MAT-KOL (Banja Luka)
XXII (3) (2016), 181-190
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5828 (o)

Угао између два вектора и ортогоналност вектора у квази еуклидском простору

Павле М. Миличић

Сажетак. Користећи тзв. $g-$*функционал* ([5], [6], 7]) као полускаларни производ, у могућности смо да, у извесном смислу, користимо методологију скаларног производа у нормираним просторима. Овде су уведене неке нове дефиниције углова између вектора, тзв. $g-$*углови* и нове дефиниције ортогоналности вектора, тзв. $g-$*ортогоналности* у нормираним просторима. Показује се да у тзв. *квазиеуклидским просторима* тако уведени појмови имају доста добрих особина одговарајућих појмова еуклидских простора. Осим тога, необавезна цитирана литература [13]-[23] показује да се помоћу $g-$функционала и разни други појмови еуклидске геометрије могу дефинисати и проучавати у нормираним просторима.

Abstract. Using the so-called. functional ([5], [6], [7]) as semi-scalar product, we are able to, in a sense, use the methodology of the scalar product in standard rooms. Here are introduced some new definitions of angles between the vectors, so-called. angles and the new definition of orthogonality of vectors, so-called. orthogonality in normed spaces. It turns out that the so-called quasi-Euclidian spaces also introduced concepts have a lot of good qualities corresponding terms Euclidean space. In addition, optional cited literature [13] - [23] shows that using functional and various other concepts of Euclidean geometry can be defined and studied in standard rooms.

Да би се разумела садржина следећег текста, читалац мора, поред осталог, познавати дефиниције следећих појмова из Функционалне анализе: *апстрактни векторски простор, нормирани векторски простор, глатки нормирани простор, стриктно конвесан нормиран простор, рефлексиван нормиран простор, скаларни производ два вектора, Еуклидов простор, Хилбертов простор, Банахов простор, и елементарну проблематику везану за ове појмове.* Ово су основни појмови у свакој књизи из Функционалне анализе или Линеарнр алгебре. Остали појмови, који нису довољно популарни, биће дефинисани или ће се указати на њихову изворност. На пмер, у књизи *Десет тема из математике* [11], одељак 10, дате су дефиниције многих појмова који ће се овде појављивати.

Основна амбијент у коме су дефинисани сви појмови из овог излагања јесте алгебарска структура *апстрактног векторског простора* чије елементе зовемо *векторима*.То је веома широка структура са прецизно дефинисаним операцијама сабирања вктора и множења вектора бројем која обухвата добро познате структуре поља реалних бројева, поља комплексних бројева, геометријских вектора [11], одељак 1, али и многе апстрактније структуре. На пример, скуп свих непрекидних реалних функција на сегменту [*a*,*b*], у ознаци $C_{[a,b]}$, са операцијом сабирања функција и множења функција бројем образује један векторски простор. Свака функција овог скупа је вектор тог простора.У овом простору норма може бити уведена на више начина.На пример, за вектор $f \in C_{\|a,b\|}$ норма може бити дефинисана са

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt .$$

Да би смо указали на неке важније особине норме и нормираних векторских простора наводимо следећи једноставан пример. За векторе, векторског простора уређених парова реалних бројева (твз. дводимензиони реални векторски простор), који се означава са

$$R^2, \quad \left(R^2 = \{a = (x, y) | x, y \in R\}\right),$$

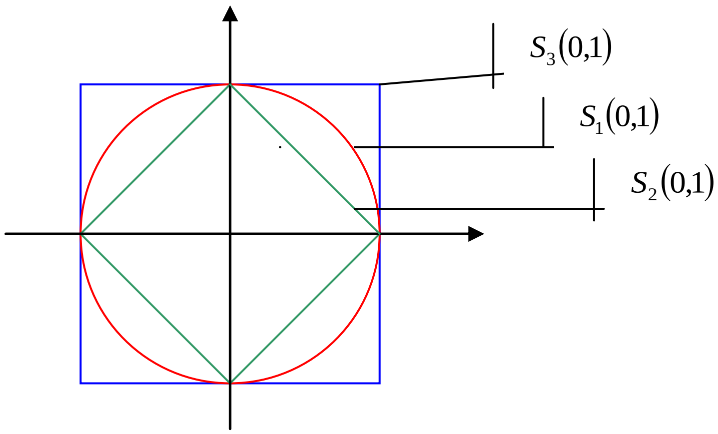
норме се могу дефинисати на више начина. На пример, за вектор $a = (x, y) \in R^2$ норме се могу дефинисати са

$$\|a\|_1 = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\|a\|_2 = |x| + |y|,$$

$$\|a\|_3 = \max\{|x|, |y|\}.$$

Дакле, на истом векторском простору могу се дефинисти различите норме, различитог „квалитета“.То се може илустровати следећом сликом која приказује јединичне сфере $S(0,1)$ одговарајућих нормираних простора.



Две главне карактеристике које праве разлике између ове три сфере су: »црвена« сфера $S_1(0,1)$ не садржи ни једну нетривијалну дуж, што није случај са остале две сфере (особина квалитета *конвексности сфере*), и друга карактеристикаје да кроз сваку тачку»црвене« постоји јединствена тангента те сфере (особина *глаткости сфере*). Друге две сфере немају ту особину.Прецизније се те две особине у општим нормираним просторима проучавају помоћу тзв. *модула конвексности*, *модула глаткости* и *модула деформације* одговарајућег нормираног простора. О поменутим особинама нормираних простора, читалац може консултовати рад [10].

У еуклидском простору $(E, \|\cdot\|)$, нормираном простору са скаларни производом (x, y) вектора x и y, *косинус угла* φ $(0 \le \varphi \le \pi)$ између вектора x и y, у ознаци $\angle(x, y)$, дефинише се са

$$\cos\angle(x, y) := \frac{(x, y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Из ове дефиниције проистиче и дефиниција ортогоналности $\perp$ два вектора, $x \perp y$, као случај када је

$$\cos\angle(x, y) = 0.$$

Дакле, у овом простору важи еквиваленција

$$x \perp y \Leftrightarrow \cos\angle(x, y) = 0.$$

Према томе, у еуклидским просторима, угао и ортогоналност, се на јединствен начин, дефинишу помоћу скаларног производа.

У произвољном нормираном простору, у коме се не може дефинисати скаларни производ, сагласан са нормом. тзв. нетривијалан нормирани простор, угао и ортогоналност се морају дефинисати на други начин, помоћу норме одговарајућег простора. На пример векторски простор l^p бројевних низова $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$, $x_i \in R$, код којих је ред $\sum_1^\infty |x_i|^p$ конвергентан, за $1 \le p < \infty, p \ne 2$, са нормом $\|x\|^p = \sum_1^\infty |x_i|^p$ није еуклидски простор. За исти скуп низова и $p = 2$, простор l^2, је еуклидски простор са нормом $\|x\|^2 = \sum_1^\infty |x_i|^2$ и скаларним производом $(x, y) = \sum_1^\infty x_i y_j$ вектора $x = (x_1, x_2, \cdots)$ и вектора $y = (y_1, y_2, \cdots)$.

Прве дефиниције угла у нетривијалним нормираним просторима су прилично неприродне. Најпознатије су следеће дефиниције:

Singer-ов угао: $\angle(x, y) := \arccos\left|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right|$,

Wilson-ов *угао*: $\angle(x, y) := \arccos\frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2}{2\|x\|\,\|y\|}$,

Из ових дефиниција угла произлази одговарајућа дефиниција ортогоналности вектора, када је $\cos\angle(x, y) = 0$.

Али, разне дефиниције ортогоналности вектора у нормираним просторима уведене су непосредно, где се не користи дефиниција угла. Колики је значај тих ортогоналности вектора у нормираним просторима најбоље говори следећа чињеница.У монографији *Characterizations of Inner Product Spaces* од *Dan Amira* [3] наведене су 82 теореме (критеријума) које карактеришу еуклидске просторе и Хилбертове просторе у класи нормираних простора, користећи искључиво разне ортогоналности вектора у нормираним просторима.Зато сада наводимо хронолошки неке најважније дефиниције (консултовати радове [1] и [2]).

1. *Roberts-ова ortogonalnost* (1934): $x \perp_R y \Leftrightarrow (\forall t \in R)\, \|x+ty\| = \|x-ty\|.$
2. *Birkoff-љева ortogonalnost* (1935): $x \perp_B y \Leftrightarrow (\forall t \in R)\, \|x\| \le \|x+ty\|.$
3. *James-ова ortogonalnost* (1945): $x \perp_J y \Leftrightarrow \|x-y\| = \|x+y\|.$
4. *Pythagorina ortogonalnost* (1954): $x \perp_P y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$
5. *Singer-ова ortogonalnost* (1971 ?): $x \perp_S y \Leftrightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|.$
6. *Dimine-ова ortogonalnost* (1983):
$$x \perp_D y \Leftrightarrow \sup\left\{ f(x)g(y) - g(x)f(y) \,\middle|\, f, g \in S(X^*) \right\} = \|x\|\|y\| \cdot$$
($S\left(X^*\right)$ је јединична сфера дуалног простора X^*).
7. α *−ортогоналност* (1983):
$$x \perp_\alpha y \Leftrightarrow \left(1+\alpha^2\right)\|x+y\|^2 = \|x+\alpha y\|^2 + \|y+\alpha y\|^2, \alpha \in R.$$

Напоменимо да су ортогоналности $\perp_J$ и $\perp_P$ специјални случајеви ортогоналности $\perp_\alpha$, односно да је ортогоналност 7. уопштење ортогоналности 3. и 4. (за $\alpha = 0$ добијамо $\perp_P$ а за $\alpha = -1$ добијамо ортогоналност $\perp_J$).

Захваљујући полускаларном производу дефинисаном помоћу тзв. $g-$*функционала* [11] ми смо у стању да дамо нове дефиниције углова и ортогоналности, такозваних ***$g-$углова*** и ***$g-$ортогоналности.***

Пре тога напомињемо да, према Теореми 3.6,одељка 10 из [11], у сваком нормираном простору $(X, \|\cdot\|)$ који имају особине *глаткости*(S), *стриктне конвексности*(SC) и рефлексивности (R) постоји јединствен функционал $g : X^2 \to R$ дефинисан са

$$g(x,y) := \|x\| \lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}$$

који има особине:

$$g(x,x) = \|x\|^2,$$
$$g(ax,by) = abg(x,y),$$
$$g(x,y+z) = g(x,y) + g(x,z),$$
$$|g(x,y)| \le \|x\|\|y\| \quad \left(a,b \in R; x,y \in X\right).$$

У нормираним просторима у којима постоји и скаларни производ $(\cdot\cdot)$ лако се доказује да важи идентитет

$$g(x,y)=(x,y).$$

Следећи аналогију дефиниције угла у еуклидским просторима, захваљујући наведеним особинама $g-$функционала а највише задњој особини (*Коши-Шварц-Буњаковскијева* неједнакост за нормиране просторе), у нормираном простору $(X,\|\cdot\|)$, са наведеним особинама (S), (SC) и (R) могуће је дефинисати косинус угла φ $(0 \le \varphi \le \pi)$ између вектора x и y тог простора на следеће начине (видети и [7]):

$$\cos\angle_1(x,y) := \frac{g(x,y)}{\|x\|\,\|y\|},$$

$$\cos\angle_2(x,y) := \frac{g(x,y)+g(y,x)}{2\|x\|\,\|y\|},$$

$$\cos\angle_3(x,y) := \frac{\|x\|^2 g(x,y)+\|y\|^2 g(y,x)}{\|x\|\|y\|(\|x\|^2+\|y\|^2)}.$$

У случају да на X^2 постоји и скаларни производ $(\cdot,\cdot)$, тј. да је X еуклидски простор, свака од ових дефиниција се своди на дефиницију угла преко скаларног производа. Осим тога, за други и трећи угао дефинисани на горњи начин важи симетрија

$$\cos\angle(x,y)=\cos\angle(y,x).$$

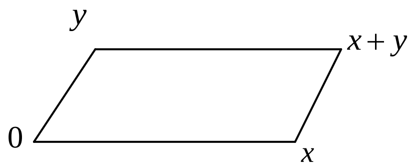
Овако дефинисане углове звaћемо $g-$*угловима*. Угао дефинисан првом једнакошћу звaћемо g_1-***угао***, угао дефинисан другом једнакошћу зовемо g_2-***угао*** и угао дефинисан трећом једнакошћу зовемо g_3-*угао*.

На природан начин сада уводими три врсте ортогоналности углова, по правилу

$$(x\perp y \Leftrightarrow \cos\angle(x,y)=0).$$

Овако дефинисане ортогоналности вектора звaћемо $g-$*ортогоналностима* и то ортогоналност коју дефинише g_1-угао биће g_1-*ортогоналност*, угао g_2 дефинише g_2- ***ортогоналност*** и g_3 дефинише g_3-*ортогоналност*.

Ако се има у виду да се сваки векторски нормиран простор X може третирати и као афини простор чије елементе (*тачке*) одређују одговарајући вектори положаја онда можемо у таквим просторима разматрати и неке елементе геометрије [11]. На пр. *вектор* x у нрмираном ростору X можемо третирати као вектор положаја *тачке* x (радијус вектор тачке x) одговарајућег афиног простора. Уређеном пару тачака (x,y) у афином простору одговара вектор $x-y$ у векторском простору.За векторе x и y нормираног простора X , број $\|x-y\|$ можемо третирати као растојање између тачака x и y одговарајућег афиног нормираног простора или као норма вектора $x-y$ нормираног простора X. У афином простору скуп тачака $\overline{xy} := tx+(1-t)y$ за $0 \le t \le 1$ зовемо *дуж* са крајевима x и y, а скуп тачака $tx+(1-t)y$ за $t \in R$ називамо *правом* одређеном тачкама x и y. Осим тога казаћемо да су: вектори x и λx *паралелни,* да је вектор $x_0 := \frac{x}{\|x\|}$ *орт* вектора x, да су дужи $\overline{xy}$ и $\overline{pq}$ паралелне ако су одговарајући вектори $y-x$ и $q-p$ паралелни, да су углови $\angle(x,y)$ и $\angle(\lambda x,\mu y)(\lambda,\mu \in R)$ углови са паралелним крацима. У смислу горе реченог, уређену четворку $(0,x,x+y,y)$, (0 је ознака за *нула вектор* у векторском простору X), можемо назвати *паралелограм* са теменима редом $0,x,x+y,y$; као на следећој слици.



Његове странице су $\overline{0x}, \overline{x\,x+y}, \overline{x+y\,y}, \overline{y0}$, при чему су вектори који дефинишу супротне странице паралелни. Ако је $\|x\| = \|y\|$ онда су све странице овог паралелограма једнаке па га у том случају зовемо *ромбом.* А ако је бар један угао паралелограма $g-$прав онда га зовемо $g-$*правоугаоник.*

Према предложеним дефиницијама и особинама $g-$функционала лако је видети да у сваком нормираном простору, за сва три $g-$угла, важе особине:

1) $\angle(x,y) = \angle(x_0,y_0)$,

2) $g-$углови (исте врсте) са паралелним крацима су међусобно једнаки,

3) Унакрсни $g-$углови (супротни углови), исте врсте, су једнаки,

4) У паралелограму супротни $g-$углови исте врсте, су једнаки.

За уведене ортогоналности видимо да све три ортогоналности имају ососбину *недегенеретивности* ($x \perp x \Rightarrow x = 0$). Особину *симетричности* ($x \perp y \Rightarrow y \perp x$) имају g_2 ортогоналност и g_3 ортогоналност. Све три $g-$ ортогоналности имају особину *хомогености* ($x \perp y \Rightarrow ax \perp by,\ a,b \in R$). Особину *десне адитивности* ($x \perp y\ x \perp z \Rightarrow x \perp y+z$) има g_1 ортогоналност. Особину *резолвабилноси* (за сваке $x,y \in X$ постоји $a \in R$ такав да је $x \perp (ax+y)$) има такође g_1 ортогоналност (према особинама $g-$функционала на вектор $h = -\frac{g(x,y)}{\|x\|^2}x+y$ је g_1 ортогоналан вектор x).

Даље особине ортогоналности посматрамо у посебним нормираним просторима које зовемо ***квазиеуклидским просторима.*** У њима ће уведене дефиниције доћи до пуног изражаја. Те просторе означавамо са K [8]. Ради се о норираним просторима $(X,\|\cdot\|)$ који испуњавају слов

$$(*) \quad (\forall x, y \in X)\, \|x+y\|^4 - \|x-y\|^4 = 8[\|x\|^2 g(x,y) + g(y,x)].$$

Овај идентитет важи и у сваком еуклидском простору. Он је, у ствари, уопштење Аполонијеве једнакости паралелограма у еуклидској геометрији.

Иначе је у [8] је доказано да је сваки квазиеуклидски простор K гладак (има особину(S), стриктно конвексн (са особином(SC)) и, ако је комплетан, он је рефлексиван (са особином (R)).

Посебно сада истичемо нека тврђења о уведених појмова која важе у простору K. Она говоре о сличности простора K и простора E.

5) У простору K важи $(\forall x, y \in K)\ x \perp_{g_1} y \Leftrightarrow x \perp_B y$, тј $g_1 -$ортогоналност је еквивалентна са Биркофљевом ортогоналношћу, краће$\perp_{g_1} = \perp_B$. (Простор K је гладак па важи Теорема у [7]).

6) У K простору $\forall (i \in \{1,2,3\})\ \cos \angle_i (x_0, y_0) = 1 \Rightarrow x_0 = y_0$. ($E$ простор је стриктно конвексан ([8]) па важи тврђење Леме 5 из [10]).

7) У K простору g_3 ортогоналност је еквивалентна са Џемсовом амесовом ортогоналношћу ($\perp_J = \perp_{g_3}$). (Доказ непосредно следи из особине $(*)$).

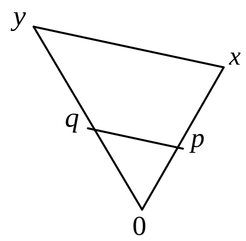
8) У K простору g_2ортогналност је еквивалентна са Зингровом ортогоналношћу ($\perp_J = \perp_{g_2}$).

9) Важи тврђење $(\forall x, y \in K)\ x \perp_R y \Leftrightarrow x \perp_B y \wedge y \perp_B x.$ (За доказ тврђења користимо тврђење 6) и јднакост полинома са нулом. Имамо:

$$x \perp_R y \Leftrightarrow (\forall t \in R)\, \|x+ty\| = \|x-ty\| \Leftrightarrow \|x+ty\|^4 - \|x-ty\|^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \|x\|^2 g(x,y)t + \|y\|^2 g(y,x)t^3 = 0 \Leftrightarrow g(x,y) = 0 \wedge g(y,x) = 0.)$$

10) Дуж која спаја средине двеју страна троугла паралелна је са трећом страном и њена дужина је једнака половини дужине треће стране. (На следећој слици посматрамо троугао са теменима$0, x, y$. Нека је p средиште страница $\overline{0x}$ и q средиште странице $\overline{0y}$.Тада је: $p = \frac{x}{2}$, $q = \frac{y}{2}, p - q = \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}(x-y)$ и $\|p-q\| = \frac{1}{2}\|x-y\|$.

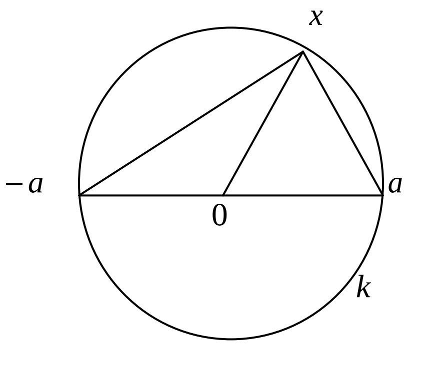


11) дијагонале паралелограма $(0, x, x+y, y)$ се полове у тачки $\frac{x+y}{2}$. (Кад је $t=\frac{1}{2}$, на дужи $\overline{xy}=\{z=tx+(1-t)y | t\in[0,1]\}$, добијамо тачку $\frac{x+y}{2}$.Осим тога је $\frac{x+y}{2}-x=\frac{y-x}{2}$, $\frac{x+y}{2}-y=\frac{x-y}{2}$ и $\|x-y\|=\|y-x\|$).

12) Ако су дијагонале паралелограма $(0, x, x+y, y)$једнаке онда је тај паралелограм g_3-правоугаоник. Важи и обратно. (У ствари, то је геометријска интерпретација тврђења 6)).

13) Ако су дијагонале паралелограма g_3-ортогоналне, онда је тај паралелограм ромб. (Према тврђењу$(*)$, из $\|(x+y)+(x-y)\|=\|(x+y)-(x-y)\|$ следи $\|x\|=\|y\|$).

14) Угао над пречником круга је g_3-прав ($\angle_3=\pi/2$). (Нека је $\overline{-aa}$ пречник круга k и x тачка тог круга, види следећу слику.



Тада вектор $a-x$ и вектор $-a-x$ заклапају g_3-прав угао јер је

$$\|(a-x)+(-a-x)\|^4-\|(a-x)-(-a-x)\|^4=\|2x\|^4-\|2a\|^4=0,$$

па је, према 7), $\angle_3 = \pi/2$).

15) У рефлексивном K простору површина паралелограма $(0,x,x+y,y)$, P, једнака је $\|x\|\|y\|$ ако и само акоје $x\perp_D y$. (Према Силервмановој дефиницији површине троугла $(0,x,y)$ [12] имамо

$$P=\sup\{f(x)g(y)-f(y)g(x) | f,g\in S(E^*)\},$$

где је $S(E^*)$ јединична сфера дуалног простора E^*. Ако је $x\perp_D y$, према дефиницији Деминијеве ортогоналности вектора x и вектора y добијамо $P=\|x\|\|y\|$. Обратно директно следи из дефиниција поменутих појмова.)

Литература

[1] J. Alonso and C. Benitez, *Orthogonality in normed linear spaces: A survey, Part I: Main properties,* Extracta Mathematicae 3(1)(1988), 1-15.

[2] J. Alonso and C. Benitez, *Orthogonality in normed linear spaces: A survey, Part II: Relations between orthogonalities,* Extracta Mathematica 4(3)(1989), 121-131.

[3] D. Amir, *Characterizatins of Inner product Spaces,* Birkhäuser Basel, 1986.

[4] S. S. Dragomir, *Semi-Iner products and Applications,* Nova Science Publisvers Inc. New York, 2004.

[5] P. M. Miličić, *Prostori sa poluskalarnim proizvodima i neke primene na normirane algebre,* Doktorska disertacija, PMF Beograd, 1970.

[6] P. M. Miličić, *Sur le semi-produit scalaire dans quelques espaces normés,* Mat. Vesnik, 23(2)(1971), 181-185

[7] P. M. Miličić, *Sur le g-angle dans un espace normé,* Mat.Vesnik 45(1)(1993), 43-48.

[8] P. M. Miličić, *A generalization of the parallelogram equality in normed spaces,* J. Math. Kyoto Univ., 38(1)(1998), 71-75.

[9] P. M. Miličić, *On the quasi-inner product spaces,* Mat. Bilten (Skopje), 22 (XLVIII) (1998), 19-30

[10] P. M. Miličić, *Characterizations of convexities of normed spaces by means of g-angles,* Mat.Vesnik 54(1-2)(2002), 37-44

[11]] P. M. Miličić, *10 tema iz matematike*, Zavod za udžbenike Beograd, 2010

[12] E. Silverman, *Definitions of area for surfaces in metric spaces,* Riv. Mat. Univ. Parma, 2(1951), 47-76

[13] P. M. Miličić, *On the g-orthogonal projection and the best approximation of a vector in a qu asi-inner product spaces,* Sci. Math. Japonica, 54(3)(2001), 539-542

[14] P. M. Miličić, *On the best approximation in smooth and uniformly convex real Banach space*, Fakta Universitatis (Niš), Ser. Math.Inf. 20(2005), 57-64

[15] P. M. Miličič, *On the B-angle in normed spaces,* J. Inequal. Pure and Appl. Math., 8(3) (2007), Article 99, 9pp.

[16] P. M. Miličić *Sur la decomposition orthogonal du vecteur dans certains espaces norme*, Mat. Vesnik, 26(4)(1974), 273-275.
[17] P. M. Miličić, *Les systèmes orthonormeaux dans des espaces normés,* Mat. Vesnik, 29(3)(1977), 243-249.
[18] P. M. Miličić, *Sur les suits orthonormeuax dans des espaces normés,* Mat. Vesnik 33(1)(1981), 95-102.
[19] P. M. Miličić, *Sur la g-orthogonalité dans des espaces normés*, Mat. Vesnik, 39(3)(1987), 325-334.
[20] P. M. Miličić, *La fonctionnelle g et quelques problmèmes des meilleures approximations dans des espaces normés,* Publ. de l'Institute Math., Nouvelle série, 48(62) (1990), 110-118.
[21] P. M. Miličić, *Sur la géométrie d'un espace normé avec la propriété(G),* Proc. Internat.Workshop in Analysis and its Apppl., Kupari 1990 (pp. 163-170), Univ. Novi Sad, Inst. za Matematiku, 1991.
[22] P. M. Miličić, *On definitions of the area of plane figures in normed spaces* , Publ. ETF Univ. u Beogradu, Serija matematika, 9(1998), 75-78.
[23] P. M. Miličić, *The angle modulus of the deformation of a normed space,* Riv. Math. Univ. Parma, 6(3)(2000), 101-111.