

PROFESIONAL PAPER

Analiza funkcije maksimalnog zapreminskog rada sa matematičkog aspekta

Branko Pejović¹ | Mitar Perušić¹ | Duško Kostić¹ | Miladin Gligorić¹

¹Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Tehnološki fakultet Zvornik, Karakaj 34a, Republika Srpska, BiH

Odgovorni autor:

Branko Pejović, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Tehnološki fakultet Zvornik, Karakaj 34a, Republika Srpska, BiH

Email:

b.pejovic@gmail.com

Ključne riječi:

analiza, maksimalni rad, radni dijagram, termodinamički sistem, zapreminski rad.

Izvod

Polazeći od I i II zakona termodinamike, primjenjenog u povratnim procesima, a kod kojih je postignuta ravnoteža pritiska i temperature, u radu je izveden izraz za ukupni maksimalni zapreminski rad zatvorenih sistema. Radi potpunije interpretacije ove problematike za dva karakteristična slučaja, dat je grafički prikaz u p-v dijagramu, gdje se na očigledan način zapaža da se najveći rad širenja sastoji iz izenropskog i izoternog rada kao i rada protiv pritiska okoline. Na bazi izvedenog izraza, koristeći odgovarajuće termodinamičke relacije, izveden je izraz za specifični maksimalni rad koji je pogodan za analizu. Dobijeni izraz je posmatran kao dvodimenzioni problem odnosno kao funkcija dvije promijenive: početni pritisak i početna temperatura kao primarni parametri. Primjenom matematičke analize dokazano je postojanje minimuma posmatrane funkcije, i dato njeno grafičko predstavljanje u prostornom koordinatnom sistemu. Detaljnom matematičkom analizom pokazano je da u opštem slučaju funkcija maksimalnog rada geometrijski predstavlja jednu konkavnu površinu u prostoru. Radi efikasnijeg rješavanja i analize postavljenog problema, složena funkcija maksimalnog rada posmatrana je kao dvije funkcije sa jednom promjenljivom odnosno dvodimenzioni problem sveden je na dva jednodimenziona problema. Pokazano je da i kod jednodimenzionih problema takođe postoji tačka u kojoj je maksimalni rad minimalan a različit od nule. Na kraj rada, date su mogućnosti primjene kompleksne problematike maksimalnog rada a koje se odnose na eksergijsku analizu i optimizaciju termodinamičkih procesa, kao i smjernice za naredna istraživanja problema za slučaj ostalih gasova, poluidealnih gasova i Van der Waals – ovog gasa. Može se tvrditi, da postupak analize termodinamičke funkcije maksimalnog rada, prikazanog u radu, nije uobičajen u literaturi.

1. UVOD

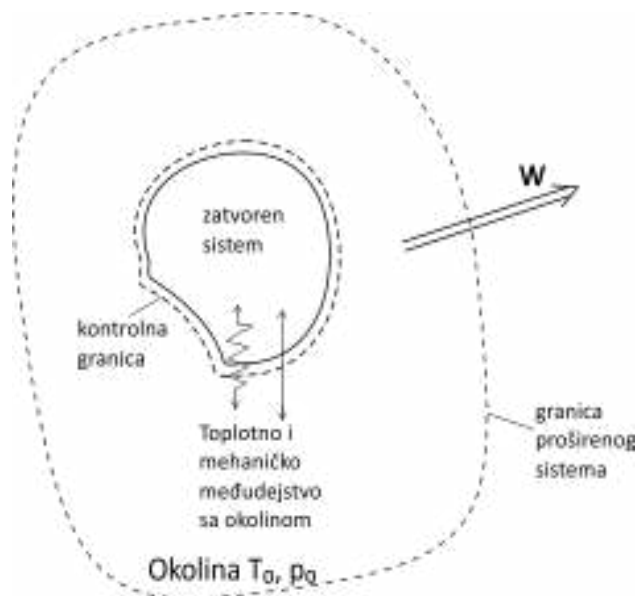
Na Slici 1. može se posmatrati radna materija i okolina, pri čemu one zajednički formiraju prošireni sistem koji je samo u toplotnom smislu izolovan. Dobijeni rad W pri tome može da se koristi izvan takvog sistema. Prenošenje toplote moguće je samo između radne materije i okoline (Kozić, 2007; Baehr, 1973). Uopšte, ukupna promjena entropije

sistema, sastoji se od promjene entropije radne materije $S_1 - S_0$ i promjene entropije okoline Q/T_0 (Baehr, 1973; Black, 1985). Pod pretpostavkom da je smjer u kome se toplota prenosi od okoline prema radnoj materiji s obzirom na II zakon termodinamike biće (Kozić, 2007; Vejnik, 1986; Marić, 1986; Bevehr, 2003):

$$S_0 - S_1 - \frac{Q}{T_0} \geq 0 \quad (1)$$

Za slučaj nepovratnog procesa u relaciji (1) se uvodi porast entropije uslijed nepovratnosti:

$$S_0 - S_1 - \frac{Q}{T_0} - \Delta S_{\text{irrev.}} = 0 \quad (2)$$



Slika 1. Koncept određivanja maksimalnog zapremskog rada radne materije u zatvorenom sistemu.

Prema prvom zakonu termodinamike biće:

$$Q = W + \Delta U = W + (U_0 - U_1) \quad (3)$$

Eliminacijom količine toplote u relaciji (2) prema (3), nakon sređivanja dobija se:

$$T_0 \cdot (S_0 - S_1) - W - (U_0 - U_1) - T_0 \cdot \Delta S_{\text{irrev.}} = 0 \quad (4)$$

Odavde dobijeni rad u opštem obliku biće:

$$W = T_0 \cdot (S_0 - S_1) - (U_0 - U_1) - T_0 \cdot \Delta S_{\text{irrev.}} \quad (5)$$

Maksimalni rad se dobija u slučaju kada su svi procesi koji se obavljaju povratni, tj. $\Delta S_{\text{irrev.}} = 0$, pa iz (5) slijedi da je:

$$W_{\text{max}} = U_1 - U_0 - T_0 \cdot (S_1 - S_0) \quad (6)$$

Ovaj izraz daje maksimalni ali ne i maksimalno korisni rad. Radna materija u toku odvijanja procesa od stanja 1 do stanja 0 mijenja zapreminu od V_1 do V_0 . Usled ove promjene zapremine vrši se rad protiv pritiska okoline u iznosu (Doering, 2010; Fenn, 1996; Michael, 2004; Tribus, 1998):

$$W = p_0 \cdot (V_0 - V_1) \quad (7)$$

Za ovaj iznos neophodno je da se umanjuje izraz (6) za rad W_{max} , s obzirom da rad potiskivanja okoline ne može biti koristan efekat koji bi mogao da se

koristi izvan sistema radna materija-okolina. S obzirom na ovo, prema izrazu (6), biće:

$$W_{\text{max}} = U_1 - U_0 - T_0 \cdot (S_1 - S_0) - p_0 \cdot (V_0 - V_1) \quad (8)$$

odnosno u pogodnijem obliku:

$$W_{\text{max}} = U_1 - U_0 - T_0 \cdot (S_1 - S_0) + p_0 \cdot (V_1 - V_0) \quad (9)$$

što predstavlja eksergiju odnosno maksimalan zapremski rad radne materije u zatvorenom termodinamičkom sistemu. Za bilo koje stanje radne materije definisano veličinom stanja p, T, V biće (Doering, 2010; Karbekar, 1993; Rajput, 2010; Moran et al., 2011):

$$W_{\text{max}} = U - U_0 - T_0 \cdot (S - S_0) + p_0 \cdot (V - V_0) \quad (J) \quad (10)$$

S obzirom na postupak izvođenja, očiglednije je da relacija (10), važi kako za idealan tako i za realan gas.

2. OSNOVNA RELACIJA ZA RIJEŠAVANJE PROBLEMA

Polazeći od definicije promjene entalpije:

$$\Delta H = H_0 - H_1 = (U_0 + p_0 \cdot V_0) - (U_1 + p_1 \cdot V_1) \quad (11)$$

iz (11) dobijamo promjenu unutrašnje energije:

$$U_1 - U_0 = H_1 - H_0 + p_0 \cdot V_0 - p_1 \cdot V_1 \quad (12)$$

Uvrštavanjem relacije (12) u relaciju (9) dobija se:

$$W_{\text{max}} = H_1 - H_0 + p_0 \cdot V_0 - p_1 \cdot V_1 - T_0 \cdot (S_1 - S_0) + p_0 \cdot V_1 - p_0 \cdot V_0 \quad (13)$$

Konačno, iz (13) nakon skraćivanja, dobijamo pogodniji matematički oblik za ukupni maksimalni zapremski rad:

$$W_{\text{max}} = H_1 - H_0 - T_0 \cdot (S_1 - S_0) - V_1 \cdot (p_1 - p_0) \quad (14)$$

Za analizu koja slijedi, umjesto ukupnog maksimalnog zapremskog rada pogodnije je operisati sa specifičnim radom. Kao što je poznato veza između njih je $W_{\text{max}} = m \cdot w_{\text{max}}$. Prema prethodnom ako sistem stoji u ravnoteži sa okolinom, čije je stanje određeno parametrima p_0 i T_0 , moguće je njegovim uravnoteženjem sa okolinom dobiti rad. Maksimalna količina specifičnog rada će se dobiti povratnim uravnoteženjem sistema sa okolinom koji s obzirom na (14) iznosi:

$$w_{\text{max}} = (h_1 - h_0) - T_0 \cdot (s_1 - s_0) - v_1 \cdot (p_1 - p_0) \quad \left[\frac{J}{kg} \right] \quad (15)$$

Zamjenom $\Delta h = h_1 - h_0$, $\Delta s = s_1 - s_0$ i eliminisanjem v_1 preko jednačine stanja dobija se prema (15) pogodan izraz za analizu:

$$w_{\max} = c_p \cdot (T_1 - T_0) - T_0 \cdot c_p \cdot \left(\ln \frac{T_1}{T_0} - \frac{k-1}{k} \cdot \ln \frac{p_1}{p_0} \right) - R \cdot T_1 \cdot \left(1 - \frac{p_0}{p_1} \right) \quad (16)$$

Izraz (16) predstavlja glavnu jednačinu za analizu postavljenog problema.

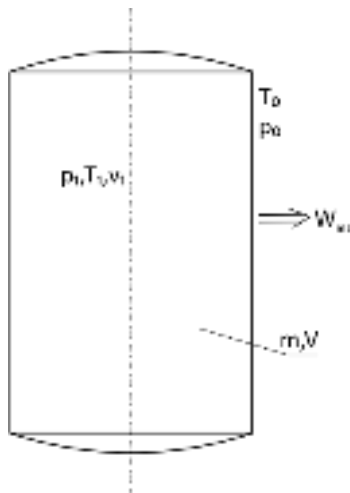
Za nepromjenjene početne uslove p_0 , T_0 i veličine c_p , R i k izraz (16), može se svesti na oblik $w_{\max} = f(p_1, T_1)$:

$$w_{\max} = a \cdot T_1 + b \cdot \frac{T_1}{p_1} + c \cdot \ln T_1 + d \cdot \ln p_1 + e \quad (17)$$

gdje su a, b, c, d i e odgovarajuće konstante.

Veličine sa indeksom 1 kao što je rečeno odnose se na početno stanje a veličine sa indeksom 0 na stanje koje sistem ima u ravnoteži sa okolinom. Ovo je prikazano prema Slici 2. na primjeru rezervoara za gas određene zapremine V u kome se nalazi gas mase m . Pri ovome očigledno važi da je specifična zapremina gasa ([Karbekar, 1993](#); [Rant, 2000](#) ; [Dincer et al., 2013](#)):

$$v_1 = \frac{V_1}{m} = \frac{R \cdot T_1}{p_1} \quad (18)$$



Slika 2. Šematski prikaz rezervoara za vazduh sa aspekta maksimalnog zapreminskog rada

dok se masa gasa može dobiti iz jednačine stanja idealnog gasa odnosno prema definiciji specifične zapremine:

$$m = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} = \frac{V_1}{v_1} \quad (19)$$

Povratno uravnoteženje sistema sa okolinom vrši se u najopštijem slučaju kombinacijom izentropskog i izotermnog procesa ([Karbekar, 1993](#); [Kozić et al., 2007](#); [Borgnakke et al., 2009](#)). Kako povratnost uslovljava razmjenu toplote uz beskonačno malu temperaturnu razliku, potrebno je prethodno izentropskim procesom izjednačiti temperaturu sistema i okoline a zatim izotermiski izjednačiti pritisak ([Marić, 1986](#); [Kozić et al., 2007](#) ; [Cengel et al., 2010](#); [Borgnakke et al., 2009](#)). Pri ovome se smatra da postoji koncentraciona ravnoteža, što je npr. slučaj kada se u rezervoaru nalazi vazduh.

3. GRAFIČKO PREDSTAVLJANJE MAKSIMALNOG ZAPREMINSKOG RADA U P-V DIJAGRAMU

Za grafičko prikazivanje površina ekvivalentnih maksimalnom radu, uzimajući u obzir Sliku 3., zgodno je izraz (15) napisati u obliku:

$$w_{\max} = w_q + w_T - p_0 \cdot (v_0 - v_1) \quad (20)$$

Ovde su w_q i w_T izentropski i izotermiski zapreminski odnosno apsolutni rad.

Na Slici 3. data su dva karakteristična slučaja uravnoteženja sistema sa okolinom gdje je $T_1 > T_0$ i $p_1 > p_0$, u $p-v$ dijagramu.

Maksimalni rad može se izraziti preko površina za slučaj Slika 3. a):

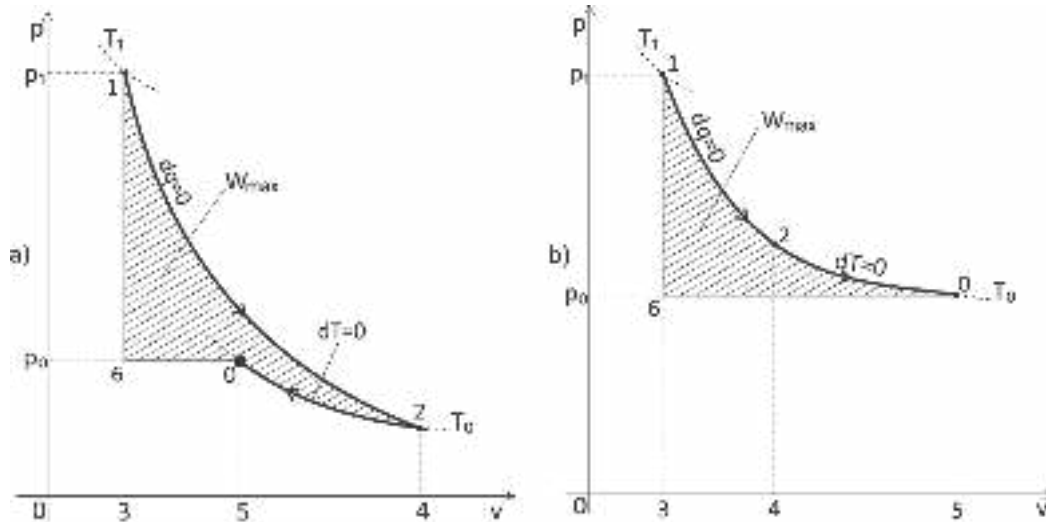
$$w_{\max} = P_{12431} - P_{20542} - P_{60536} \quad (21)$$

a za slučaj Slika 3. b):

$$w_{\max} = P_{12431} + P_{20542} - P_{60536} \quad (22)$$

Pri ovome uzeto je u obzir da su radovi ekspanzije pozitivni a kompresije negativni.

Može se na jednostavan način pokazati da se ranije izvedene relacije za maksimalni rad (15), može dobiti direktno grafičkim postupkom polazeći od relacije (20).



Slika 3. Površina ekvivalentna maksimalnom zapreminskom radu u p-v dijagramu za dva karakteristična slučaja ($T_1 > T_0$; $p_1 > p_0$)

Iz primjera na Slici 3- se vidi da se površina ekvivalentna maksimalnom radu dobije tako da se iz tačke 1 povuče izentropa do presjeka sa izotermom T_0 (tačka 2), zatim se ide izotermom T_0 do tačke 0 i konačno se iz tačke 1 povuče izohora do presjeka sa izobarom iz tačke 0 (tačka 6). Položaj tačke 2 može se odrediti iz jednačina izentropskog procesa 1-2, u $p - T$ dijagramu:

$$p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = p_1 \cdot \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (23)$$

Prilikom konstrukcije dijagrama treba provjeriti položaj tačke 1 u odnosu na tačku 0 upoređivanjem v_1 i v_0 .

Na Slici 3. očigledno, maksimalni zapreminski rad je prikazan šrafiranom površinom 12061, za oba slučaja. Pored ova dva slučaja, mogući su i drugi slučajevi zavisno od odnosa veličina u tački 1 i 0 ([Petrić et al., 2007](#); [Kanoglu et al., 2012](#); [Milora et al., 1976](#)).

Na bazi dijagrama prema Slici 3., moguće je dati prikaz maskimalnog zapreminskog rada i u T -s dijagramu.

4. PRIMJENA MATEMATIČKE ANALIZE NA RIJEŠAVANJE POSMATRANOG PROBLEMA

Parcijalnim diferenciranjem izraza (16) po T_1 odnosno p_1 , smatrajući da su p_0 i T_0 konstantni dobijamo ([Bronštejn, 1998](#); [Demidovič, 2005](#); [Berman, 1995](#)).

$$\frac{\partial w}{\partial T_1} = c_p - T_0 \cdot \frac{c_p}{T_1} - R \cdot \left(1 - \frac{p_0}{p_1}\right) \quad (24)$$

$$\frac{\partial w}{\partial p_1} = -T_0 \cdot c_p \cdot \left(-\frac{k-1}{k}\right) \cdot \frac{1}{p_1} - R \cdot T_1 \cdot p_0 \cdot p_1^{-2} \quad (25)$$

S obzirom da je u pitanju dvodimenzioni problem oblika $w = f(T_1, p_1)$, to u cilju nalaženja ekstremuma ove funkcije, izraze (24) i (25) izjednačavamo sa nulom ([Allendoerfer, 1983](#); [Ovčinnikov, 1998](#)):

$$c_p - T_0 \cdot \frac{c_p}{T_1} - R \cdot \left(1 - \frac{p_0}{p_1}\right) = 0 \quad (26)$$

$$T_0 \cdot c_p \cdot \left(\frac{k-1}{k}\right) \cdot \frac{1}{p_1} - R \cdot T_1 \cdot p_0 \cdot p_1^{-2} = 0 \quad (27)$$

Rješavanjem sistema (26), (27) po T_1 i p_1 tako što prvo jednačinu (26) riješimo po T_1 :

$$T_1 = \frac{1}{R \cdot p_0} \cdot T_0 \cdot c_p \cdot \frac{k-1}{k} \cdot p_1 \quad (28)$$

i zatim zamjenimo T_1 iz (28) u (27) i biće:

$$c_p - \frac{R \cdot p_0 \cdot k}{p_1 \cdot (k-1)} - R + \frac{R \cdot p_0}{p_1} = 0 \quad (29)$$

Odavde nakon određenih operacija dobijamo da je:

$$p_1 = p_0 \quad (30)$$

Zamjenom rješenja (30) u (26) biće:

$$T_1 = T_0 \quad (31)$$

Pri ovome mora biti zadovoljena i jednačina (27). Prema tome tačka u kojoj je moguć ekstremum posmatrane funkcije maksimalnog rada je ([Bronštejn, 1998](#); [Berman, 1995](#); [Allendoerfer, 1983](#)):

$$M_0(p_0, T_0) \quad (32)$$

Isto tako zapaža se da je funkcija zapreminskog rada definisana za oblast parametara $T_1 > T_{0K}$, $p_1 > 0$.

4.1. Ekstremi funkcije više promjenljivih

Potreban uslov u kojima funkcija dvije promjenljive $f(x, y)$ može dostići ekstremum, nalazi se rješavanjem sistema jednačina ([Bronštejn, 1998](#); [Allendoerfer, 1983](#); [Ovčinnikov, 1998](#)):

$$f'_x(x, y) = 0 \quad f'_y(x, y) = 0 \quad (33)$$

pri čemu je tačka ekstremuma $P(a, b)$. Odavde slijedi da je:

$$f'_x(a, b) = 0 \quad f'_y(a, b) = 0 \quad (34)$$

Za određivanje dovoljnog uslova ekstremuma formiraju se izrazi:

$$f''_{xx}(a, b) = 0 \quad f''_{xy}(a, b) = 0 \quad f''_{yy}(a, b) = 0 \quad (35)$$

kao i diskriminantu:

$$\Delta = A \cdot C - B^2 \quad (36)$$

Ako je $\Delta > 0$, onda funkcija ima ekstremum u tački $P(a, b)$ i to maksimum ako je $A < 0$ ili ($C < 0$) i minimum ako je $A > 0$ odnosno $C > 0$.

Za slučaj $\Delta < 0$ funkcija nema ekstremum u tački $P(a, b)$ a za slučaj $\Delta = 0$ potrebno je dalje ispitivanje funkcije.

4.2. Dokazivanje minimuma funkcije maksimalnog rada

Sređivanjem izraza (24) i (25) prvi parcijalni izvodi biće u konačnom obliku ([Allendoerfer, 1983](#); [Ovčinnikov, 1998](#)):

$$\frac{\partial w}{\partial T_1} = c_p - \frac{T_0 \cdot c_p}{T_1} - R + R \cdot \frac{p_0}{p_1} \quad (37)$$

$$\frac{\partial w}{\partial p_1} = \frac{T_0 \cdot c_p}{p_1} \cdot \frac{k-1}{k} - \frac{R \cdot T_1 \cdot p_0}{p_1^2} \quad (38)$$

Odavde slijede drugi parcijalni izvodi:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial T_1^2} = \frac{T_0 \cdot c_p}{T_1^2} \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial p_1^2} = -T_0 \cdot c_p \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{p_1^2} + 2 \cdot R \cdot T_1 \cdot \frac{p_0}{p_1^3} \quad (40)$$

Mješoviti parcijalni izvod prema (38) biće:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial T_1 \cdot \partial p_1} = \frac{\partial}{\partial T_1} \left(\frac{\partial w}{\partial p_1} \right) = \frac{\partial}{\partial T_1} \left(\frac{T_0 \cdot c_p}{p_1} \cdot \frac{k-1}{k} - \frac{R \cdot T_1 \cdot p_0}{p_1^2} \right) \quad (41)$$

odnosno konačno:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial T_1 \cdot \partial p_1} = -\frac{R \cdot p_0}{p_1^2} \quad (42)$$

Pri ovome važi da je $\frac{\partial}{\partial T_1} \left(\frac{\partial w}{\partial p_1} \right) = \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\frac{\partial w}{\partial T_1} \right)$ ([Bronštejn, 1998](#); [Demidovič, 2005](#)). S obzirom na prethodno stacionarna tačka za pomenuti slučaj je $D_0(p_0, T_0)$. Koeficienti prema (35) biće:

$$\left(\frac{\partial^2 w_{\max}}{\partial T_1^2} \right)_{D_0} = \left(\frac{T_0 \cdot c_p}{T_1^2} \right)_{D_0} = \frac{c_p}{T_0} \quad (43)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w_{\max}}{\partial T_1 \cdot \partial p_1} \right)_{D_0} = \left(-\frac{R \cdot p_0}{p_1^2} \right)_{D_0} = -\frac{R}{p_0} \quad (44)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w_{\max}}{\partial p_1^2} \right)_{D_0} = \left(-T_0 \cdot c_p \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{p_1^2} + 2 \cdot R \cdot T_1 \cdot \frac{p_0}{p_1^3} \right)_{D_0} = \frac{R \cdot T_0}{p_0^2} \quad (45)$$

Iz (43) i (45) slijedi da je:

$$A > 0, C > 0 \quad (46)$$

Za diskriminantu (36) prema (43) i (44) dobijamo $\Delta = A \cdot C - B^2 > 0$ (47)

odnosno:

$$A \cdot C > B^2 \quad (48)$$

Iz (43), (44) i (45) slijedi:

$$\frac{c_p}{T_0} \cdot \frac{R \cdot T_0}{p_0^2} > \left(-\frac{R}{p_0} \right)^2 \quad (49)$$

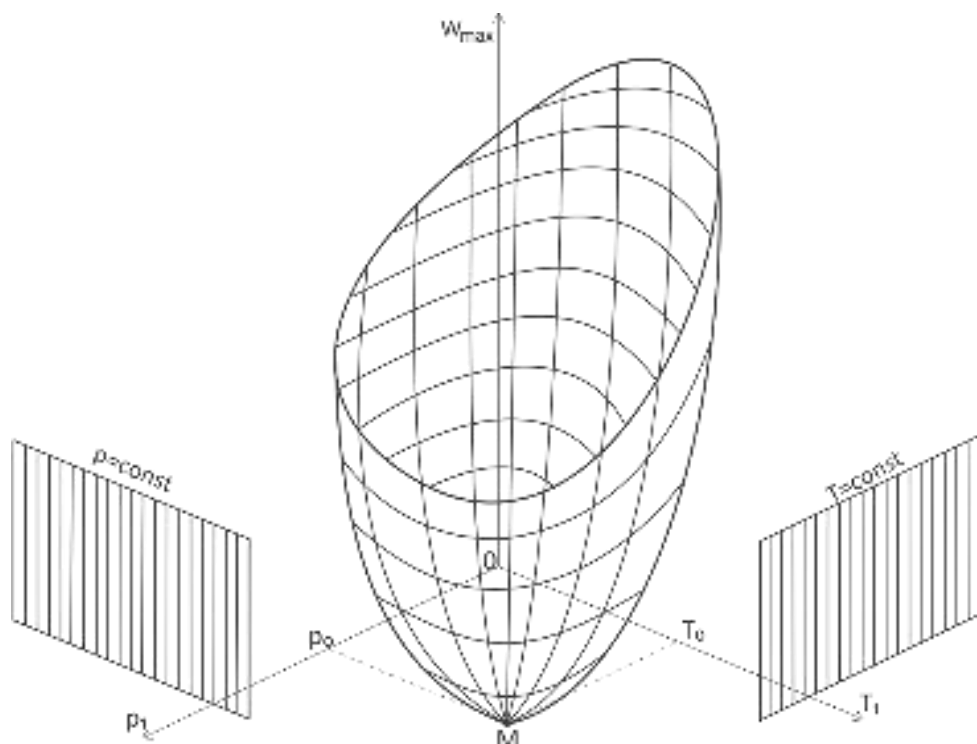
Riješavanjem nejednačine (49) dobija se da je $c_p > R$, što zadovoljava Majerovu jednačinu $R = c_p - c_v$ (Kozić, 2007). Prema tome ovim je dokazano da je zadovoljen i potreban i dovoljan uslov za minimum funkcije $w_{max} = f(T_1, p_1)$. Minimum se nalazi u tački:

$$M_0(p_0, T_0) \quad (50)$$

Za ovu vrijednost, parametara $p_1 = p_0$ i $T_1 = T_0$, minimalna vrijednost funkcije maksimalnog rada prema (16) biće (Bronštejn, 1998; Allendoerfer, 1983):

$$(w_{max})_{min} = 0 \quad (51)$$

Detaljnou analizom funkcije maksimalnog rada, koristeći metodu matematičke analize kao i analizu datu u poglavlju 3, funkcija maksimalnog rada, prikazana je principijelno na Slici 4. zavisnosti od parametara p_1 i T_1 .



Slika 4. Principijelna zavisnost funkcije maksimalnog rada od početnog pritiska i temperature u prostornom koordinatnom sistemu

5. FUNKCIJA MAKSIMALNOG RADA KAO JEDNODIMENZIONNI PROBLEM

Radi preciznije definisanosti funkcije maksimalnog rada (16), istu ćemo svesti na dva jednodimenziona problema (Bronštejn, 1998; Berman, 1995), Ovčinnikov, 1998). U prvom slučaju, smatraćemo da je početni pritisak p_1 konstantan a u drugom slučaju da je početna temperatura T_1 konstantna. Treba zapaziti da se oba ova slučaja mogu javiti u termotehničkoj praksi.

5.1. Slučaj konstantnog početnog pritiska ($p_1 = const.$)

Za ovaj slučaj, odrediće se temperatura za koju je funkcija maksimalnog rada minimalna. Funkciju maksimalnog rada (16),

$$w_{max} = c_p \cdot (T_1 - T_0) - T_0 \cdot c_p \cdot \left(\ln \frac{T_1}{T_0} - \frac{k-1}{k} \cdot \ln \frac{p_1}{p_0} \right) - R \cdot T_1 \cdot \left(1 - \frac{p_0}{p_1} \right) \quad (52)$$

možemo za slučaj da je $p_1 = const.$ posmatrati kao funkciju sa jednom promjenljivom $w_{max} = f(T_1)$ odnosno kao:

$$w_{max} = a \cdot T_1 + b \cdot \ln T_1 + c \quad (53)$$

gdje su a , b i c konstante. Diferenciranjem funkcije (52) po T_1 , dobija se:

$$\frac{\partial w}{\partial T_1} = c_p - \frac{T_0 \cdot c_p}{T_1} - R + R \cdot \frac{p_0}{p_1} \quad (54)$$

Izjednačavanjem prvog izvoda (54) sa nulom biće $\frac{\partial w_{max}}{\partial T_1} = 0$, odnosno:

$$c_p - T_0 \cdot \frac{c_p}{T_1} = R \cdot \left(1 - \frac{p_0}{p_1} \right) \quad (55)$$

Rješavanjem jednačine (55) po temperaturi biće:

$$T_1 = \frac{T_0 \cdot c_p}{c_p - R \cdot \left(1 - \frac{p_0}{p_1}\right)} \quad (56)$$

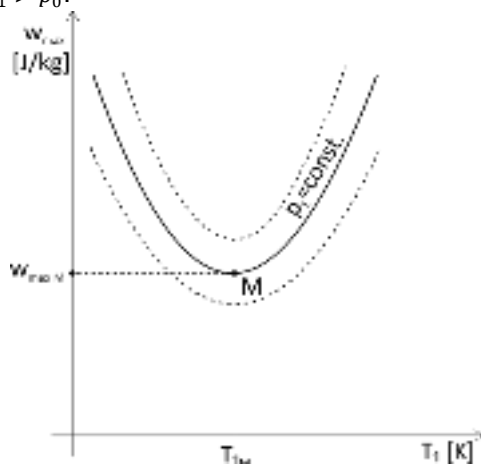
Drugi izvod funkcije prema (54) biće:

$$\frac{\partial^2 w_{\max}}{\partial T_1^2} = \frac{T_0 \cdot c_p}{T_1^2} \quad (57)$$

S obzirom da je $\frac{T_0 c_p}{T_1^2} > 0$ za sve realne vrijednosti T_0 i T_1 , to slijedi da funkcija $w_{\max} = f(T_1)$ ima minimum u tački za temperaturu datu izrazom (56):

$$T_1 = T_{1M} = \frac{T_0 \cdot c_p}{c_p - R \cdot \left(1 - \frac{p_0}{p_1}\right)} \quad (58)$$

Minimalna vrijednost w_{\max} dobija se zamjenom izraza (58) u (52). Na osnovu toga očigledno je da će $(w_{\max})_{\min} > 0$. Na bazi prethodnog, analizom funkcije (52) za različite vrijednosti pritiska p_1 , na Slici 5. prikazana je principijelna zavisnost maksimalnog rada w_{\max} od početne temperature T_1 . Vidi se da je vrijednost maksimalnog zapreminskog rada različita od nule, za sve vrijednosti temperature T_1 . Isto tako, iz (58) slijedi da je $T_{1M} > T_0$ za $p_1 > p_0$.



Slika 5. Principijelna zavisnost funkcije maksimalnog rada w_{\max} od početne temperature T_1 pri $p_1 = \text{const.}$

Treba zapaziti da se za svaki pritisak $p_1 = \text{const.}$ dobija druga kriva u dijagramu $w_{\max} = f(T_1)$.

5.2. Slučaj konstantne početne temperature ($T_1 = \text{const.}$)

Za ovaj slučaj, slično prethodnom, odredićemo pritisak za koji je funkcija maksimalnog rada minimalna. Za slučaj da je temperatura $T_1 = \text{const.}$,

funkciju maksimalnog rada (52) možemo posmatrati kao $w_{\max} = f(p_1)$, odnosno u obliku:

$$w_{\max} = \frac{a}{p_1} + b \cdot \ln p_1 + c \quad (59)$$

gdje su a , b i c konstante. Diferenciranjem (52) po p_1 biće:

$$\frac{\partial w_{\max}}{\partial p_1} = T_0 \cdot c_p \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{p_1} - R \cdot T_1 \cdot p_0 \cdot p_1^{-2} \quad (60)$$

Izjednačavanjem prvog izvoda (60) sa nulom:

$$\frac{\partial w_{\max}}{\partial p_1} = 0 \quad (61)$$

$$T_0 \cdot c_p \cdot \frac{k-1}{k} \cdot p_1 = R \cdot T_1 \cdot p_0 \quad (62)$$

Odavde slijedi da je:

$$p_1 = \frac{R \cdot T_1 \cdot p_0 \cdot k}{T_0 \cdot (k-1) \cdot c_p} \quad (63)$$

Nakon određenih matematičkih operacija koristeći Majerovu jednačinu i definiciju eksponenta izentropije k iz relacije (63) dobijamo da je:

$$p_1 = p_{1M} = \frac{T_1}{T_0} \cdot p_0 \quad (64)$$

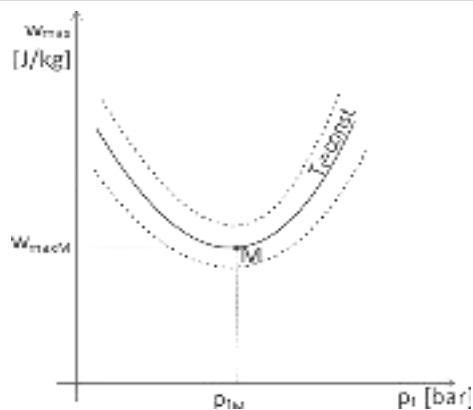
Diferenciranjem prvog izvoda (60) po p_1 biće:

$$\frac{\partial^2 w_{\max}}{\partial p_1^2} = -T_0 \cdot R \cdot \frac{1}{p_1^2} + 2 \cdot R \cdot T_1 \cdot \frac{p_0}{p_1^3} \quad (65)$$

Zamjenom (64) u (65), nakon sređivanja, na jednostavan način dokazuje se da je:

$$\frac{\partial^2 w_{\max}}{\partial p_1^2} > 0 \quad (66)$$

Odavde slijedi da u tački $p_{1M} = \frac{T_1}{T_0} p_0$, funkcija (52) ima minimum. Vrijednost ovog minimuma dobija se zamjenom izraza (64) u izraz (52). Vidi se da je kod ovog slučaja $(w_{\max})_{\min} > 0$. Na Slici 6. prikazana je principijelna zavisnost funkcije maksimalnog rada za različite vrijednosti početne temperature. Vidi se da je minimalna vrijednost zapreminskog rada različita od nule. Važno je napomenuti da iz (64) slijedi da je $p_{1M} > p_0$ za $T_1 > T_0$.



Slika 6. Principijelna zavisnost funkcije maksimalnog rada w_{max} od početnog pritiska p_1 pri $T_1 = const$.

Zapaža se da za svaku temperaturu $T_1 = const$, dobijamo drugu krivu u dijagramu $w_{max} = f(p_1)$.

6. NAREDNA ISTRAŽIVANJA PROBLEMA

6.1. Slučaj drugih idealnih gasova

Kao što je rečeno, dobijeni rezultati za maksimalni zapreminski rad su opšti i važe za bilo kakvu promjenu stanja neke konačne količine materije koja se uravnotežava sa okolinom. U radu je posmatran slučaj vazduha kao idealnog gasa, koji se nalazi u rezervoaru i koji se uravnotežuje sa okolnim vazduhom. Uravnoteženje temperature i pritiska uglavnom ne stvara probleme, dok koncentraciona ravnoteža problem znatno komplikuje. Za slučaj da su u pitanju gasovi azon (N_2) i kiseonik (O_2), kao komponente vazduha, što je čest slučaj u praksi, koncentracija se može izraziti parcijalnim pritiscima u okolini:

$$p_{N_2} = 0,79 \cdot p \quad p_{O_2} = 0,21 \cdot p \quad (67)$$

S obzirom da je zapreminski udio komponente:

$$r_i = \frac{p_i}{p} \quad (68)$$

u izrazu za maksimalni zapreminski rad (15), za ovaj slučaj, umjesto pritiska okoline p_0 , stajace parcijalni pritisci (67). Analiza funkcije w_{max} se izvodi po istom principu kao što je prikazano u radu.

6.2. Slučaj poluidealnih gasova

Kod poluidealnih gasova, uzima se zavisnost specifičnog toplotnog kapaciteta od temperature pri čemu i za njih važi jednačina stanja idealnih gasova:

$$c = c(T) \quad c_v = c_v(T) \quad c_p = c_p(T) \quad (69)$$

Prema tome za ovaj slučaj u izrazu za maksimalni zapreminski rad (15), promjenu entalpije treba odrediti kao:

$$h_1 - h_0 = \int_1^0 c_p(T) \cdot dT \quad (70)$$

Polazeći od opšteg izraza za promjenu entropije.

$$s_1 - s_0 = \int_1^0 c_p \cdot \frac{dT}{T} - R \cdot \int_1^0 \frac{dp}{p} \quad (71)$$

za posmatrani slučaj biće:

$$s_1 - s_0 = \int_1^0 c_p(T) \cdot \frac{dT}{T} - R \cdot \ln \frac{p_0}{p_1} \quad (72)$$

Za oba slučaja mora se poznavati zavisnost $c_p = c_p(T)$, na bazi kojih se vrši integriranje u relacijama (70) i (72). Prema tome i ovde će se analizirati funkcija $w_{max} = f(p_1, T_1)$, pri čemu je zavisnost $w_{max} = f(T_1)$ znatno složeniji od slučaja analiziranog u radu. Problem se pojednostavljuje ukoliko se usvoji linearna zavisnost $c_p = c_p(T)$.

6.3. Slučaj Van der Waals-ovog gasa

Za ovaj slučaj, jednačina stanja je (Baehr, 1973), (Black, 1985; Vejnik, 1986; Karbekar, 1993; Bronštejn, 1998):

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) \cdot (v - b) = R \cdot T \quad (73)$$

Pritisci u karakterističnim tačkama biće prema (73):

$$p_0 = \frac{R \cdot T_0}{v_0 - b} - \frac{a}{v_0^2} \quad (74)$$

$$p_2 = \frac{R \cdot T_0}{v_2 - b} - \frac{a}{v_2^2}$$

dok prema istoj relaciji, temperature u tačkama 1 i 0 biće:

$$T_1 = \left(p_1 + \frac{a}{v_1^2} \right) \cdot \frac{v_1 - b}{R} \quad (75)$$

$$T_0 = \left(p_0 + \frac{a}{v_0^2} \right) \cdot \frac{v_0 - b}{R}$$

Konstante a i b određuju se kao:

$$a = 3 \cdot p_k \cdot v_k^2$$

$$b = \frac{1}{3} \cdot v_k$$
(76)

dok je gasna konstanta:

$$R = \frac{8}{3} \cdot \frac{p_k \cdot v_k}{T_k}$$
(77)

Ovdje su p_k, v_k i T_k veličine u kritičnoj tački i nalaze se u odgovarajućoj literaturi za posmatrani gas. Drugi član u izrazu za maksimalni zapreminski rad može se izraziti kao:

$$-T_0 \cdot (s_1 - s_0) = -T_0 \cdot (s_2 - s_0) = q_{20} = w_{20} = \int_{v_2}^{v_0} p \cdot dv$$
(78)

Zamjenom pritiska p iz (73) u (78) dobija se:

$$-T_0 \cdot (s_1 - s_0) = \int_{v_2}^{v_0} \left(\frac{R \cdot T_0}{v - b} - \frac{a}{v^2} \right) \cdot dv$$
(79)

Integracijom izraza (79) dobija se konačno rješenje za drugi član u jednačini za maksimalni zapreminski rad (15). Pri ovome za ovaj slučaj potrebno je poznavanje promjene zapremine $\Delta v = v_0 - v_2$, odnosno zakona izentropske promjene za Van der Waals-ov gas.

Prvi član jednačine (15) može se napisati kao:

$$h_1 - h_0 = c_p \cdot (T_1 - T_0) = \frac{k \cdot R}{k - 1} \cdot (T_1 - T_0)$$
(80)

Temperatura T_1 u izrazu (80) može se eliminisati preko relacije (75).

Pri ovome se za posmatranu vrstu gasa moraju poznavati gasna konstanta R i eksponent k .

Posljednji član jednačine (15) može se zadržati u izvornom obliku:

$$-v_1 \cdot (p_1 - p_0)$$
(81)

Odavde slijedi da je funkcija maksimalnog zapreminskog rada za slučaj Van der Waals - ovog gasa pogodno analizirati u zavisnosti od parametara p_1 i v_1 tj. $w_{max} = f(p_1, v_1)$. Pri ovome podrazumijeva se da su pritisak p_0 i specifična zapremina v_0 poznati.

7. ZAKLJUČAK

Iz izraza (16), vidi se da je za konstantne parametre okoline p_0 i T_0 , maksimalan rad veličina stanja, što znači da svakom stanju sistema odgovara jedna određena vrijednost maksimalnog rada. Isto tako za njegovo određivanje za ovaj slučaj dovoljno je poznavati početno i krajnje stanje. Analizirana funkcija maksimalnog zapreminskog rada, postupkom matematičke analize, kao što je pokazano postupkom matematičke analize, ima minimum u tački $M(p_0, T_0)$ koji iznosi $w_{minM} = 0$.

Ovo se može i očekivati s obzirom da se gas u toj tački našao u potpunoj ravnoteži sa okolinom kao jedinim toplotnim izvorom. Na taj način prestala je svaka mogućnost dalje promjene stanja koje bi išlo samo od sebe tj. bez utroška rada. Dva analizirana slučaja kao funkcija sa jednom promjenljivom omogućuju jasnije i brže predstavljanje glavne funkcije zapreminskog rada sa dvije promjenljive. Pri ovome dovoljno je u trodimenzionom prostoru posmatrati ravni $p = const.$, odnosno $T = const.$, Slika 5. i Slika 6.

Analizirana funkcija u prostoru predstavlja složenu površinu koja podsjeća na paraboloidnu odnosno hiberboloidnu konkavnu prostornu površinu, sa tačkom minimuma.

Porastom parametara p_1 i T_1 , vrijednost maksimalnog zapreminskog rada može da opada ili da raste što zavisi od svih uticajnih veličina u izrazu. Za slučaj da je $p_1 = const.$, porastom temperature T_1 maksimalan zapreminski rad opada do tačke minimuma a nakon toga raste. Slično je i za slučaj $T_1 = const.$, porastom p_1 maksimalan zapreminski rad opada do tačke minimuma a nakon toga raste. Isto tako, zapaža se u opštem slučaju da je maksimalni rad pozitivna veličina.

Prikazani postupak, kao što je i pokazano u poglavlju 6, može se efikasno primjeniti za različite slučajeve gasova koji se izučavaju u termodinamici. S obzirom da se maksimalan rad koristi u mnogim oblastima tehnike i tehnologije to predmetna analiza može pomoći kod ovih izučavanja, na primjer u oblasti optimizacije i kvalitativne analize procesa. Prikazanu metodologiju moguće je primjeniti i za funkciju maksimalnog tehničkog rada (eksergiju), kod otvorenih termodinamičkih sistema. Takođe, mali je broj termodinamičkih funkcija kod kojih je moguće izvršiti analizu na način koji je dat u radu za slučaj funkcije maksimalnog zapreminskog rada.

Isto tako data funkcija je pogodna i za sastavljanje računarskog programa, što omogućuje njeno efikasnije prikazivanje i analizu.

LITERATURA

- Allendoerfer, C. B. (1983). *Principles of Mathematics*, BKT – New York.
- Baehr, H. D. (1973). *Termodinamik*, Springer – Verlag, Berlin.
- Berman, G. N. (1995). *Matematička analiza*, Naučna knjiga, Beograd.
- Bevehr, H. D. (2003). *Termodinamik*, Springer – Verlag, Berlin.
- Black, W. Z. (1985). *Thermodynamics*, Harper and Row, New York.
- Borgnakke, C., Sonntag, R. E., Wylen, G. J. (2009). *Fundamental thermodynamics*, John Wiley and Sons, New York.
- Bronštejn, I. N. (1998). *Matematički priručnik za inženjere*, Tehnička knjiga, Zagreb.
- Cengel, Y. A., Boles, M. A. (2010). *Thermodynamics*, McGraw Hill Higher Education, New York.
- Christian, W. (1993). *Einführung die technische Thermodynamik*, Leipzig.
- Demidovič, B. P. (2005). *Zadaci iz više matematike*, Naučna knjiga, Beograd.
- Dincer I., Rosen M. A. (2013). *Exergy, Energy, Environment and Sustainable Development*, Elsevier, Oxford.
- Doering, E. (2010). *Grundlagen der Technischen Thermodynamik*, Treubner, Stuttgart.
- Fenn, J. B. (1996). *Energy and Entropy*, W. H. Freeman and Comp. New York.
- Galović A. (2010). *Termodinamika I, IV. izdanje*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb.
- Kanoglu M., Y. A. Cengel, Dincer I. (2012). *Efficiency Evaluation of Energy Systems*, Springer Briefs in Energy, Springer Verlag, New York. doi: [10.1007/978-1-4614-2242-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-2242-6)
- Karbecar, B. V. (1993). *Thermodynamics for Engineers*, Prentice – Hall, Inc., Englewood Cliffs.
- Kotes T. J. (1986). *The exergy Method of Thermal Analysis*, Butterworths, London 1986.
- Kozić, Đ. (2007). *Termodinamika, inženjerski aspekti*, Mašinski fakultet, Beograd.
- Kozić, Đ., Vasiljević, B. Bekavac (2007), *Priručnik za termodinamiku*, Mašinski fakultet, Beograd.
- Marić, M. (1986). *Termodinamika i prenos toplote*, Mašinski fakultet, Mostar.
- Michael, J. M. (2004). *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, Willay, New York.
- Milora S. L., Tester J. W. (1976). *Geothermal energy as a source of electric power*, The MIT Press, New York.
- Moran, M. J., Shapiro, H. N., Boettner, B. B., Bailey, M. B. (2011). *Engineering thermodynamics*, John Wiley and Sons, New York.
- Ovčinnikov, P. F. (1998). *Višaja matematika*, VŠ, Kiev.
- Petrić N., Vojnović I., Martinac V. (2007). *Tehnička termodinamika*, Kemijsko – tehnološki fakultet u Splitu, Split.
- Rajput, R. K. (2010). *Engineering Thermodynamics*, Jones and Bartlett Publishers, London.
- Rant, Z. (2000). *Termodinamika – kurila za uk i prakso*, Univerza v Ljubljani, Ljubljana.
- Tribus, M. (1998). *Termostatika i termodinamika*, Energija, Moskva.
- Vejnik, A. I. (1986). *Tehničeskaja termodinamika – osnovi termoperedači*, Metallurgizdat, Moskva.

Mathematical aspects of analysis of maximal pressure-volume work function

ABSTRACT

The paper presents relation for maximal pressure-volume work for closed systems by using principles of I and II law of thermodynamics, used in reversible processes in which mechanical and thermal balance has been achieved. For full interpretation of this problem for two characteristic cases, graphical review in p-v diagram is given, where in an obvious way is noticed that maximal expansion work is composed of isentropic and isothermal work as well as work against pressure of environment. On basis of derived relation, by using appropriate thermodynamic relations, expression for specific maximal work is obtained which is suitable for the analysis. That expression was observed like two-dimensional problem i.e. as function of two variables: initial pressure and initial temperature as primary parameters. Using mathematical analysis is proven existence of minimum of this function, function as well as its graphical presentation in three-dimensional coordinate system. Detailed mathematical analysis is presented that in general case function of maximal geometric work is one concave area in space. For efficient solving and analysis of this problem, complex function of maximal work is observed as two functions with one variable i.e. from two-dimensional problem we will make two single-dimensional problems. It's proven that in single-dimensional problems also exists point in which maximal work is minimal and different from zero. At the end of the paper, opportunities for usage of this complex issues of maximal work which refer to exergy analysis and optimization of thermodynamic processes, also the guidelines for future research for problems of other gases, half – ideal gases and Van der Waals's gas. It can be claimed that the procedure of analyzing thermodynamic function of maximal work, showed in paper, isn't common in literature.

Keywords: *analysis, maximal pressure-volume work, and thermodynamic system, work-diagram*