатка 9 (N = 125)

3.5. **Скуповно-релацијски задаци:** Процјена скуповно релацијског мишљења

Ови задаци омогучавају да се установи ниво скуповно-релацијског мишљења кот тестираних кандидата. У процесу конструисању прихватљивих рјешења за ове задатке, кандидати експонирају своја концептана и процесна умјећа унутар овог домена. Међутим, у овом тестирању посредством понуђеног модела задатака, нису прикупљене информације од интереса за истраживање.

Задатак 10. Показати да парних природних бројева има исто онолико колико има непарних природних бројева.

Задатак / Успјешност	∅	0	1	2	3	4	5	**Σ**
Успјешност	62	47	15	0	1	0	0	**125**
Проценат (%)	49.6	37.6	12.0	.0	.8	.0	.8	**100**

Табела 10: Процјена успјешности у рјешавању задатка 10 (N = 125)

4. ЗАВРШНЕ ОПСЕРВАЦИЈЕ

Успјешност тестираних кандидата посредством овог модела задатака:
(Према ставу 6.6. Општих одредаба конкурса на Универзитет у Бањој Луци право уписа имају кандидати који на пријемном испиту остварили најмање 15 бодова.)

Број бодова	0	1-5	5-10	11-14	**15-20**	**21-30**	**31-50**
Успјешност	6	15	28	27	21	26	2
Проценат (%)	4.8	12.0	22.4	21.6	16.8	20.8	1.6
	60.8				**39.2**		

Табела 11: Успјешности у тестираних кандидата (N = 125)

Вредновање понуђених рјешења задатак овог модела:

Задатак / Успјешност	∅	0	1	2	3	4	5	**Σ**
Задатак 1	14	35	3	0	3	52	18	**125**
Задатак 2	9	61	10	1	6	25	13	**125**
Задатак 3	5	39	2	0	4	7	68	**125**
Задатак 4	5	65	6	20	6	4	19	**125**

Задатак 5	4	9	7	7	5	25	68	**125**
Задатак 6	16	87	2	1	0	18	1	**125**
Задатак 7	46	26	53	0	0	0	0	**125**
Задатак 8	61	50	10	1	0	0	3	**125**
Задатак 9	46	77	1	1	0	0	0	**125**
Задатак 10	62	47	15	0	1	0	0	**125**
	268	**496**	**109**	**31**	**25**	**131**	**190**	**1250**
Проценат (%)	21.44	39.68	8.72	2.48	2.0	10.48	15.2	**100.0**

Табела 12: Процјена квалитета рјешавања (N = 1250)

На основу резултата тестирања ове популације, процјењујемо:

- Већина учесника у тестирању има развијена процедурална математичка умјећа;
- Врло мали број тестираних кандидата има равијена процесна умјећа;
- Занемарљив број кандидата има развијена концептна умјећа;
- 40% тестиране популације има погрешно формирана увјерења о томе шта су пожељна математичка умјећа;
- Преко 60% тестиране популације није се требало, уопште говорећи, ни аплицирати за упис на Факултет; и
- Мање од 13% тестираних кандидата успјешно ће савладати когнитивно захтјевне математичке садржаје универзитетског курса Математика 1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Синиша Црвенковић и Даниел А. Романо: *Рана алгебра и раноалгебарско мишљење*, У: Александра Михајловић, (ур.) Методички аспекти наставе математике III. Трећа међународна конференција МАТМ 2014, 14-15. Јуни 2014, (pp. 27-47), Факултет педагошких наука, Јагодина 2015, ISBN 978-86-7604-141-1.

[2] Kilpatrick, J., Swafford, J. and B. Findell (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. National Academy Press Washington, DC

[3] Kriegler, S. (1997, 2006): Just what is algebraic thinking? Доступно на адреси: http://www.mathandteaching.org/uploads/Articles_PDF/articles-01-kriegler.pdf

[4] Legutko, M. (2008). An analysis of students' mathematical errors in the teaching-research process. In B. Czarnocha (Ed.), *Handbook for mathematics teaching: Teacher experiment. A tool for research* (pp. 141–152). Rzeszów: University of Rzeszów.

[5] Olivier, A. (1989). Handling pupils' misconceptions. *Pythagoras*, *21*: 10–19.

[6] Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *10*(3): 163–172.

[7] Романо, Д.А. (2010). *Шта знамо о математичком мишљењу*? MAT-KOL (Banja Luka), Posebna izdanja, N^{o}. 13(2010).

[8] Schwab, J.J. (1964). Structure of the disciplines: meanings and significances. In Ford, G. W. & Pugno, L. *The structure of knowledge and the curriculum*. (pp. 6-30). Chicago: Rand McNally

[9] van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight.* New York: Academy Press.

Достављено у редакцију часописа 18.07.2016; доступно онлине 29.08.2016.