ISSN (p) 2303-4890, **ISSN (o) 1986–518X**
DOI: 10.7251/IMO1701001J

ISTRAŽIVANJE MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA
http://www.imvibl.org/dmbl/meso/imo/imo2.htm
Vol. IX (2017), Broj 16, 1–22
Pregledni rad

ГЕОМЕТРИЈСКИ САДРЖАЈИ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ НИЖИХ РАЗРЕДА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

Сњежана Јовичић
Педагошки факултет Бијељина**,** Универзитет у Источном Сарајеву

САЖЕТАК. Потреба за разумијевањем геометрије у савременом свијету је пожељна, управо због тога настава математике, треба прво наставницима, а затим и ученицима да обезбиједи квалитетна знања из области геометрије. Мастер рад под насловом *„ Геометријски садржаји у настави математике нижих разреда основне школе“* се састоји из четири дијела. У првом дијелу је представљено уопште о геометрији као науци и о томе како је настала, у другом дијелу су наведене теорије когнитивног развоја о настави геометрије и то: Геометријске парадигме К. Хоудмент и А. Кузниака, наведене парадигме су упоређене и суочене са Ван Хиеле-овим приступом геометрији, затим Теорија Ефраима Фишбеина о фигуралним концептима и Дувалов когнитивни модел геометријског мишљења. У трећем дијелу представљени су геометријски садржаји у настави геометрије нижих разреда. Наведени су сви геометријски садржаји по разредима, који се изучавају по актуелном Наставном плану и програму у Републици Српској, списак свих Наставних тема и јединица, затим очекивани исходи и смјернице наставницима. У наведеним поглављима представљени су и неки од примјера из уџбеника за ниже разреде, о томе на који начин су презентовани неки садржаји, на примјер када је ријеч о томе како се ученици упознају са појмом праве, правоугаоника и слично. Да проблеми које ученици имају у настави геометрије заиста и постоје, представљено је у поглављу четири, гдје су наведени резултати екстерног тестирања ученика из математике 2015/2016. школске године, са посебним освртом на геометрију. Затим су наведени и разлози због којих ученици, али и наставници мисле да са усвајањем геометрјских садржаја постоји проблем, те су дате и неке смјернице наставницима које би им могле користити у реализацији наставних садржаја из геометрије.

Кључне ријечи: геометрија, парадигме, геометријско мишљење, геометријска фигура, фигурални концепт

ABSTRACT. The need to understand the geometry of the modern world is desirable, which is why the teaching of mathematics, teachers should first and then the students to provide quality knowledge in the field of geometry. Master's thesis entitled *"Geometric facilities in the teaching of mathematics in lower grades of primary school"* consists of four parts. The first part presents the general geometry as a science and about how it was created, in the second part of that theory of cognitive development on the teaching of geometry, namely: Geometric paradigm K. Houdement and A. Kuzniak mentioned paradigms are compared and confronted with Van Hiele's access geometry, then Efraim Fishbein's theory of figural concepts and Duval's cognitive model of geometric thinking. The third section presents the geometrical contents in teaching geometry, the lower grades. Those are all geometrically facilities after classes, which are taught by the current Curriculum in the Republic of Srpska, list all topics and units, then the expected outcomes and guidance teachers. In these chapters were presented and some examples from textbooks for lower grades, about how they presented some facilities, for example. when it comes to how students are introduced to the concept right, rectangles and the like. That the problems students have in teaching geometry actually exists, is presented in chapter four, where they listed the results of external testing of students in mathematics 2015/2016. school year, with special emphasis on geometry. They then listed the reasons why students and teachers think that the adoption of geometrjskih content there is a problem, and are given some guidelines for teachers which would benefit them in the realization of teaching contents of geometry**.**

Key words and phrases: geometry, paradigms, geometric reasoning geometric figures , figural concept

Math. Subj. Classification (2010): 96G50
ZDM Subject Classification(2010): G10, G20, G80

УВОД

У протеклих педесет година математичко образовање је постало врло осјетљиво на промјену потреба. Истраживања развојне психологије, нове технологије, су само неки од савремених захтјева који утичу на математичко образовање. Међутим, њихов утицај се више односи на област наставног плана и програма, наставних средстава у математици, него на објашњење дубоких процеса разумијевања и учења у математици. Како можемо разумјети потешкоће, често непремостиве које ученици имају при разумијевању математике? Шта је природа тих потешкоћа? Гдје се налазе? Ова питања имају све већи значај у настави математике, јер је неопходно припремити ученика који ће се суочити са технолошким и компјутерским окружењем, које захтијева све већи ниво сложености. Наведена питања постају образовни изазов, како у учионицама, тако и у теоријским истраживањима о развоју и усвајању математичких знања. Процеси усвајања математичких знања су толико комплексни, да захтијевају више приступа.

Да бисмо разумјели потешкоће које многи ученици имају с разумијевање математике, морамо одредити когнитивно функционисање различитих математичких процеса (Duval, 1998). Који су когнитивни системи потребни за приступ математичким објектима? Представљање и визуелизација су у основи разумијевања у математици.

Геометрија, као једна од области математике је посебно подручје у коме постоји доста проблема при разумијевању. Геометрији као дијелу математике одувијек се придавало мало пажње у школи, да ли због некомпетентности наставника, незаинтересованости ученика или из неког другог разлога, настава геометрије је углавном занемарена. У жељи да се сагледа важећи Наставни план и програм, утврди заступљеност и приступ геометријским садржајима, ослањајући се на теорије когнитивног развоја о настави геометрије, настао је овај рад.

Геометрија пружа ученицима аспект математичког мишљења које је различит од свијета бројева, али и повезан с њим. Како ученицима постају познати ликови, тијела, локације, трансформације и како развију просторно размишљање, уређује се темељ за разумијевање не само просторног свијета, већ и других тема у математици и умјетности и социјалним истраживањима (Razel and Eylon, 1991). Употребљавајући конкретне моделе, цртеже и (компјутерски) програм за динамичну геометрију, ученици се могу активно ангажовати у геометријским проблемским ситуацијама. У добро организованим активностима, с одговарајућим алатом и уз учитељеву подршку ученици могу доносити и истраживати претпоставке о геометрији и могу развијати геометријске концепте од најранијих година школовања. Геометрија је више од дефиниције, суштина је у описивању односа и разумијевању. Према мишљењу многих теоретичара дјечје разумијевање геометријских појмова и концепата пролази кроз нивое, од неформалног до формалног мишљења (Van Hiele, 1986).

Геометријске фигуре су један од основних елемената, који има улогу у историји геометрије и уопште математике, од Еуклидске геометрије па све до данас. У настави геометрије у образовању, геометријске фигуре су неопходна средства за формирање геометријских појмова. Све европске и америчке земље у Наставном плану и програму садрже геометрију у којој геометријске фигуре имају значајну улогу. Многа истраживања (Parzyzs, 1988, Duval, 1988, Fischbein, 1993, Laborde, 1994) истичу двије функције геометријске фигуре: концептуалну и фигуралну. Ефраим Фишбеин када је ријеч о овој теми уводи термин „фигурални концепт“. Предмет истраживања и манипулације у геометријском образложењу су ментални ентитети названи фигурални концепти, који одражавају просторна својства (облик, положај, величину), а истовремено посједују концептуалне особине као што су идеалитет, мисаоност, општост, савршенство (Fischbein, 1993).

У раду су представљени геометријски садржаји који су заступљени у настави математике нижих разреда у Републици Српској, кроз које наставне теме и јединице се ти садржаји реализују, као и очекивани исходи по разредима.

Кроз учење геометрије ученици уче анализирати карактеристике и односе геометријских фигура и тијела, цртају геометријске фигуре према наставниковим упутствима, усвајају елементарне појмове из подручја геометрије нижих разреда основне школе, а да често не могу са сигурношћу препознати троугао ако се налази у положају који није уобичајен. Настава геометрије у основној школи требало би да обезбједи ученицима шансу да истражују, да осјете и виде, да граде и учествују, да стварају властита запажања о облицима у свијету који их окружује, као и да цртају, праве геометријске моделе, користе геометријски софтвер. Све активности у настави геометрије треба да укључују визуелизацију, конструкцију, упоређивање, трансформацију, те класификовање геометријских облика. Настава геометрије треба да циља на развој геометријског резоновања и развој просторних способности, које можемо дефинисати као одређену врсту интуиције о облицима и односима међу њима. Уколико имамо богата искуства са геометријским облицима, фигурама, просторним односима, претпоставља се да ћемо бити у стању да развијемо геометријске способности.

1. ГЕОМЕТРИЈА КАО НАУКА

1.1. О геометрији

Геометрија је област математике која се некад бавила изучавањем просторних облика и величина објеката реалног свијета. Када се тим објектима додијеле материјална својства и неке неправилности у облику настају нематеријални објекти, који се могу представити само сликом и моделом, и такве објекте називамо геометријским фигурама. Много ствари у природи је објашњено помоћу геометрије, а природа представља подстицај свих наших сазнања. Постоји доста живих и неживих објеката у природи које математика изучава. На примјер, пахуљице снијега су у основном правилном облику шестоуглови, као и саће пчела. Љуска морског пужа има на пресјеку облик спирале, лава избија из земље и прави узвишења облика купе.

Човјек је користио природне облике у градњи својих станишта, у прављењу накита, али развојем човјечанства, није било само довољно знање настало искуством и посматрањем, била су потребна сложенија знања о геометријским фигурама до којих се могло доћи само изучавањем, и то доводи до појаве науке.

1.2. Настанак геометрије као науке

Херодот сматра да је геометрија поникла у Египту, јер је било потребно да се мјери земљиште око Нила. Отуда и потиче назив геометрија, геа-земља, метрио- мјерење. Геометријска знања су неопходна за грађеље насипа, храмова, али та знања су била само резултат практичног искуства, а не математичких доказа. Геометрија, као наука, је настала у старој Грчкој, гдје грчки математичари врше систематизацију дотадашњих знања, и уводе доказ у математику. Творац првог аксиоматског система је Еуклид у науци, и сви остали системи су створени по угледу на њега. Еуклид у свом излагању геометрије полази од система дефиниција, аксиома и постулата.

2. ТЕОРИЈЕ КОГНИТИВНОГ РАЗВОЈА О НАСТАВИ ГЕОМЕТРИЈЕ

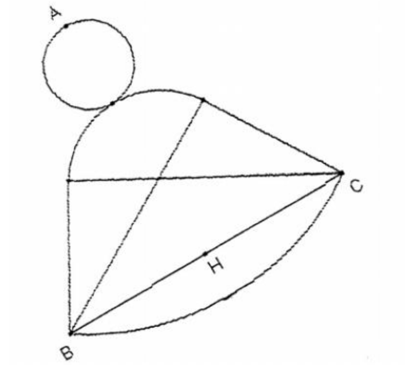
Када је ријеч о когнитивним теоријама биће представљене три, прва је наведена геометријска парадигма Хаудмент и Кузниак, затим је наведена теорија румунског психолога јеврејског поријекла Ефраима Фишбеина и Дувалов когнитивни модел геометрјског мишљења.

2.1. Геометријске парадигме К. Хоудмент и А. Кузниака

2.1.1. Руен-ово звоно

Проблем је дат студентима који се школују за учитеље у Нормандији. Ови студенти желе да постану учитељи у основној школи, они су завршили студиј, али нису нужно компетентни у математици.

Звоно: Желимо да повећамо фигуру (ABHC) у (A'B'H'C'), тако да дужина A'H' буде дупло већа од AB.

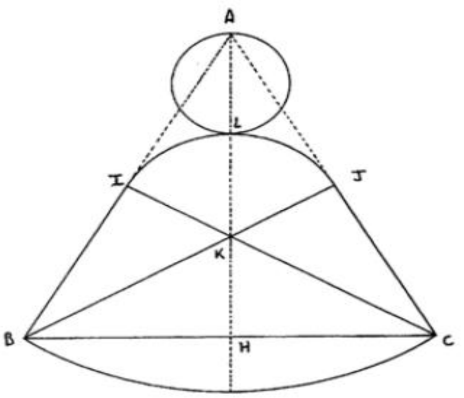
	1) Урадите ово проширење помоћу лењира и компаса. Оставите линије градње видљивима. 2) Неки ученици кажу да је подручје финалне фигуре четири пута већи од почетне. Да ли су у праву? Оправдајте свој одговор. Ако нису у праву, треба наћи тачну пропорцију између два подручја.

Слика 1.

Цртеж дат на испиту је направљен са CABRI[1], а студенти могу да га нацртају помоћу лењира и компаса на папиру.

2.1.2. Анализа фигуре

Хипотезе нису експлицитно дате; ученици морају наци својства потребна за изградњу у различитим скалама. Проблем одмах захтијева перцептивну анализу цртежа, у првом значењу заснован је на интуицији односно схватању објеката путем вида. Ова интуиција се односи на прву типологију геометријских објеката у зависности од знања појединости који се одвијају у анализи. Нека нам је дат одређен број могућих хипотеза. Нека I, J, К и L буду тачке на цртежу испод (није дато на оригиналној слици) хипотеза. Нека I, J, К и L буду број бодова у цртежу испод (није дато на оригиналној слици).

	H1: A је на правим линијама (BI) i (CJ). H2: H је средиште (BC). H3: Углови IBC и JCB једнаки су 60°. H4: Углови BIC и CJB су под правим углом. H5: Лук IJ је лук круга центра K и радијус KI. H6: Круг пречника AL и тангента у L на лук IJ. H7: BC је лук круга са центром A и радијус AB.

Слика 2

.

2.1.3. Валидност/потврђивање

Како се могу потврдити све ове хипотезе? Сусрећемо се са два нивоа који се односе на два различита поимања геометрије. У првом нивоу, дозвољено је користити мјерне алатке и експериментисати у разумном свијету. У другом, образложење се ослања на математичку особину апстрактности геометријске фигуре. У осјетљивом свијету сљедеце алатке играју главну улогу: лењир да провјери колинеарност, скуп квадрата (са углом од 90° и 60°) да провјери мјеру углова и компас за потврду лукова кругова. У ствари, у посљедњем случају, коришћење компаса поништава H7: A није центар лука од B до C, одговарајући центар је средиште сегмента AL.

У свијету геометријских фигура, имамо заједничке конфигурације као једнакостраничне троуглове, у овом свијету лењир и компас дефинишу скуп фигура, који могу бити изграђени. У

[1] Maths sofware for students

основној школи овај скуп није баш велики и даје важне информације о односима у основи фигура. У овом примјеру, то доводи до мишљења да углови износе 60° и да су криве у ствари лукови кругова.

2.1.4. Конструкција

Ефектна конструкција овог цртежа зависи од алата који се користи. Ако задржимо алате који се користе за провјеру хипотезе о угловима и колинеарности, сет квадрата има темељну улогу. Заиста, лако је изградити звоно: нацртати AH, онда нормална линија (AH) у H и превући угао од 60° датог квадрата, и тако добијемо једнакостранични троугао. У том случају проблем је ријешен у хомогену парадигму гђе сви уређаји ђелују у осјетљивом и свијету мјерења. То називамо прва парадигма, гђе је образложење природно близини искуства и интуицији: природна геометрија (Геометрија I).

Али за ову вјежбу су нам били потребни лењир и компас. У том случају, резоновање цртежа није довољно, морамо повезати бројке са стандардним конструкцијама користећи математичке особине. Да бисмо конструисали, било би неопходно са се примјењује Талесова теорема или својство медијана у једнакостраничном троуглу. Парадигма се промијенила и нова геометрија фаворизује различите начине резоновања и нову врсту искуства и интуиције. И ми ћемо ову нову звати природна аксиоматска геометрија. (Геометрија II)

У наведеном примјеру, разлика између парадигми није експлицитна и изазива неку врсту неспоразума. Проблем је дат у Геометрији I и оно који су дали тест очекују рјешење у Геометрији II. Ова разлика између двије парадигме може бити оцигледна за стручњака, али не и за ученика, зато се сматра да је корисно да се објасни разлика између ове двије геометрије, нарочито за наставнике, и зато су Катарина Хоудмент и Алаин Кузниак хтјели да пруже разумијевање сложености геометрија.

2.1.5. Три геометријске парадигме

У Француској, термин геометрија је присутан у свим програмима математике од вртића и средње школе, до универзитета. Наведено истраживање има за циљ да се боље разумију различита значења детерминисана истим термином геометрија (Houdement & Kuzniak, 2003). Они су посматрали само елементарну геометрију дефинисану као теорија простора, која тежи да представи структурне особине реалног простора. Њихово истраживање користи доказе три различите парадигме, које ће бити представљене.

1. Геометрију I (Природна геометрија). Објеки Геометрије I су материјални објекти, графичке линије на листу папира или виртуелне линије на екрану рачунара, односно линије су увијек досљедне приказу стварности. Објекти из простора могу бити схематизовани у микро-простор (Barthelot & Salin, 1998) мрежом линија. Изабрани графички објекти су веома погодни да опишу стварност, отуда и сам назив Природна геометрија за Геометрију I. У овој парадигми технике за цртање су оне технике које су најуобичајније, као што су: лењир, троугао, пресавијање и резање итд. За производњу знања у овој парадигми све методе су дозвољене: докази, стварна и виртуелна искуства, и наравно резоновање. Доказивање је повезано са реалношћу, на примјер динамички докази су прихваћени у овој геометрији. Сви покрети између модела и стварности су перманентни и омогућују да се докаже тврдња: најважнија ствар је увјерити се. То је заправо геометрија која доминира у основним школама, односно геометрија која је заступљена у настави нижих разреда.

2. Геометрија II или Природно- аксиоматска геометрија (један модел је Еуклидова геометрија) заснована на хипотетично дедуктивним законима који се односе на постављање аксиома који су, колико је год могуће, блиски чулној стварности, односно интуицији. Систем аксиома може бити недовршен, али демонстрација унутар система је неопходна за напредак. У овој парадигми текст игра важну улогу, јер сви објекти треба да буду дефинисани текством, цртежи су једино илустрације, пратња текстуалних ставова. Ово је ниво на коме би требало да су предавачи у основној школи.

3. Геометрија III (Формалистичко аксиоматска геометрија). У овој геометрији се „сијече“ веза између стварности и аксиома, аксиоми нису више базирани на интуицији. Систем аксиома не мора да буде ни у каквој вези са стварношћу. Начин размишљања је исти као у Геометрији II, али систем аксиома је потпун и независан од стварности. Једини критеријум истине је конзистентност, односно одсуство противријечности. Основни принцип је да су парадигме хомогене, односно да може да се разумије неки принцип унутар једне парадигме, а да се не разумије природа друге.

У сљедећој табели сумирани су различити аспекти ове три геометријске парадигме.

	Геометрија I (Природна геометрија)	**Геометрија II** (Природна аксиоматска геометрија)	**Геометрија III** (Формалистичко аксиоматска геометрија)
Интуиција	Осјећај, повезан са перцепцијом, обогаћен експериментом	Повезан са фигурама	Интерни у математици
Искуство	Повезано са мјерењем	Засновано на реалним шемама	Логичко
Доказ	Близак реалности и повезан са експериментом	Демонстрација заснована на аксиомама	Демонстрација на основу комплетног система аксиома
Простор	Интуитивни и физички простор	Физички и геометријски простор	Еуклидов простор
Статус цртежа	Објект проучавања и објект потврђивања	Подршка за расуђивање и „фигурални концепт“	Шема из теоријског објакта, хеуристичи прибор
Повлаштена гледишта	Само-докази и конструкција	Својства демонстрације	Демонстрација и односи између објеката

Табела 1.

2.1.6. Улога цртежа кроз три наведене парадигме

Размотрићемо познати проблем изградње троугла кроз све три геометријске парадигме. Ако су дате његове три стране, на примјер дужине су 4cm, 8 cm и 10 cm. Овај проблем може се дати млађим ученицима, ако имају више штапића различите дужине. Прво природно рјешење одвија се унутар геометрије I.

Исти проблем се може дати касније користећи лењир и компас. Ученици стичу искуство у равни и задатак се постиже ако постоји троугао на столу или на папиру. Ако ближе погледамо комбинацију дужина, може се поставити питање, да ли се може насртати троугао чије су дужине страница 4cm, 4cm и 10cm? Зашто је немогуће нацртати троугао тих дужина? У геометрији I закључак може бити заснован на искуству, којим ће се ријешити питање: дужина стране је дужа од збира друге двије. Прво питање се односи на опште питање постојања троугла, због тога је потребно да се уведе прецизна дефиниција троугла. Општи проблем постојања троугла са своје три дужине можемо представити овако: Ако су A, B и C три тачке у равни, неједнакост $AB \leq AC + BC$ је увијек истинита. Овај аксиом је полазна тачка у Геометрији II. На овај начин искуство у Геометрији I може дати смисао аксиому у Геометрији II.

Друга интерпретација може бити понуђена у Геометрији III и произвести Chasles -ову теорему (о суми вектора): Ако су A, B и C три тачке у равни, три вектора потврђују хипотезу $|AB| = |AC| + |CB|$. У овом случају, наведена једнакост је посљедица математичке анализе у случају широког спектра простора и не односи се на наш реални простор. Овакав физички објекат, цртеж троугла, нам дозвољава различите врсте размишљања у зависности од врсте питања, односно геометријске парадигме, која нам може помоћи при одговору. Прва промјена парадигме, одломак из Геометрије I и Геометрије II је веома осјетљив, јер се по у први пут у математици ментална перспектива објекта драстично мијења, без визуелне промјене и симбола.

2.1.7. Ван Хиеле-ови нивои и геометријске парадигме

Да бисмо појаснили и продубили геометријске парадигме корисно би било да их повежемо са начином на који је геометрију видио Ван Хејл. Укратко су представљени Ван Хејл-ови нивои (Van Hiele, 1986):

Ниво 0, ниво визуелизације. Геометријске фигуре се препознају по свом облику. Ученици могу препознати геометријске ликове и уочити њихове особине, али их не користе за препознавање и класификацију. Они уочавају геометријске објекте као физичке идентитете, дакле уче геометрију само у интеракцији са реалним објетима. Ван Хејл говори о „просторном размишљању“.

Ниво 1, ниво анализирања, описни ниво. Ученици почињу да идентификују особине ликова и уче како да на правилан начин опишу повезаност особина, али не праве везе између различитих облика и њихових особина. Ван Хејл говори о „геометријском просторном размишљању“.

Ниво 2, ниво неформалне дедукције. Трећи ниво је теоретски ниво гђе ученици спознају односе међу особинама геометријских облика и на основу тога односе међу самим геометријским облицима. За овај ниво потребне су дефиниције, шта је потребно, а шта довољно да се неки геометријски лик опише. Ван Хејл говори о „математичком геометријском размишљању“.

Ниво 3, ниво дедукције. Овај ниво је логички формалан, проучавање природних односа између појединих теорема унутар аксиоматске теорије. Ученици су у могућности да употребљавају апстрактне и да изводе закључке који су засновани више на логици него на интуицији. Ван Хејл говори о „логичком математичком размишљању“.

Ниво 4, структурни нови. На овом нивоу предвиђене су различите аксиоматске структуре. Ученици су у могућности да разумију везе између система.

Ван Хејл-ове нивое можемо користи и ван своје теорије, како би нам дали добре показатеље о нивоима математичког размишљања ученика. У ствари, то нам даје другачији поглед, можда чак и лакше препознатљив, као што су интуиција, експеримент, дедукција.

Неопходно је направити разлику између ученика који поступно откривају геометрију од одраслих особа који би требало да су савладали све нивое. Ако је он(она) стручњак за њу(њега), употреба одређеног нивоа зависи од проблема који се рјешава и парадигме у којој је проблем могуће ријешити. Да бисмо савладали геометријске парадигме и Ван Хелј-ове новое мора да се схвати узајамна веза, односно интеракција између ових парадигми. Како изгледа та интеракција биће представљено сљедећом табелом.

<table>
<tr><th></th><th>Геометрија I</th><th>Геометрија II</th><th>Геометрија III</th><th></th></tr>
<tr><td>Ниво 0
Визуелизација</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">Емпиријско поље(интуиција и експеримент)</td></tr>
<tr><td>Ниво 1
Анализа</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ниво 2
Неформална дедукција</td><td colspan="2">Прелаз</td><td></td></tr>
<tr><td>Ниво 3
Дедукција</td><td></td><td colspan="2">Прелаз</td><td rowspan="2">Теоретско поље (дедукција)</td></tr>
<tr><td>Ниво 4
Структурни</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Технолошки хоризонт Формални хоризонт

Табела 2.

Ову табелу треба више посматрати као динамички план рада процеса, него као фиксну тачку гледишта. Неопходно је објаснити значење сваког поља табеле. На примјер, ниво 4 није дио Геометрије II, а ниво 1 када се јавља у Геометрији I, то је нека врста веома префињене геометрије, гдје алати развијени у Геометрији II оправдавају емпиријско искуство Геометрије I. Заиста постоје апстрактна дешавања у Геометрији I која нису приказана у школама, али која су била предмет радова као што је Геометрографија (Houdement & Kuzniak,).

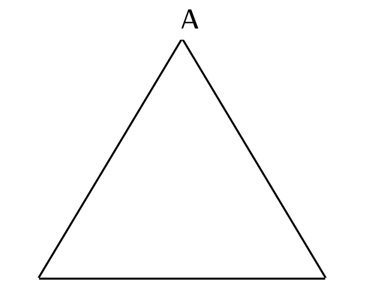
Примјећујемо значајну разлику између геометријских парадигми и Ван Хеје-ових нивоа. Ван Хејл-ови нивои представљају ‘хијерархију размишљања’ док се у геометријским парадигмама Хоудемент и Кузниак покушава одржати кохерентност и оне су засноване на хомогеним теоријама.

Геометрије немају исте дугорочне циљеве, њихови хоризонти су различити, технолошки хоризонт Геометрије I и формални хоризонт Геометрије III. Геометрија I интегрише ниво 1 и 2, припада емпиријском пољу, то је осјетљива геометрија која садржи интуицију, експеримент и дедукцију материјалних објеката, то значи посматра само физички аспект објеката. Геометрија II садржи ниво 3. У њен састав улазе дедукција и аксиоматски систем. Али ниво 3 остаје ниво прелаза. За Геометрију II стварност остаје важна. Геометрија III садржи ниво 4. Стварност више није важна. Али за многе од нас, насупрот Ван Хејлу, фигуративне представе много помажу у истраживању геометрије. У Геометрији I стручност иде у нашој табели одозго на голе, од емпиријског ка теорији. У Геометрији II иде одоздо на горе, и емпиријско поље јавља се као хеуристичко средство. У школи, привилеговани начин (оно што је маркирано сиво у табели) до напредне математичке и геометријске мисли је онај који доносе нивои прелаза дати у табели.

2.2. Теорија Ефраима Фишбеина о фигуралним концептима

2.2.1. Појам фигуралног концепта

У савременим психолошким теоријама прави се разлика између појма и менталне слике. Пиерон , у свом „Vocabulaire de la Psychologie “, дефинише појам на сљедећи начин: „Појам је симболичка репрезентација (скоро увијек вербална) употребљена у процесу апстрактног мишљења и посједује општи значај који одговара ансамблу конкретних репрезентација са освртом шта имају заједничко“ Пиерон (Pieron, 1957). На основу ове дефиниције јасно је да сам појам карактерише односно да је изражен неком идејом тј. савршенством класификације објеката, заснованом на њиховим заједничким чињеницама. Насупрот томе, слика тј. ментална слика је сензорна репрезентација објекта или феномена. На примјер појам је метал и то је општа идеја односно заједничка идеја, назив за групу супстанци које имају иста својства, док слика металног објекта је сензорна репрезентација датог објекта (има боју, величину...). Да би ово још боље објаснили размотрићемо сљедећи примјер: Посматрајмо једнакокраки троугао *ABC* (*AB* = *AC*) као што је на датој слици, гдје желимо да докажемо да је B=C. Можемо да конструишемо сљедећи доказ**:**



Слика 3.

(Преузето из Fischbein, E., 1993: „The theory of figural concepts’, Educational Studies in Mathematics 24(2), 139-162)

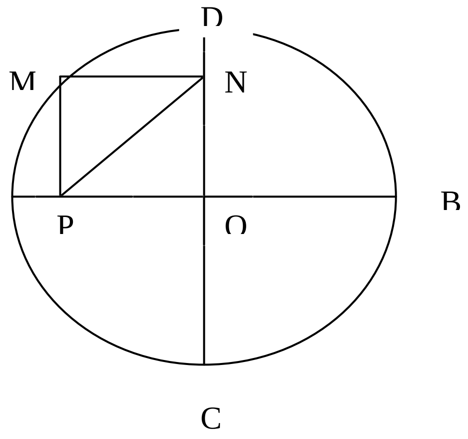
Одвојимо једну страницу троугла од самог троугла (рецимо *AC*) затим је окренимо тако да је сада *AC* на лијевој страни, а AC на десној, док страница *BC* је помјерена тако да спаја ове двије, затим странице спојимо. Угао *A* остаје исти јер странице *AB* и *AC* имају исту дужину, такође страница *AC* ће бити савршено подударна са *AB* на лијевој страни, а *AB* и *AC* исто тако савршено подударне на десној. Послије тога ротирајмо дати троугао и видјећемо да се подудара са оригиналом у потпуности. Као последица тога долази да B мора бити једнак C. У овоме примјеру употребили смо одређену суму знања коју смо изразили појмовима: двије странице *AB* и *AC* су проглашене једнаким, једном је употријебљен појам тачке, странице, угла, троугла, а једном смо споменули вербално процес супротног смијера- ротације. Али, у исто вријеме, једном смо употребили фигуралне информације и фигурално репрезентовали операције- главна идеја одвојити страницу троугла од троугла, ротирати троугао и упоредити га са оригиналним. Јасно је да се овдје бавимо мјешавином два независна, дефинисана ентитета, у једну руку апстрактне идеје и у другу руку сензорне операције која се одражава кроз конкретне операције.

Сада размотримо саму срж доказа, дакле имамо операцију одвајања странице троугла, па затим операцију спајања страница троугла. Појмови не могу бити одвојени, окренути или спојени. Овдје се бавимо само са описивањем тренутних практичних операција, али у стварности да ли је могуће да одвојимо неки објекат од њега самог.

Наравно да је одговор негативан. Такве операције немају конкретно значење. Дакле бавимо се са свијетом идеја, са значењем идеја. Објекти на које се ово односи- тачке, странице, углови и операције са њима имају једино идејно постојање. Они су појмовна природа. У исто вријеме они имају унутрашњу појмовну природу: једну док се односе на слику, а једну кад се разматрају операције попут одвајања, промјене смера итд. Углавном троугао који смо споменули као и његови елементи не може бити разматран или чистим појмовима или пуким заједничким сликама. Ипак, ови ентитети и операције који су учествовали у формалним, логичким доказима, математичкој исправности и у исто вријеме у закључивању, једнаких углова *B* и *C* могу бити провјерени практично. Ентитети који су поменути изнад- тачка, странице (дио линије), углови, сам троугао и операције са њима посједују појмовне квалитете. У математичком резоновању појединац се не односи на њих као на материјалне објекте или цртеже. Материјални објекти, цртежи и слично једино се могу материјализовати моделима менталних ентитета са којима се математичар бави. Друго, једино осећај за појам код појединаца може се сматрати као апсолутна перфекција геометријских ентитета: правих линија, кругова, квадрата, коцки, итд. Треће, ови геометријски ентитети немају изворни материал који им одговара. Тачке (нула- димензионални објекти), праве (једно-димензионални објекти), равни (без-димензионални објекат) не постоји у стварности. Док реално објекти са којима имамо практично искуство су тродимензионални. Четврто, сви ови конструкти су углавном репрезентације, попут сваког појма и никад менталне копије одређеног конкретног објекта.

Када се нацрта одређени троугао *ABC* на листу папира да би провјерили нека од његових својстава (на примјер својство његове висине) ми се не бавимо толико цртежом него одређеним обликом који може бити облик у бесконачној класи објеката. Уствари ми се бавимо хијерархијом облика, од тренутно одређеног али уствари који одговара бесконачности могућих објеката- универзалној категорији троуглова. Постоји и једно својство које карактерише геометријске фигуре и које се такође односи на концептуалну природу. Својству геометријских фигура наметнуле су се или потичу из дефиниције у краљевству одређеног система аксиома. С ове тачке гледишта геометријске фигуре имају појмовну природу. Квадрат није слика нацртана на листу папира него је то облик који је одређен дефиницијом (лако може бити инспирисан и реалним објектом). Квадрат је правоугаоник који има једнаке стране. Почевши од ових својстава можемо да наставимо са откривањем других својстава квадрата (сви једнаки, прави углови, једнаке дијагонале, итд).

Сви ови појмови који су споменути, или боље речено све геометријске фигуре представљене су менталним конструкцијама које поседују истовремена концептуална и фигурална својства. Када замислимо круг, замишљамо цртеж круга (укључујући на примјер боју оловке), а не идеал савршеног круга, али математички круг који је објекат нашег математичког резоновања, нема боју, нема материју, нема масу и то је наводно идеална перфекција. Она има сва својства појма који може учествовати у математичком резоновању, те упркос овој чињеници још увијек укључује репрезентацију просторних својстава. Размотримо сљедећи примјер 2: У кружници са центром у тачки *O* нацртајмо два окомита пречника *AB* и *CD*. Изаберимо тачку *M* на кружници и онда нацртајмо двије окомите дужи *MP* и *MN* на два пречника (сл. 2). Сада поставимо питање колика је дужина дужи *PN*? На први поглед, чини се да проблем не може бити ријешен зато што дужина исјечака *MP* и *MN* зависи од позиције тачке *M*. Али одједном, појединац опажа да је фигура MPON правоугаоник, те да је исјечак *MO* полупречник круга. Једнакост дијагонале није питање, једнакост полупречника није питање, такође.



Слика 4.
(Fischbein, E., 1993: The theory of figural concepts, Educational Studies in Mathematics 24(2), 139-162)

Ове везе не зависе од самог цртежа, него су наметнуте дефиницијама и теоремама. Битан аспект који желимо да нагласимо је да закључак није нацртан разматрањем одвојених слика и формалним ограничењима, него јединстваним процесом у којем су дестиловане фигуре разматране, откривајући логичке везе. Ми не морамо да се трудимо да би "дотјерали " фигуру тј. пречистили ментално од њених непотребних детаља и нејасноћа. Процес идеализовања фигуре одиграо се аутоматски тако како се поставе интегрална, активна компонента стриктног логичког резоновања. Чињеница је да смо одједном скочили на закључак PN = MN = полупречник = константа. У моменту када смо схватили правоугаоник PONM, без интервенције или истраживања, подржани идејом да је разматрана фигура, од почетка, не обична слика него логички контролисана структура. У овом случају удруживање између појма и фигуре тежи да буде довршено, комплетно. Објекти истраживања и манипулације у геометријском резоновању су тада ментални етитети, названи фигуралним концептима, који одражавају просторне способности (облик, позиција, висина) и у исто вријеме, посједовање генерализације и савршенства. Историја математике свједочи сложеним динамичким процесима концептуализације и аксиоматизације фигуралних информација. Многи аксиоми употријебљени у Еуклидовим Елементима експлицитно исказаним. Како је Гаус забиљежио, Еуклид говори о тачкама да леже између других тачака а линије леже између других линија, али никада се не бави појмом "између и његовим својствима" (Kline, 1982).

Сада ћемо се сусрести са сукобљеним феноменом који се одиграва у извору фигуралног концепта код појединца. Шепард цитира многе интроспективне извјештаје научника који описују начине на које се открива нова идеја заснована на замишљеном покретачу (Shepard, 1978). На примјер, односећи се на Ајнштајнов рад, он пише: " По свему судећи, Ајнштајнов рад у теореткој физици обиљежило је узајамно дејство између конкретних и перцептиалних визуелизација на једној страни, и на другој између немилосрдног вођења према апстрактној естетици принципа симетрије или инваријантности. Ово узајамно дејство чини се да је посредник, не вербалном дедукцијом, нити логичким мостовима и математичким формализмом, него узлетним скоковима између просторне и физичке интуиције" (Shepard , 1978).

2.2.2. Дефиниција, слика и фигурални концепт

Имамо три категорије менталних ентитета који се односе на геометријске фигуре: дефиницију, слику (засновану на перцептивно-сензорским искуствима, попут слике на цртежу) и фигурални концепт. Фигурални концепт је ментална стварност, то је конструкција обрађивана математичким резоновањем у домену геометрије, лишена било каквих конкретних-сензорских своcјтава (попут боје, тежине, густине, итд) али изложена фигуралним својствима. Ова фигурална конструкција је контролисана и манипулисана у принципу без остатака логичким правилима и процедурама у краљевству одређеног аксиоматичког система. Тешкоћа да се прихвати постојање трећег типа менталних ентитета је одређена чињеницом да смо директно једино свјесни менталне репрезентације (укључујући различита сензорна својства попут боје) и одговарајуће појмове.

Потребан нам је интелектуални напор да би разумјели да математичко-логичке операције манипулишу једино са прочишћеном верзијом слике, тј. просторно- фигуралним садржајем слике. Када манипулишемо са ријечима у вербалној активности, звукови (које чујемо или изражавамо) су спољашњи, материјалне репрезентације ријечи: значење лежи изван материјалног изражавања ријечи, значење је идеја фиксирана комплексом веза. Фигурални концепт је такође значење. Нарочито овај тип значења је онај који укључује фигуре као унутрашње својство. Изворно значење ријечи круг у геометрији, руковођено је процесом нашег резоновања и није смањено чистом формалном дефиницијом. То је слика потпуно контролисана дефиницијом. Без овог типа просторне слике геометрија не би постојала као грана математике.

2.3. Дувалов когнитивни модел геометријског мишљења

2.3.1. Дувалов когнитивни модел

Појам репрезентације је карактеристичан за све појаве које се дешавају у сваком процесу знања. Основни појам репрезентације је врло стар и прецизан. Репрезентација је „нешто што стоји за нешто друго”. У исто вријеме овај појам може бити несхваћен или превише формалан. Поставља се питање шта је природа тог појма „нешто што стоји за нешто друго”. Одговори могу бити широког спектра, а зависе од тога да ли их посматрамо у вези са конкретним личним искуством, са менталним структурама, или напротив са знањем објеката са њиховим специфичним епистемиолошким захтјевима (Hitt, 2002). Зато репрезентације могу бити лична вјеровања, концепције или заблуде о којима сазнајемо на основу вербалне или схематске продукције. Али репрезентације могу бити и удружене, произведене у складу са правилима која омогућавају опис система. Такве семиотичке репрезентације, на било ком језику, појављују се као заједнички алат за производњу нових знања. Овај одговор, заједно са епистемиолошким и математичким захтјевима је имао велики значај у истраживању когнитивних процеса (Duval, 1998).

Истраживања о учењу математике морају бити засновања на ономе шта ученици заиста сами могу. Поставља се питање како можемо анализирати процесе стицања знања из концепција ученика и сазнати изворе тешкоћа. Постоји организована когнитивна структура која чини да су појединци у могућности да усвајају различите врсте знања и активности (Duval, 1996). Постоје когнитивни услови који чине схватање могућим. Зато морамо поставити два питања:

1. Како когнитивни системи омогућавају приступ математичким објектима, и како извршавају вишеструке трансформације у представљању математичких процеса?

Обично се претпоставља да је начин размишљања исти у различитим подручјима знања, иако је математичко знање више апстрактно, чак иако се одређени језик или кодирања користе у математици. Дувал сматра да све зависи од приступа ученичке концепције на когнитивни приступ, зато поставља сљедеће питање:

2. Да ли је начин размишљања исти у математици као и у другим областима знања? Другим ријечима, да ли математичке активности захтијевају заједничке когнитивне процесе, или врло сприцифичне когнитивне структуре, о којима се мора водити рачуна у настави?

Ово питање о учењу математике је веома значајно, јер циљ математике није дати ученицима алате, већ допринијети општем развоју, анализи и визуелизацији. У сваком случају потребно је узети у обзир семиотичке репрезентације на нивоу структуре ума, а не само у погледу епистемиолошких услова за добијање приступа објектима знања (Duval, 1995a). Чини се да опозиција између менталне и семиотичке репрезентације више није релевантна, јер почива на конфузији између феноменолошког начина производње и врсте система мобилисаног за производњу било каквог представљања (Duval, 2000). Наглашавамо да је семиотичка репрезентација најважнија за било коју математичку активност, па и за активности у области геометријског мишљења.

2.3.2. Семиотичка репрезентација

Семиотички[2] прилази у дидактици геометрије постоје већ дуго времена. Широко посматрајући, семиотички прилази могли би дати богат поглед на разне особине објеката који се употребљавају у геометрији, и они могу бити виђени као подршка изграђивању знања, описивању објеката али и самој перцепцији. Наиме, фигура у геометрији било да је дводимензионална или тродимензионална може бити представљена на разне начине, тако да можемо разликовати три групе семиотичких репрезентација:

• материјална репрезентација (представљање) фигуре (фигура изграђена од папира, пластелина, картона итд.),
• нацртна репрезентација (слика, цртеж на папиру, али и на рачунару, геометријски софтвер),
• дискурзивна (говорна) репрезентацијаописујемо фигуру помоћу природног и формалног језика заједно.

Француски психолог Рајмонд Дувал највише се бавио регистрима семиотичких репрезентација и когнитивних процеса. Семиотичка репрезентација је производ који је направљен тако да користи обиљежја која припадају систему репрезентација при чему има властита ограничења разумијевања и функционисања (Duval, 1995). Саме семиотичке репрезентације су неопходне у настави геометрије, с обзиром да се неки геометријски објекти не могу директно уочавати, него се морају представљати.

Дувал прилази геометрији са когнитивне и перцептуалне тачке гледишта, он обједињује аналитички извор у облику детаљног рада за анализирање семиотике геометријског цртежа. У овом раду он истиче четири типа такозваних "когнитивних разумијевања". То су:

• перцептуално разумијевање: односи се шта ученик препозна на први поглед, нпр. препознавање форми објеката који су релевантни за конструкцију геометријских фигура,
• секвенцијално разумијевање: ова врста "когнитивног разумијевања" употријебљена је када се конструише форма или када се описује њена конструкција. У овом случају, фигуралне јединице не зависе од перцепције него од математичких и техничких инстумената (троугао, лењир, шестар или компјутерски софтвер),
• дискурзивно(говорно) разумијевање: перцептуално разумијевање од кориштења говора из разлога што математичка својства представљена на цртежу не могу бити одређена једино кроз перцептуално разумијевање, нека морају бити дата кроз говор,
• оперативно разумијевање: ова врста "когнитивног разумијевања" укључује операције са фигурама, или ментално или физички, које могу дати увид у рјешење проблема.

Семиотичке репрезентације су неопходне у математичким активностима, будући да се математички објекти не могу директно уочавати, и према томе морају се представљати. Семиотичке репрезентације нису само испољавање менталних репрезентација у комуникацији већ имају и нека суштинска својства за когнитивне активности мишљења (Duval, 1998). Он разликује семиосис – сажимање или производња менталних репрезентација, од поесис – концептуално сажимање неког објекта што одржава њихову неодјељиву битност. У когнитивне активности он наводи три типа активности:

• формирање репрезентација, које могу бити идентификоване као садржај датих регистара,
• процесуирање и трансформација репрезентација унутар регистара у којима су креиране,
• конверзија, односно трансформација семиотичких репрезентација из једног регистра у други.

2.3.3. Визуелизација, конструкција, резоновање

Дувал истиче да увијек постоји могући сукоб између перцептуалног разумијевања фигуре и математичке перцепције, потешкоће у помјерању са перцептивних чињеница фигуре могу збунити ученике са математичким својствима и објектима представљеним на цртежу, те могу ометати разумијевање потребе за проналажењем доказа. Према мишљењу Дувала, оперативно разумијевање не функционише самостално од других, он истиче да дискурзивно и перцептуално разумијевање могу да веома често "прикрију" оперативно разумијевање. Све ово се односи на геометријске цртеже.

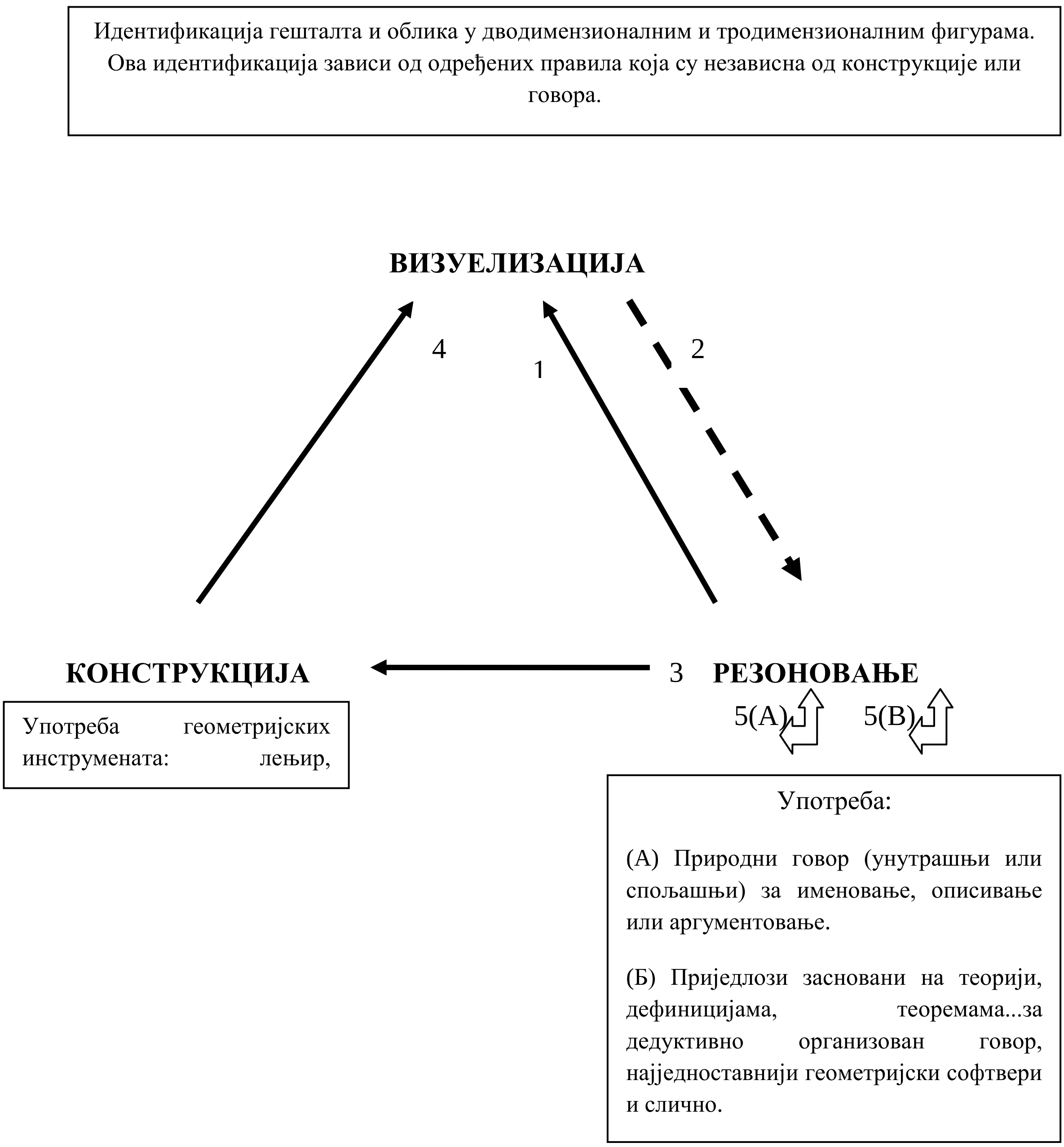
[2] Semiotika (grč. semeiotikos: koji se obazire na znakove) jeste teorija o znakovima i simbolima, odnosno poučavanju načina na koji funkcionišu znakovni sistemi. Upotrebom znakova, upućuje se, navodi na nešto drugo. Posebno se bavi znakovima, odnosima između logike i jezika, međuodnosima raznih znakova i odnosima između znakova, te njihovim značenjskim sadržajima. Semiotika zahtijeva poznavanje različitih lingvističkih, filozofskih i logičkih sistema.

Дувал иде даље у анализу геометријског резоновања и укључује три врсте когнитивних процеса који су испуњени посебним епистемиолошким функцијама. Ови когнитивни процеси су:

- Процес визуелизације (на примјер, визуелна репрезентација геометријских исказа, или хеуристичко исказивање сложених геометријских ситуација),
- Процес конструкције (употреба геометријских инструмената),
- Процес резоновања (нарочито дискурзивни процесс за ширење знања, за објашњавање, доказивање и друго).

Дувал, истиче да различити процеси могу бити одвојени. На примјер, визуелизација није неопходна за конструкцију, према томе, чак иако конструкција води ка визуелизацији, процесс конструкције ипак зависи једино од везе између релевантних математичких својстава и ограничења инструмената који се употребљавају. Дакле, чак иако визуелизација помаже у проналажењу доказа, у неким случајевима она може водити и до забуне. Међутим, Дувал наводи да су ове три врсте когнитивних процеса блиско повезане и њихова синергија је когнитивно неопходна за спретност и знање у геометрији.

На слици 1. приказано је како Дувал илуструје везу између ове три врсте когнитивних процеса.



Слика 5. Основна когнитивна интеракција која је укључена у геометријску активност.

(Преузето из Keith Jones, 1998: Providing a foundation for deductive reasoning)

На слици 1. свака стрелица представља пут једне врсте когнитивног процеса који може да подржи другу врсту у било којој геометријској активности. Као што се види на слици Дувал је приказао двије узајамне стрелице (једна испрекидана) између визуелизације, резоновања, оно о чему смо говорили о тексту изнад, што значи да визуелизација не помаже увијек резоновању (зато је испрекидана). Стрелице 5(А) и 5(Б) илуструју да се резоновање може развити на начин који је независан од процеса конструкције или процеса визуелизације.

Приказана слика представља синергију ове три врсте когнитивних процеса, који су према мишљењу Дувала когнитивно неопходне за спретност и знање у геометрији, и представљене су, према мишљењу Дувала, како ученик у школи види везу између ове три врсте когнитивних процеса. Дувалова даља истраживања у покушају да се разумије развој геометријског резоновања истиче сљедеце:

- Све три врсте когнитивног процеса морају бити развијене одвојено.
- Рад на диференцијацији процеса визуелизације и различитим процесима резоновања је неопходан у наставном плану и програму.
- Координација сва три ова процеса једино се јавља послија рада диференцијацијама.

3. ГЕОМЕТРИЈСКИ САДРЖАЈИ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ НИЖИХ РАЗРЕДА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ У НАС

Када се говори о усвајању геометријских садржаја у нижим разредима основне школе, мисли се прије свега о усвајању геометријских појмова: линија (криву, равну, отворену, затворену, изломљену), права, дуж, полуправа, раван, као и троугао, угао, правоугаоник, квадрат, квадар, коцка, кружница, круг. Историјски гледано кроз наставу математике у нашим школама геометријских садржајима се посвећивало мало пажње, сами наставници нису били сигурни у којој мјери постоји потреба и важност за усвајањем геометријских садржаја. То је оставило посљедице и на данашње схватање геометрије, али примјећујемо да су савремени математички курикулуми почели истицати њену важност.

Геометрија може осигурати потпуније разумијевање свијета. Геометрија се може пронаћи у структури сунчаног састава, у геолошким формацијама, у стијенама и кристалима, у биљкама и цвијећу, чак и у животињама. Такође, већи дио нашег окружења (умјетност, архитектура и све што људи креирају) има елементе геометријске форме. Ученички рад на геометријским садржајима, нарочито ако им се приступа проблемски и истраживачки, може ученицима помоћи у развијању логичког закључивања и рјешавању неких алгебарских и аритметичких проблема. Геометрија игра кључну улогу у учењу других подручја математике. На примјер, концепти разломака повезани су с геометријом, омјер и размјери директно су повезани с геометријским концептима сличности и, наравно, мјерења.

Када се погледа важећи Наставни план и програм у Републици Српској видимо да настави математике припада 180 часова годишње, од тога примјећујемо да само мали број часова припада садржајима из геометрије. Колико часова настави геометрије припада, какви се садржаји реализују, какви су исходи биће приказано по разредима у сљедећим поглављима.

3.1. Геометријски садржаји у другом разреду

Наставним планом и програмом основношколског образовања у Републици Српској за математику у другом разреду предвиђено је 180 часова на годишњем нивоу, тј. 5 часова недјељно. Овај наставни план и програм је приказан у виду табеле, а у њој се налази сљедеће: наставне теме(наставне јединице), број часова, очекивани исходи и смјернице за наставнике. Што се тиче очекиваних исхода, ту се налази све оно чиме ученик треба да овлада током пређених наставних садржаја који су предвиђени за овај разред.

Наставне теме које су предвиђене НПП за 2. разред основношколског образовања, у којима су заступљени геометријски садржаји су:

Предмети у простору и односи међу њима (10 часова);
Линија и област (10 часова);
Класификација предмета према својствима (8 часова);

Већ овдје запажамо да је од најранијег узраста геометријским садржајима посвећено мало времена, свега 28 часова од укупног годишњег фонда часова. Наставне јединице које се изучавају у оквиру ових тема биће представљене Табелом 3.

ПРЕДМЕТИ У ПРОСТОРУ И ОДНОСИ МЕЂУ ЊИМА	**ЛИНИЈА И ОБЛАСТ**	**КЛАСИФИКАЦИЈА ПРЕДМЕТА ПРЕМА СВОЈСТВИМА**
● Класификације и усавршавање способности перцепције простора ● Предмети и бића Предмети облика лопте, ваљка и купе Предмети облика квадра и коцке ● Криве и равне Површи ● Правоугаоник, квадрат, троугао и круг ● Положај предмета (поред, изнад, испод, иза, лијево, десно, између итд.) ● Смјерови кретања	● Криво и право: криве и праве линије ● Отворене и затворене линије ● Унутрашњост и Спољашњост ● Унутар, изван и на, поред, иза, испод, изнад, у, ● Тачке. Спајање тачака линијама ● Дуж као дио праве линије	● Предмети истих и различитих облика и боја ● Упоређивање по величини и висини ● Упоређивање предмета по дужини, ширини и дебљини ● Упоређивање предмета према двјема особинама

Табела 3.

Очекивани исходи у оквиру наставне теме *Предмети у простору и односи међу њима* су дефинисани тако да се очекује да ће ученик бити способан да:

- уочава, именује и разликује боју и облик рогљастих и облих геометријских тијела,
- уочава равне и неравне површи на геометријским тијелима, објектима из непосредне околине,
- уочава положај предмета у односу на друге предмете,
- графички приказује смјерове кретања помоћу стрелица.

Наставна тема *Линија и област* има сљедеће исходе, ученик ће бити способан да:

- уочава и разликује линије као ивице облих и рогљастих тијела,
- графички приказује отворени и затворени простор отвореном и затвореном линијом,
- црта линије кредом у боји, црта праве помоћу лењира,
- објасни појам унутрашње и спољашње области, одреди и прикаже положаје: је у..., је ван..., је на ... у непосредној околини, на и сл., у уџбенику, самосталним цртежима и др.
- дефинише тачку као пресјек линија и њено графичко приказивање малим кружићем,
- уочи и схвати да се свакедвије различите тачке могу спојити различитим кривим линијама и само једном правом линијом,
- дефинише дуж као најкраће растојање између двије тачке и као дио праве линије.

И у оквиру треће наставне теме ученик ће бити способан да:

- уочи и издвоји предмете сазаједничким својством (боја, облик, величина),
- уочи и разврста објекте према двјема особинама,

- упоредити дужи на терену од ока,
- усвоји појмове: велико, веће, највеће, мало, мање, најмање, високо, више, највише, ниско, ниже, најниже, дебело, дебље, танко, тање, кратко, краће, дуго, дуже...

Примјећујемо да су исходи бројни а да је мали број часова да се они остваре, примјећујемо и поједине термине који ученици тог узраста још увијек нису усвојили, тако да је у овој ситуацији задатак учитеља изузетно тежак, а као помоћ наставницима наведене су сљедеће смјернице: упознати предзнања ученика из првог разреда о облицима, тијелима и бојама; омогућити игре у којима се одређују разни положаји предмета; на отвореном простору, у школском дворишту или игралишту, након посматрања примјера у окружењу, ближе одредити појмове: линија, област, тачка и дуж.

3.2. Геометријски садржаји у трећем разреду

Наставним планом и програмом за трећи разред, од укупног фонда часова, за садржаје из геометрије предвиђено је 11 часова, што је нешто мало више од 6% од укупног броја часова. Сложићемо се да је овај број часова изузетно мали. Ти геометријски садржаји се усвајају у оквиру једне наставне теме, а то је *Геометријске фигуре* са сљедећим наставним јединицама:

- Криве и праве линије. Дуж.
- Изломљена линија. Отворене изломљене линије. Затворене изломљене линије.
- Угао. Многоугао.

Треба напоменути да циљеви наставе уопште нису написани за овај разред што се тиче наставе математике, а очекивани исходи, односно шта се очекује од ученика су сљедећи: ученик ће бити способан да уочи и стекне одређене предности у цртању праве и дужи, као и разних кривих и изломљених линија, уочи и црта правоугаоник и квадрат на квадратној мрежи, развије моторичке спретности за употребу лењира. Без наведених циљева, са поприлично уопштеним исходима примјећујемо много нелогичности у овиру ове наставне теме. Што се тиче самих геометријских садржаја у оквиру ове теме, биће ријечи у наставку.

Појам дужи се уводи на интуитивном нивоу, у наставу математике у другом разреду деветогодишње основне школе, док се, као сегмент праве, обрађује у математици старијих разреда**.** У уџбенику математике за трећи разред основне школе, аутора Душана Липовца, јасно стоји да је дуж дио праве између двије тачке на тој линији. Тако да појмови који претходе самом појму дужи јесу: линија (у овом случају права), затим тачке (мислимо на граничне тачке) на линији и релација "између". Методолошки гледано овакво дефинисање појма дужи има много пропуста, нарочито са релацијом "између". Да би ове пропусте образложили истаћи ћемо поступак детерминисања дужи на аналитичком нивоу односно на нивоу "1" према Ван Хејловој класификацији.

Претпоставимо да нам је дата права *p*. Права је једнозначно одређена са двије различите тачке на њој. Вриједи и обрнуто: двије различите тачке једнозначно одређују једну праву. Дакле, тачке и праве су повезане и на правој има онолико тачака колико год нам је потребно. Тачке на правој *p* су размјештене у неком међусобном поретку тако да посматрајући тачке на тој правој слијева на десно говоримо да је тачка *A* испред тачке *B* ако посматрајући праву прво дођемо до тачке *A* а потом до тачке *B*. Дакле, прихватамо да се тачке на правој *p* налазе у неком међусобном поретку који називано ‟*испред*‟. Даље, за тачку *X* те праве кажемо да је *између* тачака *A* и *B* ако је тачка *A* испред тачке *X*, а ова испред тачке *B*. Овај поступак нам омогућава да избјегнемо математичко-методолошке проблем са тернарном релацијом ‟између‟ уводећи бинарну релацију "испред". Уведеном бинарном релацијом „испред" много једноставније описујемо појам граничне тачке. Праву одређену тачкама *A* и *B* записујемо са *p*(*A*,*B*). У овом окружењу појам дужи може се увести на сљедећи начин: Нека су дате тачке *A* и *B*. Оне једнозначно одређују једну праву. Све тачке на тој правој између тачака *A* и *B*, укључујући и те двије тачке, чине дуж *AB*. Тачка *A* је почетна тачка дужи а тачка *B* је заврштна тачка дужи *AB*. Као што се види, интуитивни појмови који претходе појму дужи су: права, тачка и релација испред на правој. Појам између иако је кориштен у овој тзв. скоро-дефиницији дужи није основни појам већ изведени. Термин испред, и појам покривен тим термином, омогућавају да без методолошких проблема математички доста коректно разумијемо појмове рубних тачака- почетна тачка/ завршна тачка. Тачка *A* је *почетна тачка* дужи *AB* јер се налази испред свих других тачака те дужи. Аналогно се уводи појам завршна тачка.

Појам праве се уводи на часовима математике у трећем разреду основне школе, такође на интуитивном нивоу и то тако што праву линију краће називамо права, гдје је очигледно да се појам праве и појам равне линије поистовјећују. Тако да и ова дефиниција слично појму дужи има недостатке с обзир да је линија ограничена, а права сама по себи је неограничена. Затим се врши поређење појма праве са појмом дужи, гдје се знања о појму дужи из другог разреда проширују, а дуж се схвата као дио праве „између“ двије истакнуте тачке које чине крајеве дужи. Ученици уче како се обиљежава права, а како дуж. У трећем разреду знања о правоугаонику и квадрату се проширују, најприје се учи лекција “Угао и многоугао“, а послије ће се обрађују правоугаоник и квадрат (тјемена и странице). Након тога ученици уче да цртају правоугаоник и квадрат.

3.3. Геометријски садржаји у четвртом разреду

У овом разреду геометријски садржаји се проучавају у оквиру једне наставне теме *Геометријске фигуре и њихови међусобни односи*, и за то је предвиђено 38 часова. Примјећујемо да се у овом разреду број часова предвиђен за реализацију геометријских садржаја повећао. Наведена наставна тема садржи три подтеме са наставним јединицама, што ће бити представљено Табелом 4.

ГЕОМЕТРИЈСКЕ ФИГУРЕ И ЊИХОВИ МЕЂУСОБНИ ОДНОСИ			
ТАЧКА, ПОЛУПРАВА, ПРАВА И РАВАН	**КРУГ**	**УГАО**	**ПРАВОУГАОНИК И КВАДРАТ**
●Раван ● Полуправа, права ● Међусобни односи двије праве и једне равни ● Цртање паралелних права ● Нормалне праве ● Цртање нормалних права	● Круг и кружница ● Цртање круга и кружнице ● Примјена шестара при упоређивању дужи	● Угао, настанак угла ● Прави угао, цртање правог угла ● Обиљежавање и цртање углова ● Врсте углова	● Правоугаоник и квадратуочавање ● Прави угао и четвероуглови ● Правоугаоник и квадрат (тјемена и странице) ● Цртање правоугаоника и квадрата у квадратној мрежи ● Цртање правоугаоника и квадрата троугаоником и лењиром

Табела 4.

Што се тиче очекиваних исхода навешћемо неколико, а примјећујемо да има свега неколико наведених очекиваних исхода, што је несхватљиво имајући у виду оволико наставних јединица. Неки од исхода су: ученик ће формирати представе о тачки, прави, полуправи, уочиће и цртаће нормалне праве, користиће лењир и шестар, моћи ће да црта круг и кружницу по задатим мјерама. Што се тиче пропуста у самом садржају навешћемо неколико примјера.

У уџбенику за четврти разред аутора Душана Липовца на страни 83. јасно стоји да ако четвороугао има сва четири угла права назива се правоугаоник, те да правоугаоник који има све странице једнаке зове се квадрат. Када се мало боље загледамо у ове дефиниције опет долазимо до сличних грешки као са појмовима праве и дужи. Најприје прва дефиниција која тврди да је правоугаоник четвороугао који има четири права угла остаје недоречена. Поставља се питање зар и квадрат није четвороугао који има четири права угла. Дакле, та дефиниција остаје непотпуна, те је неопходно додати на дату дефиницију и по два пара једнаких страница. На основу овога доведена је и друга дефиниција у питање тј. дефиниција у уџбенику о квадрату. У четвртом разреду ученици се и детаљније упознају са појмом троугла (троугао се не спомиње у трећем разреду), а уводи се и појам круга. Ученици се упознају са појмом круга и кружнице помоћу ваљка, уче да је полупречник или радијус растојање ма које тачке кружнице од њеног центра. Кружница се дефинише као крива линија чије су тачке једнако удаљене од центра (сталне тачке), а круг као дио равни ограничен кружницом подразумјевајући и саму кружницу.

3.4. Геометријски садржаји у петом разреду

У овом разреду ученици усвајају геометријске садржаје у оквиру једне теме која се назива *Геометријске фигуре*, за шта су предвиђена 32 часа. Сам назив теме је неодговарајући, јер ако се погледа садржаја наставних јединица видјећемо да се у овом разреду ученици први пут сусрећу са појмом геометријско тијело и с тим у вези упознају квадар и коцку, односно израчунавање површине и запремине тих геометријских тијела. Дата тема се реализује у оквиру три подтеме са наставним јединицама, што ће бити представљено Табелом 5.

ГЕОМЕТРИЈСКЕ ФИГУРЕ		
ПОВРШИНА КВАДРАТА И ПРАВОУГАОНИКА	**КВАДАР, КОЦКА И ЊИХОВА ПОВРШИНА**	**ЗАПРЕМИНА КВАДРА И КОЦКЕ**
● Израчунавање површине Правоуоганика ● Израчунавање површине квадрата ● Површина правоугаоника и квадрата, примјена у задацима	● Рогљаста и обла геометријска тијела ● Својства квадра и коцке ● Мрежа површи квадра и коцке ● Израчунавање површине квадра ● Израчунавање површине коцке ● Површина квадра и коцке примјена у задацима	● Израчунавање запремине квадра ● Израчунавање запремине коцке ● Запремина квадра и коцке примјена у једноставним задацима

Табела 5.

Видимо да у петом разреду немамо садржаје који се односе на троугао, праву, раван, попуправу, дуж, раван. Очекивани исходи у оквиру ове наставне теме су сљедећи:

- ученик ће бити способан да израчуна површину из страница и страницу из површине и друге странице,
- ученик ће рјешавати једноставније текстуалне задатке и примијенити знања о јединицама за површину,
- знаће да уочи, именује, дефинише, црта и израчуна површи квадра и коцке,
- примијениће стечена знања у конкретним примјерима,
- знаће да дефинише појам запремине и да рјешава једноставније задатке у вези са запремином.

4. АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА ЕКСТЕРНОГ ТЕСТИРАЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ПЕТОГ РАЗРЕДА О.Ш:

Екстерно вредновање постигнућа ученика петог разреда из математике проведено је на узорку од 45 школеу Републици Српској, у 2015/2016 школској години, са укупно 2884 ученика. Провјера постигнућа је вршена из пет наставних тема:

1. Множење и дијељење природних бројева;
2. Математички изрази са више операција;
3. Природни бројеви;

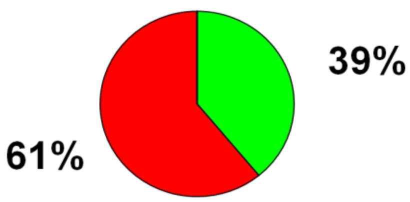
4. Јединице за мјеру;
5. Квадар и коцка

За сваку наставну тему су дата по три задатка на три нивоа тежине (*нивои тежине су преузети из Радне свеске за математику, за пети разред*)

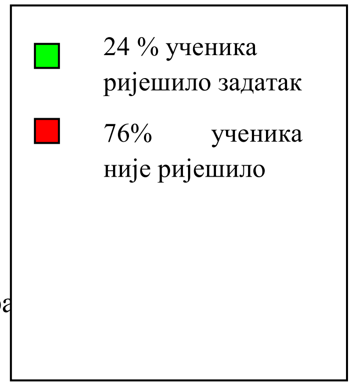
1. први (најлакши) ниво;
2. други (тежи) ниво и
3. трећи (најтежи) ниво

Ученици су показали најбоље знање о природним бројевима 75%, а најслабије знање показали у наставној теми *Квадар и коцка* 37%, резултати рјешености задатака из наведене теме по задацима биће представљени.

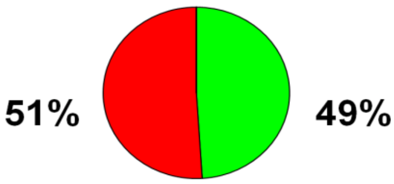
Квадар и коцка ПРВИ НИВО
Страница коцке је 40 cm. Колика је површина?

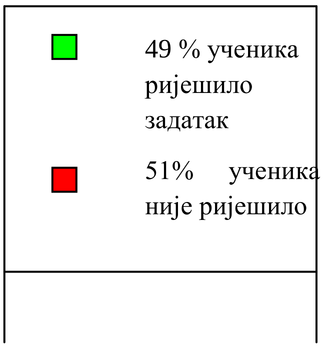


Квадар и коцка Д
14. Учионица је у ине 3
Израчунај површ



Квадар и коцка Т
Упореди површи n, а стра cm.
Заокружи тачан с
а) иста је површина квадра и коцке,
б) квадар има већу површину,
в) коцка има већу површину.





Слика 8.

Резултати јасно показују да су ученици највише проблема имали рјешавајући задатке са геометријским садржајима.

Да је проблем у усвајању геометријских садржаја присутан у нашим школама, показује нам још једно истраживање(Марковић, 2013). Наведени аутор је испитивао ученике од 2. до 4. разреда путем интерјуа, о различитим геометријским појмовима. Резултати до којих је дошао такође потврђују чињеницу да ученици имају проблем са дефинисањем и препознавањем основних геометријских појмова, као на примјер права, круг, кружница, правоугаоник. Узрока за тако нешто има више, од лоше конципираног Наставног плана и програма, лошег начина представљања геометријских садржаја у уџбеницима, лошег знања наставника о наведеним садржајима, до тога да већина наставника не мисли да ученици имају проблем са геометријским садржајима. Узрока је доста, али оно што желимо навести су неке од препорука наставницима, како би настава геометрије била што успјешнија.

4.1. Препоруке наставницима у вези са геометријским садржајима

Наставницима се препоручује да глобалним, а нарочито оперативним планирањем посебну пажњу посвете наставним темама у којима су ученици показали већи степен неразумијевања садржаја и несигурности у изради задатака (нпр. *Квадар и коцка, Јединице за мјеру);*

Наставницима се нарочито препоручује да у оперативном планирању и припремању за наставу, посебну пажњу посвете методичкој организацији која ће најефикасније допринијети оспособљавање ученика за рјешавање сложенијих математичких задатака (трећи ниво), односно, у стицању знања и вјештина у математичком мишљењу што подразумјева, анализу, синтезу и примјену знања.

Више пажње посветити дефинисању геометријских објеката, више примјењивати тродимензионалне моделе, те наставу геометрије подићи на један виши ниво.

Наставницима се препоручује да у процесу праћења, вредновања и оцјењивања ученика користе различите методе, технике и инструменте. Нарочито се указује на потребу за навикавањем ученика на провјеравање знања задацима објективног типа, како би ниво објективности оцјењивања био што виши, а тиме и оцјена постала поузданија информација и ученицима и наставницима о нивоу остварености исхода учења.

ЗАКЉУЧАК

Геометријска знања су веома сложена, али су неопходна како за ученике, тако и за наставнике математике. Зато и желимо установити које су то потешкоће које имају ученици и наставници, и шта треба да се уради како би се оне превазишле, ради што квалитетнијег образовања из геометрије у основној и средњој школи. Наведене теорије когнитивног развоја о настави геометрије могу пружити добру основу за разумијевање геометријских садржаја. Геометријске парадигме су представљене као основе елементарне геометрије, које могу помоћи наставницима, а самим тим и ученицима. Наведене геометријске парадигме могу бити веома важне јер наставници могу да разумију унапријед проблеме и да пренесу квалитетнија знања ученицима.

Грешке ученика у њиховим геометријским резоновањима често могу бити објашњене на неки начин раздвајањем концептуалног и фигуралног аспекта фигуралних концепата. Фигурални концепти су апстрактни, уопштени, нестварни, чисти, логички детерминисани ентитети, иако они још увијек одражавају манипулативну менталну репрезентацију просторних својстава (попут облика, позиције, метричког изражавања величине). Фигурални концепт одређеног облика је код сваког појединца јединствен и састоји се од менталних слика везаних за формалне дефиниције тог облика (Fishbein, 1993). Сам појам фигурални концепт који нам је представљен тежи да нагласи чињеницу да се бавимо одређеним типом менталних ентитета који нису сводљиви, нити обичним сликама-перцептивно нити изворним концептима. Бавимо се са фигурама чија су својства једино одређена, да ли директно или индиректно, дефиницијом или оквирно у одређеном систему аксиома. У нашој интерпретацији, концептуална контрола требало би да буде унутрашња тако да слика и појам треба да су сједињени у јединствен ментални објекат. У математичком резоновању ми такође јасно примјењујемо дефиниције и теореме да би директним резоновањем провјерили наше претпоставке и закључке. Али обично у процесу математичког тражења идеје ми покушавамо, експериментишемо, примјењујемо аналогију и индуктивне процесе манипулишући не крутим сликама, не примењујући формалне аксиоме, него фигуралне концепте, слике суштински контролисане појмовима. Без појма фигурални концепт, процес рјешавања проблема и тражењу идеја у геометрији не би био задовољавајуће описан, као ни објашњен. Током процеса тражења идеја главну улогу игра наслућивање које је у основи надахнуће и није објашњено логичким ланцем аргумената.

Један од главних разлога зашто је геометрија тешка сама по себи за ученике јесте да се фигурални концепти не развијају са природним развојем. Према томе један од основних задатака математичког образовања у домену геометрије јесте да се стварају типови дидактичких ситуација које би систематски захтијевале стриктну сарадњу ова два аспекта све до њиховог спајања у јединствене менталне објекте.

На основу свега наведеног уочавамо да је настава математике нижих разреда „сиромашна" геометријским садржајима, те да и у наведеним геометријским садржајима има пропуста. Потреба за разумијевањем геометрије у савременом свијету је све већа, те је због тога неопходно посветити се дубљој анализи датих садржаја и у оквиру прописаног годишњег фонда часова повећати број часова за наставу геометрије. У самом наставном плану за сваки разред потребно је конкретније дефинисати исходе учења геометријских садржаја и испланирати наставницима активности које они треба да обаве, али оставити мјеста и за њихову креативност.

Ученички рад на геометријским садржајима, нарочито ако им се приступа проблемски и истраживачки, може ученицима помоћи у развијању логичког закључивања и рјешавању неких алгебарских и аритметичких проблема. Геометрија игра кључну улогу у учењу других подручја математике. Зато осим геометријском, детаљну анализу треба пружити и развоју аритметичког и алгебарског мишљења.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Antonini, S. & Mariotti, M.A. (2008). Indirect proof: what is specific to this way of proving. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, **40**(3), 401-412.

[2] Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In R. Lesh and M. Landau (Eds.) *Acquisition Of Mathematics Concepts And Processes*, (pp. 175-203), New York: Academic press.

[3] Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A Grouws, (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 420-464) , New York: Macmillan.

[4] Cooper, A. M. & Baturo, A. (1999). Equals, operations and variables. *Proceedings of 24thconference of the mathematics Education Research group of Australasia (MERGA*), 177-184.

[5] Hitt, F. (2002). *Representations and Mathematics Visualization.* North American Chapter of IGPME. Mexico: Cinvestav-IPN.

[6] Jones, K. (1998). Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1&2), 29-34.

[7] Куртума, Ј. и Марковић, З. (2013). Компаративна анализа Наставног плана и програма математике за трећи разред. ИМО - *Истраживање математичког образовања,* Вол V, Број 9, 23-42.

[8] Laborde, C. Do the pupils learn and what do they learn in a computer based environment. The case of Cabri-Geometre. Technology in mathematics teaching (TMT 93): A bridge between teaching and learning. In Jaworski, B (Ed.) *Conference proceedings. Computertechnologie im Mathematikunterricht - eine Bruecke zwischen Unterrichten und Lernen*. (p p. 39-52). Birmingham Univ. UK, ISBN: 0-7044-134493

[9] Lehrer, R., Jenkins, M. & Osana, H. (1998). Longitudinal study in children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 137-167). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[10] Lemonidis, C. (1993). Influence of the typical representation on the behaviour of the student. Examples from geometry. *Presentation at the 4o Panhellenic Congress Psychological Research*, HPS, Thessaloniki, May 27-30, 1993

[11] Linchevski, L. (1995). Algbera with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 113-120.

[12] Липовац, Д. (2012). *Математика за други разред основне школе*. Источно Сарајево: Завод за уџбенике и наставна средства.

[13] Липовац, Д. (2012). *Математика за трећи разред основне школе*. Источно Сарајево: Завод за уџбенике и наставна средства.

[14] Липовац, Д. (2012). *Математика за четврти разред основне школе*. Источно Сарајево: Завод за уџбенике и наставна средства.

[15] Липовац, Д. (2012). *Математика за пети разред основне школе*. Источно Сарајево: Завод за уџбенике и наставна средства.

[16] Maier, S. & Benz, C. (2013). Selecting shapes –how to children identify familiar shapes in two different educational settings. *Proceeding of CERME 8, Working group 13.* Turkey: Antalya.

[17] Mariotti, M. A. (1995). Images and Concepts in Geometrical Reasoning. *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education.* Berlin: Springer.

[18] Mariotti M.A. & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics,* 34, 219-24.

[19] Mariotti, M.A. & Antonini, S. (2006). Reasoning in an absurd world: difficulties with proof by contradiction. *Proc. of the 30th PME Conference,* v.2, 65-72. Czech Republic> Prague.

[20] Марковић. З. (2013). Проблеми наставе геометрије приликом усвајања основних геометријских појмова у нижим разредима основне школе.

[21] Наставни план и програм за основну школу, Министарство просвјете и културе Републике Српске

[22] Ohlsson, S. (1993) Abstract schemas. Educational Psychology, 28, 51-66.

[23] Pieron, H. (1957): Vocabulaire de la psihologie, PUF, Paris.

[24] Romano, D. A. (2009). O geometrijskom mišljenju. *Nastava matematike*, LIV (2-3), 1-11.

[25] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of some coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

[26] Shepard, R. N. (1978). Externalization of mental images and the act of creation, in B.S. Randhawa and W. E. Coffman (eds.), Visual Learning, Thinking and Communication. *Academic Press,*pp 133-403. New York.

[27] Shepard, R. N. & Cooper, L. A. (1982). Mental Images and Their Transformations. *MIT Press*. MA: Cambridge.

[28] Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education*. Academic Press 1986. USA: Orlando.

[29] Власновић, Х. (2014). Разумијевање геометријских појмова и развитак геометријског мишљења ученика нижих разреда према Ван Хиелеовој теорији. *Школски вјесник, 63, 37-5.*

[30] Weyl, H. (1995). Topology and abstract algebra as two roads of mathematical comprehension. *Amer. Math.Monthly*, 102(5), 453-460.