MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXIII (1)(2017), 1-7 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1701001A

ZANIMLJIV NAČIN IZRAČUNAVANJA NEKIH GRANIČNIH VRIJEDNOSTI FUNKCIJA

Šefket Arslanagić,
Sarajevo, BiH

Sažetak: U ovom radu je dat jedan zanimljiv način izračunavanje graničnih vrijednosti nekih funkcija.Tu često koristimo poznate granične vrijednosti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,,$$

te **Lopitalovu**[1] **teoremu** ukoliko se radi o neodređenim oblicima $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty$ i ∞^0.

Ključne riječi: granična vrijednost funkcije, Lopitalova teorema, **Tejlorova**[2] i **Maklore-nova**[3] formula, **Lagranžov**[4] i **Košijev**[5] ostatak.

One interesting way of computation of some limiting values of the functions

Abstract: In this paper are gived one interesting way of computation of some limiting values of the functions. We use here the known limiting values:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ and } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

Key words and phrases: limiting value of the function, L'Hospital's theorem, Taylor's and Maclaurin's formula, Lagrange's and Cauchy's residue.

AMS Subject Classification (2010): 97 F 50

[1] Guillaume François Antoine l'Hôspital (1661.-1704.), francuski matematičar
[2] Brook Taylor, (1685.-1731.), engleski matematičar
[3] Colin Maclaurin(1698. – 1746.), škotski matematičar
[4] Joseph-Louis Lagrange (1736.-1813.), francuski matematičar
[5] Augustin Louis Cauchy (1789.-1857.), francuski matematičar

ZDM Subject Classification (201): F 50, N 50

U ovom radu ćemo pokazati kako se veoma brzo i uspješno izračunavaju neki na prvi pogled komplikovani limesi koristeći Tejlorovu formulu koja glasi:

Ako funkcija f ima neprekidan n-ti izvod na segmentu $[a,x]$ i ako postoji konačan ili beskonačan $(n+1)$-vi izvod na intervalu (a,x), tada važi Tejlorova formula:

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x) \tag{1}$$

gdje je

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\left(a+\theta(x-a)\right);\ (0<\theta<1)$$

ostatak Tejlorovoge formule u Lagranžovom obliku, a

$$R_n(x)=\frac{(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1}}{n!}f^{(n+1)}\left(a+\theta_1(x-a)\right);\ (0<\theta_1<1)$$

ostatak u Košijevom obliku. Ostatak $R_n(x)$, kada $x\to a$ predstavlja beskonačno malu višeg reda u poređenju sa $(x-a)^n$, tj.

$$R_n(x)=0\left((x-a)^n\right).$$

Neka funkcija f u tački $x=a$ ima konačan n-ti izvod $f^{(n)}(a)$. Polinom

$$T_n(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \tag{2}$$

se zove Tejlorov polinom n-tog stepena funkcije f u tački $x=a$.

Specijalno za $a=0$ iz Tejlorove formule (1) se doboja Maklorenova formula:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f^2(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),\ (0<\theta<1), \tag{3}$$

odnosno iz Tejlorovog polinoma (2) dobijamo Maklorenov polinom:

$$T_n(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f^2(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0). \tag{4}$$

Sada ćemo dati više primjera izračunavanja graničnih vrijednosti koristeći formule (2) ili (4) za neke konkretne funkcije.

□

Primjer 1. Izračunati

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x - ln(x+1)}{(x^m + k)sin^2 x}, \text{ gdje } m \in \boldsymbol{N}.$$

Rješenje: Ovo je granična vrijednost oblika $\frac{0}{0}$, ali brzo bi uvidjeli da nas primjena Lopitalove formule ne bi dovela lako do rješenja.

Zbog $x \to 0$ i $\lim_{x\to 0}\frac{sin\, x}{x} = 1$, imamo:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x - ln(x+1)}{(x^m + k)sin^2 x} = \frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{x - ln(x+1)}{\frac{sin^2 x}{x^2}\cdot x^2} = \frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{x - ln(x+1)}{x^2},$$

a odavde zbog (4) za funkciju $f(x) = ln(x+1) \approx x - \frac{x^2}{2}$:

$$L = \frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{x - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2k} = \begin{cases} \frac{1}{2k}, & k \neq 0 \\ +\infty, & k = 0. \end{cases}$$

□

Primjer 2. Izračunati

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}\cdot cos\, x}{tg^4 x}.$$

Rješenje: I ovdje se radi o graničnoj vrijednosti oblika $\frac{0}{0}$, ali put do rješenja koristeći Lopitalovu teoremu bi bio veoma zamršen i neizvjestan. No, koristeći (4) za funkcije $f(x) = \sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ i $g(x) = cos\, x$ imamo:

$$f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$$

i

$$g(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Sada dobijamo vodeći računa da važi $tgx \approx x; (x \to 0)$:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\cos x}{tg^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)}{tg^4 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{24}x^4+\ldots}{x^4}=\frac{1}{3}.$$

□

Primjer 3: Izračunati

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}.$$

Rješenje: Ovo je opet slučaj $\frac{0}{0}$. Naćemo graničnu vrijednost koristeći Lopitalovu teoremu. Imamo

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{3}.$$

Ovo je bilo dosta lagano. No, koristeći (4) za funkciju $f(x)=arctgx$, tj. $arctgx\approx x-\frac{x^3}{3}$ brzo dobijamo da je:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

□

Primjer 4. Ispitati diferencijabilnost funkcije:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[3]{2e^x-x^2-2x-2}$$

u tački $x=0$.

Rješenje: Dobili bi da je prvi izvod ove funkcije $f'(x)$ prilično nezgrapan, pa ćemo zadatak riješiti nalazeći graničnu vrijednost:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\ \text{(jer je } f(0)=0\text{)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{e^x-\frac{x^2}{2}-x-1}}{x}.$$

I ovaj limes je oblika $\frac{0}{0}$, ali upotreba Lopitalove teoreme za njegovo izračunavanje bi bila prilično mukotrpna.

Opet ćemo koristiti (4) za funkciju $f(x)=e^x$, tj.

$$e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots,$$

te imamo

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\frac{x^3}{3!}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt[3]{\frac{1}{6}}}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}.$$

Dakle, data funkcija f je diferencijabilna u tački $x=0$.

□

Primjer 5. Izračunati

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-ctg^2x\right).$$

Rješenje: Ovaj limes je oblika $\infty-\infty$, koji se transformiše u oblik $\frac{0}{0}$, tj.:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x-x^2cos^2x}{x^2sin^2x}$$

ali nas korištenje Lopitalove teoreme ne bi brzo dovelo do rješenja.

Koristićemo **Loranovu[6] formulu za funkciju** $f(x)=ctgx$, tj. $ctgx\approx\frac{1}{x}-\frac{x}{3}$. Sada dobijamo:

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{3}\right)^2\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}+2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}\right)=\frac{2}{3}.$$

□

Primjer 6. Dokazati da za sve $n\in ¥$ važi nejednakost

$$ln(n+1)>ln\,n+\frac{2}{2n+1}.$$

Rješenje: Koristeći (4) za funkcije $f(x)=ln(1+x)$ i $g(x)=ln(1-x)$ imamo:

[6] Pierre Alphonse Laurent (1813.-1854.), francuski matematičar i fizičar

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

$$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots,$$

gdje važi $-1 < x < 1$.

Sada dobijamo:

$$ln(1+x) - ln(1-x) = ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right).$$

Stavljajući da je $x = \frac{1}{2n+1}$; ($n \in ¥, 0 < x < 1$) imamo:

$$ln\frac{1+x}{1-x} = ln\frac{\frac{2n+2}{2n+1}}{\frac{2n}{2n+1}} = ln\frac{n+1}{n} = 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \dots\right),$$

a odavde:

$$ln(n+1) - ln\,n = \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{3(2n+1)^3} + \dots$$

ili

$$ln(n+1) > ln\,n + \frac{2}{2n+1}, \text{ q.e.d.}$$

□

Primjer 7. Izračunati

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

Rješenje: Ovaj limes je oblika $\frac{0}{0}$. Kako je $(cosx)^{\sin x} = e^{ln(\cos x)^{\sin x}} = e^{\sin x \ln\cos x}$, to koristeći (4) ta funkciju $f(x) = e^x$, dobijamo:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\sin x \ln\cos x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+\sin x\ln\cos x + o\left(x^3\right)\right)}{x^3} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ln\cos x}{x^3} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot ln\sqrt{1-\sin^2 x}}{x^3} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}ln\left(1-\sin^2 x\right)}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1-\sin^2 x\right)}{2x^2},$$

a odavde koristeći (4) za funkciju $g(x)=ln\left(1-sin^2 x\right)$ dobijamo:

$$L=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-sin^2 x+0\left(x^2\right)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

□

Preporučujemo da čitaoci ovog rada dokažu sljedeće jednakosti koristeći (4) za određene funkcije:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos\,x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=-\frac{1}{12}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)-x\,cos\,x}{\sqrt{1-x^2}-1}=1$;
3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)=\frac{1}{3}$.

LITERATURA

[1] D. Adnađević, Z. Kadelberg: *Matematička analiza I*, Nauka, Beograd, 1998.

[2] M. Marjanović: *Matematička analiza I*, Naučna knjiga, Beograd, 1983.

[3] B. Mesihović, Š. Arslanagić: *Zbirka riješenih zadataka i problema iz matematike sa osnovama teorije i ispitni zadaci*, Svjetlost, Sarajevo, 1988.

Primljeno u redakciju 27.12.2016. Dostupno online 16.01.2016.