MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5228 (o)
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
Vol. XXII (3)(2016), 149-163

IMITACIJA, MANIR I STIL U MATEMATICI

IMITATION, MANNER AND STYLE IN MATHEMATICS

Nenad O. Vesić[1]

Sažetak

Ovaj članak se, delom filozofski delom matematički, nadovezuje na rad [3]. U ovom radu je dato objašnjenje zbog čega je matematika "strašna" i onda je prikazan primer matematičkog razmišljanja u odgovoru na životno pitanje o zdravlju.

Abstract. This article is (partly philosophical work and partly mathematical work), supplements to work [3]. This paper has offered an explanation for what mathematics is "passionate" and is an example of mathematical thinking in response to the vital issue of human health.

2010 *Math. Subj. Classification*: 97E20, 97E99,
2010 *ZDM. Subj. Classification*: C30, D20, D30, D50, F90, M10, M60, M80,

Ključne reči: razmišljanje, nivo, primena, poteškoća

1 Uvod

Pavle Miličić je, u radu [3], prikazao različite poteškoće koje su nastajale, kroz istoriju, uzrokovano pogrešnim shvatanjima matematičkih pojmova. U tom radu prikazano je i objašnjeno, na relativno jednostavan način, do kakvih problema može dovesti pogrešno shvatanje beskonačnosti. Uz sve to, Pavle Miličić je, na izvanredan način - u tom radu - obradio paradokse iz doba Stare Grčke koji su bili nerešiva enigma vekovima.

Teorijska matematika je, kako je Albert Ajnštajn rekao, poezija logičnih ideja. Dakle, teorijska matematika je neka vrsta umetnosti po takvom shvatanju. Ta umetnost biće razrađivana u ovom članku. Najpre će biti prikazano pogrešno shvatanje matematičke operacije korenovanja a onda će, kroz priču obogaćenu primerima, biti povezane matematika kao teorijska nauka i matematika kao umetnost razmišljanja.

[1]Prirodno-matematički fakultet Niš, Višegradska 33, 18000 Niš, Srbija, e-mail: vesic.specijalac@gmail.com

2 Pre umetnosti, jedna od zabluda

Jedna od zanimljivosti prikazanih u radu [3] je to da je Koši, tvorac kompleksne analize, izraz oblika $a + b\sqrt{-1}$ nazivao „*količinom lišenom svakog smisla*". Čak je i Ogist de Morgan tvrdio da simbol $\sqrt{-a}$ nema nikakvog smisla.

Ovaj deo rada namenjen je podršci prethodnim tvrđenjima, naročito ovom drugom. Dokažimo narednu teoremu (to je previše jednostavno tvrđenje da bi bilo teorema ali se naziva teoremom da bi privuklo veću pažnju čitaoca).

Teorema 2.1 *Operacija $\sqrt{\cdot}$ nije definisana na skupu realnih brojeva manjih od nule i nemoguće ju je dodefinisati na tom skupu.*

Dokaz: Đaci se, u drugom razredu srednje škole [9], sreću sa brojem i koji ruši njihovu predstavu o tome da je $a \cdot a \geq 0$ za proizvoljan, na nivou njihovog dotadašnjeg znanja, broj pri čemu je $a \cdot a = 0$ ako i samo ako je $a = 0$. Broj i zadovoljava jednakost $i \cdot i = -1$.

S obzirom na to kako se definiše operacija $\sqrt{\cdot}$ na skupu nenegativnih realnih brojeva, iz prethodnog sledi da je ta operacija krajnje očigledno dodefinisana na skupu negativnih realnih brojeva uvođenjem broja i.

Pretpostavimo da je, na primer, $\sqrt{-1} = i$. Pre daljeg rada, podsetimo se da je, za proizvoljne pozitivne realne brojeve a i b, ispunjeno da je $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Kako je $\sqrt{-1} = i$ pretpostavjeno proširenje oblasti definisanosti operacije $\sqrt{\cdot}$ sa skupa nenegativnih na skup svih realnih brojeva to tô proširenje mora zadovoljiti i prethodno navedenu osobinu. Na osnovu toga važi:

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1, \tag{1}$$

što je kontradikcija.$\diamond$

Na koji god način da je operacija $\sqrt{\cdot}$ bila dodefinisana na skupu negativnih realnih brojeva jednakostima identičnim jednastima (1) bi se dokazalo da je $-1 = 1$. Štaviše, ukoliko bi se to dodefinisanje posmatralo za proizvoljan realan broj $-a^2, a \in \mathbb{R}$, tim postupkom bi bilo dokazano da je $-a = a$.

Velika većina učenika, kao što je već rečeno, smatra da je oblast definisanosti operacije $\sqrt{\cdot}$ proširena na skup svih realnih brojeva uvođenjem broja i. Čak je i u jednom kvizu tačan odgovor na pitanje „Koliko je kvadratni koren iz -1?" bio i. Videli smo da je to pogrešno razmišljanje.

Broj i naziva se drugim korenom (vrlo retko kvadratnim) broja -1 ali po jednoj sasvim drugoj definiciji koja kaže da je kvadratni koren broja -1 svaki kompleksan broj z koji ispunjava uslov $z \cdot z = -1$.

Kasnije, na fakultetu, saznaje se da broj i određuje algebarsko proširenje skupa realnih brojeva [1]. Kao takav, on je uveden kao nula polinoma $p(x) = x^2 + 1$ a ne kao proširenje oblasti definisanosti operacije $\sqrt{\cdot}$. Dakle, ako je $z^2 = a$ to nikako ne znači da je $z = \sqrt{a}$. Tačnije rečeno, jednakost $z = \sqrt{a}$ važi ako i samo ako su z i a nenegativni realni brojevi.

3 Matematika kao umetnost (razmišljanja)

U radu [5] kao i u [8] naglašen je besmisao brojeva. Preciznije rečeno, broj kao broj nema nikakav smisao ali služi orijentaciji čoveka. Ta činjenica je osnova priče u ovom poglavlju rada.

Pre nego što se posvetimo glavnoj temi ovog poglavlja prisetimo se da je veliki poljski matematičar Stefan Banah rekao da je (navedeno kao primer u radu [2]) "matematičar onaj koji vidi analogiju među teoremama, veći je onaj koji vidi analogije u dokazima, još je veći onaj koji vidi analogije među teorijama, a možemo zamisliti i takvog koji vidi analogije među analogijama." Ovo poglavlje posvećeno je analogiji između psihologije i nauke, sa blagim osvrtom na umetnost i posebnom pažnjom posvećenom matematici, koja je prikazana u preprintu [8].

U psihologiji, a po Frojdu [4], postoje tri nivoa ličnosti: *ID*, *EGO* i *SUPEREGO*. Podsetimo se još i da je, vezano za ta tri nivoa, nivo ID zapravo urođena komponenta ličnosti i da se prepoznaje u nesvesnom. Ta komponenta sadrži sve nasleđeno kod pojedinca a to su instinkti, nagoni i automatske reakcije. Sva psihička energija deo je ID-a. Sledeća dva, složenija, nivoa ličnosti ne bi mogla funkcionisati bez ovog nivoa.

EGO je komponenta ličnosti koja se da prepoznati kod odraslog čoveka i funkcioniše po principu realnosti. EGO kontroliše, ograničava i usmerava ID. Ova komponenta ličnosti usmerava osobu prema napretku i razlikuje realnost i fikciju.

SUPEREGO se najkasnije razvija. Tačnije rečeno, ta komponenta ličnosti se razvija socijalizacijom i moralni je čuvar ličnosti. Na osnovu usađenih normi, SUPEREGO razlikuje dobro od lošeg i funkcioniše po principu idealnosti i straha. EGO pomaže SUPEREGO-u da ne ode previše u idealnost.

Kao i u psihologiji, postoje tri nivoa umetničkog stvaralaštva: *IMITACIJA*, *MANIR* i *STIL*. IMITACIJA je jasno šta je. U tom nivou umetnik iskopira, manje ili više verno, ono što već postoji. Primer imitacije jeste skidanje glasa druge ličnosti u glumi. Zato je IMITACIJA ekvivalent ID-u u umetnosti.

MANIR je nešto napredniji nivo u umetničkom stvaralaštvu. Na tom nivou, umetnik uradi nešto novo, nešto drugačije od ostalih, ali se u njegovom radu daju prepoznati radovi drugih umetnika koji su nešto slično već stvorili. Primera radi, Harison Ford govori kroz desnu polovinu usana i to je njegov način glume po kome je on prepoznatljiv. Svaki drugi glumac može to isto uraditi, može čak skinuti glas Harisona Forda i može govoriti, originalnosti radi, kroz levu polovinu usana ali neće biti prepoznatljiv po tome kao što je to Harison Ford. To bi bio samo njegov MANIR i ništa više od toga.

STIL je, sa druge strane, najviši nivo u umetničkom stvaralaštvu. Način govorenja Harisona Forda jeste njegov STIL. To što je Bata Živojinović sve glumio kao glumac amater a pritom je bio visoki profesionalac, to je njegov STIL... Svako drugi ko pokuša to isto da uradi, i ko uradi, prikazaće svoj MANIR, nikako STIL. A veličina je u STIL-u, ne u MANIR-u.

I u nauci, specijalno za ovaj članak - u matematici - navedena su tri nivoa razmišljanja u [8]. Ti nivoi su, zbog toga što je matematika umetnost razmišljanja - kako je to rečeno na početku - **IMITACIJA**, **MANIR** i **STIL**. Ukratko, IMITACIJA je nivo razmišljanja u kome mislilac ume da reši samo i isključivo one probleme koji su već rešeni ranije i ni trunku više od toga. MANIR je nivo razmišljanja u kome mislilac ume da, šablonski, ponovi postupak rešavanja već rešenih problema na nerešene probleme i ništa drugo. STIL je nivo razmišljanja u kome mislilac, na neki svoj originalni, naučno ispravan način rešava različite, čak i nerešene, probleme.

Objasnimo te nivoe razmišljanja u posebnim podpoglavljima koja slede.

3.1 IMITACIJA

Nivo razmišljanja IMITACIJA je, kao i u umetnosti, ekvivalent nivou strukture ličnosti ID u psihologiji. Nivo IMITACIJA je, u matematičkom obrazovanju, neophodan da bi se razvili sledeći nivoi razmišljanja.

Primera radi, svaki čas o rešavanju jednačina počinje najosnovnijim pitanjem: "Koji bi trebalo da bude broj x tako da važi jednakost $x+1=2$?" Dakle, pitanje sa veoma očiglednim odgovorom $x=1$.

Zatim se pokazuje da je, zapravo, $x=2-1$ pa je iz tog razloga $x=1$. Nakon toga se rešavaju jednačine oblika $x-5=8, x+3=-6, 10-x=3, \ldots$ i tek se, na kraju, daje opšte rešenje jednačine oblika $x+a=b$ gde su a i b proizvoljni brojevi izvesnog skupa, zavisno od lekcije, koje je $x=b-a$. Iz tog rešenja sledi da su rešenja jednačina oblika $x-p=q$ i $u-x=v$ redom $x=q+p$ i $x=u-v$.

Potpuno bi pogrešno bilo đaka terati da pamti formule učeći ih napamet. Zahtevati to od njega, ekvivalent je ne dozvoljavati mu da razmišlja. On treba da zna te formule ali, dok ih ne nauči, treba da ume da ih izvede. Ako ne nauči da ih izvodi to će značiti da će njegovo razmišljanje ostati, velikim delom, na nivou IMITACIJA i on će imati prve probleme već na prijemnom ispitu iz matematike za srednju školu. Međutim...

3.2 MANIR

Kada đak ume da izvodi prethodne formule on će ih, sa protokom vremena, i zapamćivati. U svakom slučaju, on će uspevati da pronađe najosnovnije sličnosti koje se pojavljuju u rešavanju sličnih problema tako da će, bez poteškoća, moći da reši i jednačinu oblika $x+a=b-c$ kao i jednačinu oblika $x+a-b=c-d$, za brojeve a, b, c, d.

Uprkos svoj toj jednostavnosti, pojaviće se problem jednačine oblika $2x=6$, pa samim tim i jednačine opšteg oblika $ax=b$. Njeno opšte rešenje je $x=\frac{b}{a}$.

Na kraju se dolazi do jednačine, na primer, $2x+3=7$ odnosno opšte jednačine $ax+b=c$. Opšte rešenje ove jednačine je $x=\frac{c-b}{a}$ ali do svake od prethodnih formula se dolazi počev od nivoa IMITACIJA.

Vrhunac svega je jednačina, na primer,

$$(1+(3+(5+(7+(9-(6-(1+(2-(1-x)))))))))=98. \tag{2}$$

Mnogi đaci će se, prateći odgovarajući način rada - zvani MANIR - osloboditi zagrada i na taj način rešiti tu jednačinu. Zbog mnogo zagrada, mnogi će pogrešiti u tom oslobađanju od zagrada. Samo će retki među retkima...

3.3 STIL

Završimo prethodnu, nedovršenu, rečenicu. Samo će retki među retkima *primetiti da se nepoznata x pojavljuje samo u poslednjoj zagradi.* Zbog toga će im se, zato što su retki među retkima, pred očima pojaviti način kako da problem mnogo zagrada i eventualne pogreške u oslobađanju od njih prevaziđu:

$$\begin{array}{ll}
 & (1+(3+(5+(7+(9-(6-(1+(2-(1-x)))))))))=98 \\
1-x=y & (1+(3+(5+(7+(9-(6-(1+(2-y))))))))=98 \\
2-y=z & (1+(3+(5+(7+(9-(6-(1+z)))))))=98 \\
1+z=t & (1+(3+(5+(7+(9-(6-t))))))=98 \\
6-t=u & (1+(3+(5+(7+(9-u)))))=98 \\
9-u=v & (1+(3+(5+(7+v))))=98 \\
7+v=p & (1+(3+(5+p)))=98 \\
5+p=q & (1+(3+q))=98 \\
3+q=r & (1+r)=98
\end{array}$$

Sada je moguće krenuti prema rešenju:

$$\begin{array}{llll}
 & 1+r=98 & r=98-1 & r=97 \\
3+q=r & 3+q=97 & q=97-3 & q=94 \\
5+p=q & 5+p=94 & p=94-5 & p=89 \\
7+v=p & 7+v=89 & v=89-7 & v=82 \\
9-u=v & 9-u=82 & u=9-82 & u=-73 \\
6-t=u & 6-t=-73 & t=6-(-73) & t=79 \\
1+z=t & 1+z=79 & z=79-1 & z=78 \\
2-y=z & 2-y=78 & y=2-78 & y=-76 \\
1-x=y & 1-x=-76 & x=1-(-76) & x=77.
\end{array}$$

Mnogi đaci, zbog neiskustva u oslobađanju od zagrada, prave greške već nakon drugog minusa u jednačini (3). A prethodni postupak jeste, na neki način, STIL đaka koji ga primeni. Nije to nivo STIL naučnog razmišljanja ali takva vrsta originalnosti motiviše đaka da traga za jednostavnostima i originalnim pa čak i efektnim rešenjima problema.

Takav STIL najpre mora da pokrene nastavnik. Ipak je neobično, iz ugla đaka, uvoditi nove nepoznate a ni onu koja se traži da ne znaš. Uvođenjem takvih načina razmišljanja širi se opseg shvatanja SUŠTINE matematike što je najbitnije.

Sa takvim STIL-om, đak će sasvim opušteno rešavati i jednačinu oblika

(3) $$2-(x-3-(4-8-7+9-(1-x)))=80.$$

On će najpre uvesti smenu $1-x=y$ odakle će uslediti da se ta jednačina transformiše u

$$2-(x-3-(4-8-7+9-y))=80.$$

Nakon toga će izračunati zbir $4-8-7+9$ u najunutrašnjijoj zagradi koji je jednak -2. Odatle će zaključiti da se prethodna jednačina transformiše u

$$2-(x-3-(-2-y))=80.$$

Odatle se, dalje, jednostavno dobija da je ta jednačina ekvivalentna jednačini

$$2-(x-3+2+y)=80.$$

Opet, sabiranjem unutar zagrade, dolazi se do zaključka da je ta jednačina ekvivalentna jednačini

$$2-(x-1+y)=80, \quad \text{odnosno} \quad 3-(x+y)=80.$$

Ako se vratimo na smenu po kojoj je $y=1-x$ dolazi se do zaključka da je $x+y=1$, tj. da prethodna jednačina postaje ekvivalentna sa $3-1=80$ što nije tačno pa jednačina (3) nema rešenja.

4 MANIR-om izazvani problemi

U prethodnom poglavlju prikazani su, na neki način, neobični postupci rešavanja relativno jednostavnih ali ipak komplikovanih jednačina. U tim primerima data su dva primera nivoa razmišljanja STIL iz ugla gledanja đaka.

Glavna tema ovog poglavlja jesu razmišljanja nivoa MANIR. Koliko puta se može čuti kako je prijemni ispit iz matematike bio enormno težak?! A zbog čega je to tako?!

Do pre nekoliko godina, za prijemni ispit iz matematike su, u Srbiji, štampane brošure sa po oko pet stotina zadataka od kojih je osamnaest, na dan prijemnog ispita, birano za taj ispit. Đaci su te zadatke, zajedno sa njihovim rešenjima, učili napamet i samo su reprodukovali naučeno na prijemnom ispitu. To je još jedan primer nivoa razmišljanja IMITACIJA.

Onda je nastao problem sa time da se saznalo koji će zadaci biti na prijemnom ispitu i krenulo se sa zadavanjem sve više nepoznatih zadataka. Tu su đaci već polako učili da razmišljaju i doveli su svoje razmišljanje do nivoa MANIR, makar donekle, ali ne predaleko. Čast izuzecima.

Poslednjih par godina su svi zadaci, koji bivaju zadati na prijemnom ispitu, nepoznati. I uvek se javlja isti problem zvani: MATEMATIKA JE STRAŠNO TEŠKA BILA. Šta je razlog tome?!

Glavni problem je i najveća pomoć. I danas postoji zbirka zadataka za pripremu prijemnog ispita iz matematike ali đaci, svi do jednog - koji se žale na tešku matematiku na prijemnom ispitu - nastoje da šablonizuju zadatke. Problem dolazi sa zadacima koji nisu šablonski.

Takav tip zadataka se obradi u školi ali se načini rešavanja tih zadatka zaborave brže nego što se čulo za njih. Zbog toga su problem svi zadaci koji su suštinski različiti od zadataka iz zbirke. Zbog toga je teško đacima da postave odgovarajući sistem jednačina i reše isti. Zbog toga...

A glavni uzrok svemu tome je razmišljanje na nivou MANIR. I ništa osim toga. Do nivoa matematičkog razmišljanja STIL đaka treba da vodi njegov nastavnik. Kada ga, makar malo, dovede do tog nivoa đak će videti svu lepotu, svu jednostavnost i svu primenljivost matematike kako u teoriji tako i u životu.

Priprema za matematička takmičenja, kao i učestvovanje na njima, razvijaju idejnost u razmišljanju kod đaka. Dakle, pospešuju nivo razmišljanja STIL. To je najbolji način da se "užasno teška i komplikovana" matematika dovede na nivo igre kod đaka a njihovo razmišljanje o matematičkim problemima dođe do nivoa STIL, makar iz njihovog ugla gledanja iako tu suštinskog STIL-a obično nema.

5 Primer nivoa razmišljanja STIL

U prethodnom poglavlju prikazano je razmišljanje đaka koje je neobično i, kao takvo, smatrano da je na nivou STIL. Iz ugla đaka to jeste inovativno i novo. Iz ugla više nauke, tu nema nikakvog epohalnog otkrića. Te jednostavnosti samo motivišu učenike da traže jednostavnost kako u matematici tako i u životnim situacijama.

U ovom odeljku prikazaćemo, još jednom, kako je matematiku moguće primeniti u realnom životu, na Zemlji. Prikazaćemo razmišljanje matematičara o nerazumljivom i prevesti to na jezik matematike.

Glavni problem matematike je to kako apstraktnoj teoriji dati duh života. Mnogo je primena matematike koje se odnose na život a da se suština dobijenog, u tim primenama, ne razume. Ovaj deo rada je prikaz ljudske priče, ispričane jezikom matematike u radovima [5,6], primenjene u radu [7] i relativno jednostavnim rečima ispričane u preprintu [8].

U svim tim radovima predstavljeno je kako je lekarski nalaz moguće izraziti pomoću brojeva, realnih i kompleksnih. Štaviše, prikazano je i kako je promenu zdravstvenog stanja živog bića, kroz vreme, moguće predstaviti pomoću krive u Dekartovom XOY sistemu.

Mi ćemo se, u ovom primeru, zadržati na ocenjivanju i poređenju dva ocenjena stanja krvi. Celokupan metod, koji ćemo koristiti, dostupan je na internetu u radu [5].

Pre svega, ako je rezultat testa krvi sa dve konačne referentne vrednosti (realni brojevi između kojih se nalaze uredni rezultati) α i $\beta, \alpha < \beta$, brojčano izražen kao $\mathbf{r}$ onda je ocena tog rezultata

$$e^4(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \alpha \le \mathbf{r} \le \beta, \\ \frac{\mathbf{r}-\beta}{\beta-\alpha}, & \mathbf{r} > \beta, \\ \frac{\mathbf{r}-\alpha}{\beta-\alpha} i, & \mathbf{r} < \alpha, \end{cases} \tag{4}$$

za $i^2 = -1$ (ono i sa početka za koje važi $i \neq \sqrt{-1}$).

Remark 5.1 *Ocena rezultata, u slučaju* $\mathbf{r} < \alpha$, *blago je izmenjena u odnosu na tu ocenu prikazanu u radovima* [5–7]. *Tačnije, promenjen joj je znak a sve sa ciljem da se ta promena znaka ne bi pominjala kasnije, kada - u primeru - budemo govorili o crtanju grafika što može dovoditi do zabune.*

U ovakvom ocenjivanju iskorišćena je činjenica (pomenuta u radu [5]) da niti jedan broj nema nikakvo značenje do teorijskog. Zbog toga je brojeve moguće koristiti zarad različitih orijentacija u životu. Preciznije rečeno, ovakvo ocenjivanje rezultata testa krvi, na brojevnoj pravoj, i rezultat $\mathbf{r}$ i referentne vrednosti α i β translira za vektor $\overrightarrow{AO}$, gde su A i O tačke na brojevnoj pravoj koje odgovaraju referentnoj vrednosti α i broju 0 respektivno. Zatim se, u tom ocenjivanju - na prethodno transformisane vrednosti - primenjuje homotetija sa centrom u tački O i koeficijentom $\frac{1}{\beta-\alpha}$.

Paralela takvom ocenjivanju medicinskih rezultata, u matematici - a kako je objašnjeno u [8] - jeste proširivanje razlomaka. Rezultat tih transformacija jeste da se referentne vrednosti α i β kao i rezultat $\mathbf{r}$ transformišu po pravilima:

$$\alpha \longrightarrow 0 = \alpha^*, \quad \beta \longrightarrow 1 = \beta^*, \quad \mathbf{r} \longrightarrow \frac{\mathbf{r}-\alpha}{\beta-\alpha} = \mathbf{r}^*, \tag{5}$$

a ocene rezultata (4) jesu zapravo udaljenosti transformisanog rezultata $\mathbf{r}$ u $\mathbf{r}^*$ od segmenta $[0,1] = [\alpha^*, \beta^*]$ na brojevnoj pravoj (rastojanje transformisanog rezultata od transformisanog intervala referentnih vrednosti). Pored toga, u nekim slučajevima se ta rastojanja množe brojem i, a sve zbog toga da bi se napravila neophodna razlika između lošeg rezultata manjeg od α i lošeg rezultata većeg od β. Mernih jedinica nema zbog deljenja u ocenjivanju (4), tj. transformacija (5). Uz sve to, jasno je da što je moduo ocene (4) manji/veći to je poremećaj lakši/teži.

Ako obratimo pažnju na transformacije (5) primetićemo da se to pravilo odnosi na proizvoljan rezultat proizvoljnog medicinskog testa sa dve konačne referentne vrednosti. Odatle jasno sledi da je ocene (4) rezultata različitih testova ove grupe moguće sabirati, oduzimati i računati moduo zbira dobijenih ocena.

Dalje, ukoliko su $\mathbf{r}_1^*$ i $\mathbf{r}_2^*$ rezultati dobijeni trećim od pravila (5) na rezultate $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ određenog testa krvi realizovanog u trenucima t_1 i t_2 funkcija koja povezuje transformisane rezultate je [5–8] (korekcija štamparske greške autora u radu [5], jednačina (11))

$$\varphi(t) = (-2)^v \frac{\mathbf{r}_2^* - \mathbf{r}_1^*}{(t_2 - t_1)^{u+v}} (t - t_1)^u \Big(t - \frac{3t_2 - t_1}{2}\Big)^v + \mathbf{r}_1^*, \tag{6}$$

gde su u i v konstante takve da je

- $(u, v) = (2, 0)$ u slučaju hronične bolesti izazivača,
- $(u, v) = (2, 1)$ u slučaju akutne bolesti izazivača,
- $(u, v) = (1, 0)$ u slučaju nepoznatog tipa bolesti izazivača.

Ukoliko je $t_0 \in (t_1, t_2)$ veličina $\varphi(t_0)$ jeste aproksimalni rezultat posmatranog testa u tom trenutku. Kako su referentne vrednosti konstantne u svakom trenutku $\big($zbog transformacija (5)$\big)$ to je jasno da se ocene aproksimalnih rezultata, sa protokom vremena, povezuju funkcijama istog oblika kao i odgovarajući transformisani rezultati.

Neka funkcije

$$\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad \varphi_q(t),$$

oblika (6) definisane redom na segmentima $[t_1, t_2], [t_2, t_3], \ldots, [t_q, t_{q+1}]$ funkcionalno povezuju ocene e_1 i e_2, e_2 i $e_3, \ldots,$ e_q i e_{q+1} rezultata izvesnog testa krvi realizovanog u trenucima $t_k, k = 1, \ldots, q+1$ i neka je

$$C = \begin{cases} |e_1| & \text{ako je } e_1 \neq 0, \\ 1 & \text{ako je} e_1 = 0, \\ c_0 \in (0, +\infty) & \text{u specijalnim slučajevima.} \end{cases}$$

Neka je još i $t_0 \in [t_k, t_{k+1}]$ za neko $k = 1, \ldots, q$. Veličina

$$\mathcal{H}(t_0) = \frac{1}{C} \frac{b_k(t_0) + \Sigma_{r=1}^{k-1} \gamma_r (\delta_r E_r + E_{r+1})(t_{r+1} - t_r)}{t_0 - t_1}, \tag{7}$$

za

$$\begin{array}{lll} \gamma_r = \frac{1}{u_r - v_r + 1}, & \delta_r = u_r - v_r, & \eta_r = \frac{1}{u_r - 5v_r + 1}, \\ b_r(t) = \eta_r \frac{E_{r+1} - E_r}{(t_{r+1} - t_r)^{u_r + v_r}} (t - t_r)^{u_r + 1} (t + t_r - 2t_{r+1})^{v_r} + E_r (t - t_r), & & \end{array}$$

gde su u_r i v_r odgovarajuće konstante u i v u jednačini (6) u funkciji koja povezuje rezultate u periodu između t_r i t_{r+1}, jeste ocena stabilnosti rezultata u trenutku $t = t_0$. Što je ta ocena manja po modulu to je rezultat stabilniji.

Remark 5.2 *Ocena stabilnosti (7) jednaka je površini zahvaćenoj graficima funkcija koje povezuju ocene $e_r, r = 1, \ldots, q+1$, vodoravnom osom Dekartovog koordinatnog sistema i pravama $x = t_1$ i $x = t_0$.*

Remark 5.3 *U radu [5] objašnjeni su dodatni uslovi kako odrediti sva potrebna, prethodno pomenuta, vremena $t_k, k = 1, \ldots, q+1$. Naime, neophodno je ispitati kada neuredan (aproksimalni) rezultat, sa protokom vremena postaje uredan i taj trenutak proglasiti jednim od vremena t_k. Takođe, neophodno je odrediti i trenutak kada uredan (aproksimalni) rezultat prestaje da bude uredan pa taj trenutak proglasiti vremenom t_k.*

Rezultate dva uzastopna testa krvi [6] dodatno ćemo izanalizirati u nastavku. Izvorno, testovi krvi su ponovljeni nakon dva dana ali ćemo mi, zbog bolje preglednosti budućeg grafika i zbog nebitnosti značenja svih tih poremećaja u ovom radu, pretpostaviti da je testiranje ponovljeno nakon 60 dana. Ti rezultati su:

test	res.	ref. vr.		ocena	test	res.	ref. vr.		ocena
WBC	14	3.9	10	0.656	WBC	7.5	3.9	10	0
LYM	1.9	0.8	5.	0	LYM	3.2	0.8	5.	0
MID	0.4	0.1	1.	0	MID	0.4	0.1	1.	0
GRAN	11.7	1.6	7.	0.87	GRAN	3.9	1.6	7.	0
RBC	5	3.7	5.9	0	RBC	5.37	3.7	5.9	0
HGB	153	110	180	0	HGB	160	110	180	0
HCT	0.42	0.35	0.54	0	HCT	0.49	0.35	0.54	0
MCV	84.5	81	99	0	MCV	90.3	81	99	0
MCH	30.6	26	32	0	MCH	29.8	26	32	0
MCHC	363	310	350	0.325	MCHC	330	310	350	0
RDW	14.6	11.5	16.5	0	RDW	14.3	11.5	16.5	0
PLT	138	140	450	$0.006i$	PLT	177	140	450	0
MPV	10.4	7.8	12	0	MPV	12.6	7.8	12	0.143

Kao što primećujemo u prethodne dve tabele, rezultati testova WBC, GRAN, MCHC, PLT nisu bili uredni na prvom pregledu (tabela levo) a postali su uredni na drugom pregledu. Sa druge strane, rezultat testa MPV bio je uredan na prvom pregledu ali nije uredan na drugom. Promene rezultata tih testova odrediće još značajnih vremenskih trenutaka neophodnih za dalju analizu tih rezultata. Inače, to su jedini testovi čiji rezultati nisu bili uredni na ta dva pregleda.

Kako je nepoznat tip bolesti koji je uzrokovao ove poremećaje, transformisani rezultati će biti povezani linearnim funkcijama. Na osnovu toga slede naredni zaključi:

WBC: Transformisani rezultati su $\mathbf{r}_1^1 = \frac{10.1}{6.1}$ i $\mathbf{r}_2^1 = \frac{3.6}{6.1}$ pa je odgovarajući polinom, koji povezuje te rezultate, zapravo $p^1(t) = -\frac{6.5/6.1}{60}t + 10.1/6.1$. Trenutak, u kome taj rezultat postaje uredan, jeste rešenje jednačine $p^1(t) = 1$ iz razloga što je rezultat na prvoj kontroli veći od veće referentne vrednosti. Odatle sledi da je $t^1 = \frac{480}{13}$.

GRAN: Analognim postupkom, primenjenim u delu vezanom za rezultate testa WBC, dolazi se do zaključka da je linearan polinom koji povezuje rezultate ovog testa polinom $p^2(t) = -\frac{7.8/5.4}{60}t + 10.1/5.4$ a trenutak kada rezultat tog testa postaje uredan je $t^2 = \frac{470}{13}$.

MCHC: Polinom koji povezuje rezultate ovog testa je $p^3(t) = -\frac{33/40}{60}t + 53/40$ a odgovarajući trenutak, kada je rezultat tog testa postao uredan, je $t^3 = \frac{260}{11}$.

PLT: Polinom koji povezuje transformisane rezultate testa PLT je $p^4(t) = \frac{39/310}{60}t - 2/310$ a trenutak kada je rezultat tog testa postao uredan je $t^4 = \frac{40}{13}$.

MPV: Polinom koji povezuje transformisane rezultate ovog testa je $p^5(t) = \frac{2.2/4.2}{60}t + 2.6/4.2$ dok je trenutak kada taj rezultat prestaje da bude uredan (dobro pogledati da li je neuredan rezultat veći od veće ili manji od manje referentne vrednosti) zapravo $t^5 = \frac{480}{11}$.

Ako još jednom pogledamo rezultate koje analiziramo, primetićemo da polinomi $p^1(t), \ldots, p^5(t)$ povezuju sve rezultate koji na bar jednom pregledu (u našem slučaju na tačno jednom) nisu bili uredni. Odatle sledi da su ocene rezultata koji nisu bili uredni povezane narednim funkcijama:

WBC: $\varphi^1(t) = \begin{cases} p^1(t) - 1, & 0 \le t \le t^1, \\ 0, & t > t^1. \end{cases}$

GRAN: $\varphi^2(t) = \begin{cases} p^2(t) - 1, & 0 \le t \le t^2, \\ 0, & t > t^2. \end{cases}$

MCHC: $\varphi^3(t) = \begin{cases} p^3(t) - 1, & 0 \le t \le t^3, \\ 0, & t > t^3. \end{cases}$

PLT: $\varphi^4(t) = \begin{cases} \big(p^4(t) - 0\big)i, & 0 \le t \le t^4, \\ 0, & t > t^4. \end{cases}$

MPV: $\varphi^5(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le t^5, \\ p^5(t) - 1, & t > t^5. \end{cases}$

Važi da je $0 < t^4 < t^3 < t^2 < t^1 < t^5 < 60$ pa, zbog toga, funkcija

$$\varphi(t) = \varphi^1(t) + \varphi^2(t) + \varphi^3(t) + \varphi^4(t) + \varphi^5(t),$$

koja povezuje ocene ukupnog posmatranog stanja koje se dobija sabiranjem ocena rezultata koji su bar u jednom trenutku bili loši, jednaka

$$\varphi(t) = \begin{cases} p^1(t) + p^2(t) + p^3(t) + p^4(t)i - 3, & 0 \le t \le t^4, \\ p^1(t) + p^2(t) + p^3(t) - 3, & t^4 \le t \le t^3, \\ p^1(t) + p^2(t) - 2, & t^3 \le t \le t^2, \\ p^1(t) - 1, & t^2 \le t \le t^1, \\ 0, & t^1 \le t \le t^5, \\ p^5(t) - 1, & t^5 \le t \le 60. \end{cases} \tag{8}$$

Konačno, zbirovi ocena rezultata svih testova, u nekim specijalnim trenucima, su:

- U trenutku $t_1 = 0$: $e_1 = \frac{121951}{65880} - \frac{1}{155}i = 1.851 - 0.006i$,
- U trenutku $t_2 = t^4$: $e_2 = \frac{1438889}{856440} = 1.680$,
- U trenutku $t_3 = t^3$: $e_3 = \frac{19469}{36234} = 0.537$,
- U trenutku $t_4 = t^2$: $e_4 = \frac{5}{336} = 0.014$,
- U trenutku $t_5 = t^1$: $e_5 = 0$,
- U trenutku $t_6 = t^5$: $e_6 = 0$,
- U trenutku $t_7 = 60$: $e_7 = \frac{1}{7} = 0.143$.

Ocenimo stabilnost rezultata jednog od testova, recimo WBC - jer u tom slučaju najviše treba računati. Konstante, potrebne za primenu jednačine (7), su (zbog $u_r = 1, v_r = 0, r = 1, \ldots, 6$):

$$\begin{array}{ccccccc} t_1 = 0, & t_2 = \frac{40}{13}, & t_3 = \frac{260}{11}, & t_4 = \frac{470}{13}, & t_5 = \frac{480}{13}, & t_6 = \frac{480}{11}, & t_7 = 60; \\ e_1^1 = \frac{40}{61}, & e_2^1 = \frac{110}{183}, & e_3^1 = \frac{475}{2013}, & e_4^1 = \frac{5}{366}, & e_5^1 = 0, & e_6^1 = 0, & e_7 = 0^1; \\ \multicolumn{7}{c}{\gamma_1 = \ldots = \gamma_6 = \frac{1}{2}, \quad \delta_1 = \ldots = \delta_6 = 1, \quad \eta_1 = \ldots = \eta_6 = \frac{1}{2};} \end{array}$$

Na osnovu prethodnog sledi da je:

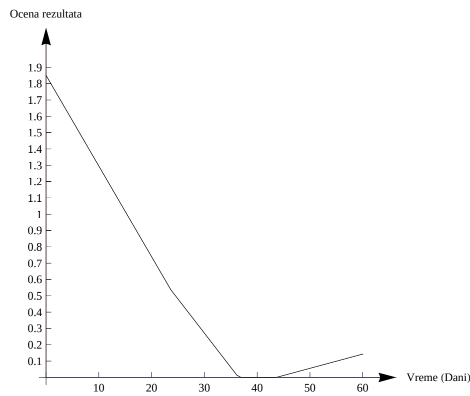
$$\mathcal{H}(t_2) = \frac{1}{e_1^1(t_2 - t_1)} b_1(t_2) = \frac{1}{e_1^1}\Big(\frac{1}{3}(e_2^1 - e_1^1) + e_1^1\Big)(t_2 - t_1) = \frac{23}{24},$$
$$\mathcal{H}(t_3) = \frac{359}{528}, \quad \mathcal{H}(t_4) = \frac{49}{96}, \quad \mathcal{H}(t_5) = \frac{1}{2}, \quad \mathcal{H}(t_6) = \frac{11}{26} \quad \mathcal{H}(t_7) = \frac{4}{13}.$$

Prva od prethodnih šest veličina dobijena je postupno dok su, vezano za ostale, prikazane samo krajnje vrednosti. Ako se vratimo na definiciju veličine $\mathcal{H}(t)$ [5, 8] koja glasi

$$\mathcal{H}(t_0) = \frac{1}{C} \lim_{u \to t_0} \frac{\int_{t_k}^{u} p^k(v)dv + \sum_{r=1}^{k-1} \int_{t_r}^{t_{r+1}} p^r(v)dv}{u - t_0}, \tag{9}$$

za $t_0 \in [t_k, t_{k+1}], k = 1, \ldots, 6$, uz korišćenje Lopitalovog pravila dobija se da je $\mathcal{H}(t_1) = 1$.

Štaviše, grafički prikaz[2] promene modula ukupne ocene zavisno od protoka vremena je



Slika 1: Promena modula ocene ukupnog stanja

Jasno je da približavanje grafika vodoravnoj osi označava poboljšanje stanja dok udaljavanje grafika od te ose predstavlja pogoršanje. Prethodne brojčane ocene stanja, kao i brojčanu i grafičku ocenu ukupnog stanja, moguće je analizirati i iz ugla medicine ali ćemo taj deo analize uglavnom preskočiti (medicinski obojena takva analiza predstavljena je u radu [7]). Ipak je ovde reč o tome šta matematika može. A to, što matematika može, jeste to da je prethodna analiza samo deo kompletne analize posmatranih rezultata.

Red bi bilo, ipak, naglasiti da se pogoršanje rezultata, koje se vidi na Slici 1, javlja kao posledica terapije pa je vrlo moguće da će se i to pogoršanje izgubiti. Još preciznije, a za one najradoznalije, MPV je trombocitna konstanta koja govori o zapremini trombocita (PLT). Kako su rezultati testa PLT postali uredni pre pogoršanja rezultata testa MPV taj poremećaj rezultata, usled koga primećujemo pogoršanje, ne treba da izaziva brigu.

Primenjujući prethodno pomenuti metod, svako može da dopuni prethodnu analizu (to će biti razmišljanje nivoa MANIR veoma blisko nivou IMITACIJA). Ipak, na nivou MANIR biće svaka analiza drugih medicinskih rezultata ovog oblika a taj MANIR može i pomoći u životu.

6 Zaključak

U ovom radu obraćena je pažnja na shvatanje matematike i matematičko razmišljanje.

U drugom poglavlju, koje se logično nadovezalo na rad [3], odgovoreno je na pitanje zašto je $\sqrt{-1}$ nedefinisana veličina. To objašnjenje može da deluje zbunjujuće (ako ta operacija nije definisana onda ni broj i ne postoji) ali taj,

[2]Grafički se prikazuju, odvojeno, realni i imaginarni deo vrednosti funkcija koje povezuju ocene rezultata sa protokom vremena koje je realan broj

možda konfuzni i previše filozofski deo tog objašnjenja, razjašnjen je algebarskim rezultatima višeg nivoa vezanim za teoriju polja.

U trećem poglavlju povezali smo matematičko razmišljanje i umetničko stvaralaštvo. Naravno, tu je korišćeno puno analogija ali se došlo do tri nivoa matematičkog razmišljanja nazvanih IMITACIJA, MANIR i STIL. Pomoću ta tri nivoa pokušalo se objasniti zbog čega se matematika smatra toliko komplikovanom naukom.

U četvrtom poglavlju navedeni su razlozi zbog čega je matematika toliko "komplikovana" koliko jeste. I sve se svelo na način razmišljanja. Razmišljati na nivou MANIR svakako je pravi način za matematiku učiniti nerazumljivom. A matematika ume i jednostavna da bude, samo kad se razmišlja, ne uči.

Put do jednostavnosti u matematici je komplikovan ako se na njega krene previše kasno, recimo od četvrtog razreda srednje škole. Učitelji i nastavnici rešavanje zadataka ne treba da počinju postupkom rešenja nego rečima *hajde da razmislimo*. Nakon toga, oni ne treba da ispričaju samo suvoparno rešenje zadatka već da zaborave da umeju da reše taj problem i da svoje razmišljanje, koje primenjuju u rešavanju zadatka, glasom prezentuju đacima. Kada se, na taj način, učenicima servira činjenica da se matematika ne uči nego se, zarad rešenja problema, razmišlja đaci će to lakše prihvatiti i razmišljaće ne pokušavajući da se sete kako se to radi već će osmišljavati način kako da reše zadatak.

Naposletku, u petom poglavlju je dat primer matematičkog razmišljanja na nivou STIL. Autor je bio u bliskom kontaktu sa medicinom i, tragajući za odgovorima na neka svoja pitanja - upućena lekarima - koje nije dobijao on je kreirao taj metod prateći savete nekih drugih lekara. Taj primer je samo deo primene metoda predstavljenog u radu [5] ali može da bude izuzetno upotrebljiv u životu. Taj metod, pomoću brojeva, odgovara na pitanje: "Doktore, koliko je moje stanje loše?!" I svako ko bude postavio takvo pitanje lekaru dobiće odgovor o detaljima, nikako o celini. A celina, koja je izuzetno značajna, da se oceniti korišćenjem besmislenosti brojeva kao takvih na način kako je to objašnjeno u radu [5]. I funkcionisaće. A još je i vrlo jednostavno.

Za kraj, ne zaboravimo da je mnogo pitanja u svakodnevnom životu, ne nužno medicinskih, matematičkih, bioloških, istorijskih... koja vekovima ostaju bez odgovora. Pitajmo matematiku. Možda će ona umeti odgovoriti. Samo, da bi odgovorila, neophodno je razmišljati na nivou STIL. A STIL-a, bez nivoa IMITACIJA i MANIR nema. IMITACIJA i MANIR samo pomažu da se dosegne nivo razmišljanja STIL. Zato treba negovati sva ta tri nivoa razmišljanja, poput ID-a, EGO-a i SUPEREGO-a u strukturi sopstvene ličnosti.

I ne zaboravimo da nema nauke koja na neka svakodnevna pitanja može da dâ odgovor. Ali umerenom primenom razmišljanja nivoa STIL odgovorićemo na mnoga pitanja, osobito naučna, koja odgovor sakrivaju, obično bespotrebno, komplikovanom teorijom.

Acknowledgements

Ovaj rad finansijski je podržan od strane projekta 174012 Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja u Vladi Republike Srbije.

Literatura

[1] E. Borovec, *Algebarska proširenja polja*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, Zagreb, septembar 2015.

[2] S. Ćebić, *Formalizam u nastavi matematike*, Metodički aspekti nastave matematike, Posebna izdanja, Naučni skupovi, knj. 5, Pedagoški fakultet, Jagodina, 2008., 17-23.

[3] P. M. Miličić, *O zabludama i teškoćama u nekim matematičkim rasuđivanjima*, MAT-KOL (Banja Luka), XXII (2)(2016), 75-90.

[4] N. Mladenović, *Frojdova psihoanaliza*, seminarski rad, Fakultet Dramskih Umetnosti, Beograd, 2010.

[5] N. O. Vesić, *Matematičko objedinjavanje različitosti*, MAT-KOL (Banja Luka), Vol. XXI (4)(2015), 235–249.

[6] N. O. Vesić, *Matematička poslastica: Slova skrivaju brojevi otkrivaju*, Nastava matematike, LXI, 1-2 (2016), 1-9.

[7] N. O. Vesić, L. Mačukanović-Golubović, Lj. Milenković, I. Golubović, *Reaction of Aronia, Bisphosphonates and Epsom Salt on Platelets of a Patient with Multiple Sclerosis*, submitted.

[8] N. O. Vesić, *Igrajmo se matematike I ...: Kratka priča o značaju suštine*, preprint.

[9] R. Vuković, *Matematika za II razred gimnazije*, Skripta za nastavu matematike držanu 2011-14. u Banjoj Luci, available online: http://www.gimbl.com/cyr/knjige/2.Matematika.pdf.

Received by the editors 13.07.2016. Available online 29.08.2016.