MAT-KOL (Banja Luka)
XXII (2)(2016), 91-105
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5828 (o)

O IRACIONALNIM BROJEVIMA

Miomir Anđić
andjicm@t-com.me

"Nedostojan je čovjekovog imena ko ne zna da dijagonala kvadrata nije samjerljiva sa njegovom stranicom"

Platon

Dugo je trebalo da se iracionalni brojevi nastane u zgradu matematike. U nastavi matematike im se relativno malo posvjećuje pažnje. Osim definicije iracionalnog broja i već tradicionalnog dokaza da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj, o tim brojevima se gotovo više i ne govori. Ovaj članak je napisan sa namjerom da se o iracionalnosti brojeva kaže nešto više, tim prije što je iracionalnost mnogih brojeva dokazana u novije vrijeme.

Jedan pristup dokazivanju iracionalnosti brojeva

U elementarnoj matematici se često javljaju brojevi kao $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{5},\ \log_2 3,\ tg5^0,\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt[3]{3}},\ \pi$ itd, za koje se pitamo da li su racionalni ili iracionalni. Odgovor na ovakvo pitanje nije jednostavan. U ovom članku daćemo neke mogućnosti dokazivanja iracionalnosti datih realnih brojeva. Pri tom ćemo se koristiti sljedećim poznatim pojmovima i teoremama elementarne teorije brojeva.

Podsjetimo se prvo relacije | djeljivosti u skupu cijelih brojeva Z, definicije prostog broja, a prvenstveno pojma racionalnog i iracionalnog broja i odgovarajućih skupova Q i I. Isto tako, podsjetimo se pojma najvećeg zajedničkog djelioca dva broja $x, y \in N$ ($NZD(x, y)$) i pojma relativno ili uzajamno prostih brojeva, kao i definicije logaritma pozitivnog realnog broja.

TEOREMA 1. *Za prirodne brojeve* x, y *i* n *važi implikacija* $x \mid y \Rightarrow x \mid y^n$. *Ako je* x *prost broj, tada važi i obrnuta implikacija.*

TEOREMA 2. *Za prirodne brojeve* $x_1, x_2, ..., x_n, y$ *važi implikacija*

$$x_1 x_2 ... x_n \mid y \Rightarrow x_1 \mid y \wedge x_2 \mid y \wedge ... \wedge x_n \mid y.$$

Ako su $x_1,\ x_2, ..., x_n$ *međusobno različiti prosti brojevi, tada važi i obrnuta implikacija.*

TEOREMA 3. *Svaki prirodan broj* $x>1$ *može se napisati u obliku proizvoda prostih brojeva* $p_1, p_2, ..., p_n$.

PRIMJEDBA 1. U teoremi 3, ako se broj p_i ponavlja više puta, na primjer k_i puta $(i=1,2,...,n)$, onda se broj x može napisati u obliku $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_n^{k_n}$.

Ovo je osnovni stav aritmetike i može se pokazati da je pomenuti rastav jedinstven, sa tačnošću do poretka činilaca. Ako je $k_i = 1$ za svako $i \in \{1,2,...,n\}$, onda se x razlaže u proizvod prostih brojeva koji su svi različiti.

DEFINICIJA 1. Realan broj x je racionalan ako se može zapisati u obliku $\frac{p}{q}$, gdje $p \in Z$ a $q \in N$.

Iz definicije slijedi da racionalan broj možemo napisati u obliku $\frac{p}{q}$ i da je $NZD(p,q)=1$ (brojevi p i q su uzajamno prosti). Ovo je važna osobina racionalnih brojeva.

DEFINICIJA 2. Ukoliko realan broj nije racionalan za njega kažemo da je iracionalan.

NAPOMENA 1. Skupovi N, Z, Q, I, R su redom skupovi svih prirodnih, cijelih, racionalnih, iracionalnih i realnih brojeva, pri čemu je $R = Q \cup I$, odnosno $I = R \setminus Q$.

TEOREMA 4. Realan broj je racionalan ako i samo ako ima konačan ili periodičan zapis.

Navedimo sada neke jednostavne stavove koji će nam poslužiti za dokazivanje iracionalnosti.

U dokazima se često koristiti zakon *Reductio ad absurdum* - svođenje na protivurječnost (kontradikciju). Zakon glasi: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \Rightarrow (r \wedge \neg r)$ ili $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \Rightarrow r$, gdje je r neistinit iskaz.

PRIMJER 1. Broj $\sqrt{2}$ je iracionalan.

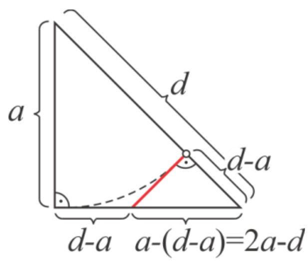
Dokaz 1. Da bi dokaz izveli koristeći zakon *Reductio ad absurdum,* uvedimo iskaze $p, q, r, \neg r$ na sljedeći način: p: Broj je $\sqrt{2}$; q: taj broj je iracionalan; r: $NZD(p,q)=1$ i $\neg r$: $NZD(p,q) \neq 1$.

Pretpostavimo suprotno da je $\sqrt{2}$ racionalan broj, tj. da je $\sqrt{2}=\frac{p}{q}, p,q\in N$, pri čemu je $NZD(p,q)=1$. Kvadriranjem dobijamo $2=\frac{p^2}{q^2}$, a odavde je $2q^2=p^2$ (*). Kako je lijeva strana djeljiva sa 2, to i desna mora biti djeljiva sa 2, tj p je paran broj koji se može napisati u obliku $p=2k_1, k_1\in N$. Uvrstimo li ovo u (*), nakon dijeljenja sa 2, dobijamo $q^2=2k_1^2$. Na isti način se zaključuje da mora biti i $q=2k_2, k_2\in N$. Ali, iz $p=2k_1$ i $q=2k_2$ slijedi da $2\mid p$ i $2\mid q$, tj. da je $NZD(p,q)>1(\neq 1)$ što je kontradikcija sa $NZD(p,q)=1$. Dakle, $\sqrt{2}$ je iracionalan broj.

Ovakav dokaz može se naći u udžbenicima za sve nivoe obrazovanja, a potiče još iz doba Euklida, o čemu će biti riječi u istorijskom dijelu ovog rada.

Dokaz 2. Riječ je o geometrijskom dokazu, koji je manje poznat, i svojstven je starim Helenima, pri čemu se koristi ista metoda kao u prethodnom dokazu.

Sa slike 1 se jasno vidi da su veliki i mali pravougli trouglovi slični. Ako bi odnos hipotenuze i katete kod velikog jednakokrako pravouglog trougla bio jednak $\frac{d}{a}$, gdje su d i a uzajamno prosti prirodni brojevi, tada bi isti takav odnos postojao i kod manjeg trougla i on bi iznosio $\frac{2a-d}{d-a}$. Kako su brojevi u brojiocu i imeniocu ovog razlomka manji nego u prvom razlomku, zaključuje se da smo skratili prvi razlomak, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom da su d i a uzajamno prosti.



Slika 1

STAV 1. *Ako su* $x_1, x_2, \ldots x_m$ *različiti prosti brojevi i* $n\geq 2$ *prirodan broj, tada je* $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_m}$ *iracionalan broj.*

Dokaz. Pretpostavimo, suprotno, da je pomenuti broj racionalan, tj. da je $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_m}=\frac{p}{q}$, pri čemu je $p,q\in N$ i $NZD(p,q)=1$. Stepenovanjem sa n imamo

(1) $$p^n=x_1x_2\ldots x_m q^n,$$

odakle na osnovu definicije djeljivosti brojeva imamo da $x_1x_2\ldots x_m\mid p^n$. Koristeći teoremu 2 dobijamo da $x_1\mid p^n, x_2\mid p^n,\ldots,x_m\mid p^n$, a kako su brojevi $x_1,x_2,\ldots,x_m$ prosti to na osnovu teoreme 1 slijedi $x_1\mid p,\ x_2\mid p,\ldots,x_m\mid p$. Teorema 2 sada povlači da $x_1x_2\ldots x_m\mid p$, pa postoji $k\in N$, tako da je $p=kx_1x_2\ldots x_m$.

Zamjenom u (1) dobijamo $k^n(x_1x_2...x_m)^{n-1}=q^n$, pa, zbog $n\geq 2,\ x_1x_2...x_m\,|\,q^n$. Odakle, ponovo primjenom teorema 1 i 2 , $x_1\,|\,q,\ x_2\,|\,q,...,x_m\,|\,q$. no, to znači da brojevi p i q imaju zajedničke faktore $x_1,x_2,...,x_m$, što je u suprotnosti pretpostavci $NZD(p,q)=1$. Zaključujemo da je $\sqrt[n]{x_1x_2...x_m}$ iracionalan broj.

PRIMJER 2. Brojevi $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7}, \sqrt[3]{2},\ \sqrt[5]{3},\ \sqrt[7]{10},\ \sqrt[101]{210}$ su iracionalni.

STAV 2. $\sqrt[n]{x}$ *je iracionalan broj ako se* $x\in N$ *ne može napisati u obliku* n*-tog stepena nekog prirodnog broja,* $n\in N\setminus\{1\}$.

Dokaz 1. Pretpostavimo da je $\sqrt[n]{x}$ racionalan broj. To znači da se taj broj može napisati u obliku neskrativog razlomka, tj. u obliku $\dfrac{p}{q}$, gdje su p i q uzajamno prosti brojevi. Tada je razlomak $\dfrac{p^n}{q^n}=\dfrac{x}{1}$ neskrativ, a to je moguće samo ako je $x=p^n$ i $q=1$, što je kontradikcija sa pretpostavkom.

Dokaz 2. Dokazaćemo stav za slučaj $n=2$.

Na osnovu teoreme 3 i primjedbe 1, prirodan broj x se može napisati u obliku $x=p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_n^{k_n}$, gdje su $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_m$ međusobno različiti prosti brojevi, a $k_1,\ k_2,\ ...,\ k_m$ prirodni brojevi. Prema pretpostavci ovog stava, nijesu svi brojevi $k_1,\ k_2,\ ...,\ k_s$ djeljivi sa 2. Tada se broj $\sqrt{x}$ može napisati u obliku

$$\sqrt{x}=y\sqrt{p_1p_2...p_s}\,,$$

gdje je y prirodan broj. Na osnovu stava 1, broj $\sqrt{p_1p_2...p_s}$ je iracionalan, pa je takav i broj $\sqrt{x}$, kao proizvod iracionalnog broja i racionalnog broja y različitog od nule.

Dokaz 3. Pretpostavimo suprotno da $\sqrt[n]{x}=\dfrac{p}{q}\in Q,\ NZD(p,q)=1$ i da su $p=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_t^{n_t}$ i $q=q_1^{l_1}q_2^{l_2}\cdots q_s^{l_s}$ rastavi brojeva p i q na proste faktore. Kako je $NZD(p,q)=1$, to je $p_i\neq q_j$ za sve $i\in\{1,2,...,t\}$ i $j\in\{1,2,...,s\}$ i $p^n=p_1^{n_1n}p_2^{n_2n}\cdots p_t^{n_tn}$ ne sadrži ni jedan prost faktor q_j. Sa druge strane, stepenovanjem sa n prve jednakosti u pretpostavci dobijamo $p^n=xq_1^{l_1n}q_2^{l_2n}\cdots q_s^{l_sn}$, odakle slijedi da p^n sadrži faktor q_j, što je suprotno pretpostavci. Dakle, $\sqrt[n]{x}\in I$.

PRIMJER 3. Brojevi $\sqrt{6},\ \sqrt{8},\ \sqrt{12},\ \sqrt[3]{16},\ \sqrt[5]{250}$ su iracionalni.

STAV 3. Ako su k i n uzajamno prosti brojevi različiti od 1, tada $\log_k n \in I$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je $\log_k n = \frac{p}{q}$ neskrativ razlomak, tada je $k^{\frac{p}{q}} = n \Leftrightarrow k^p = n^q$, što je nemoguće, jer k i n nemaju zajedničkih djelilaca.

STAV 4. $\log_y x$ *je iracionalan broj, gdje* $x,\ y \in N,\ x > 1,\ y > 1,\ x \neq y$ *i moguće je naći prost faktor jednog od brojeva* $x,\ y$ *koji nije ujedno prost faktor drugog od tih brojeva.*

Dokaz. Pretpostavimo, suprotno, da je $\log_y x$ racionalan broj, tj.

$$\log_y x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in N, \quad NZD(p, q) = 1$$

Na osnovu definicije logaritma imamo $x = y^{\frac{p}{q}}$, odakle se poslije stepenovanja sa q dobija $x^q = y^p$, što protivurječi teoremi o jedinstvenom razlaganju na proste faktore (primjedba 1). Ovakav zaključak slijedi iz postavke stava 3, jer postoji prost faktor jednog od brojeva x, y koji nije faktor drugog. Dakle $\log_y x \in I$.

Navodimo bez dokaza i sljedeći stav.

STAV 5. $\log_y x \in I$ *ako se prirodni brojevi ne mogu napisati kao stepeni istog prirodnog broja.*

PRIMJEDBA 2. Ako bi $x,\ y$ bili stepeni istog broja, npr. $x = z^p$ i $y = z^q$, onda bi na osnovu pravila koja važe za logaritme bilo $\log_y x = \log_{z^q} z^p = \frac{p}{q} \in Q.$

PRIMJER 4. $\log_2 3$ i $\log_{15} 18$ su iracionalni brojevi na osnovu stava 4. $\log_{20} 50 \in I$ na osnovu stava 5.

Dokažimo još dva jednostavna stava.

STAV 6. *Ako je* x *iracionalan broj, onda je i* $\sqrt[n]{x}$ *takođe iracionalan broj za* $n \in N.$

Dokaz. Ako bi broj $\sqrt[n]{x}$ bio racionalan, i njegov n-ti stepen, tj. broj x morao bi biti racionalan, što je suprotno pretpostavci.

PRIMJER 5. $\sqrt[n]{\log_2 3} \in I,\ \sqrt[n]{\log_{20} 50} \in I$ za $n \in N.$ Ovo slijedi iz stava 6 i primjera 4.

STAV 7. *Ako* $r \in I$ *i* $p, q \in Q,\ q \neq 0$, *tada je* $p + qr \in I.$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da $p + qr = s \in Q$, odakle je $r = \dfrac{s - p}{q} \in Q$, što je suprotno pretpostavci stava.

PRIMJER 6. $2 + 3\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}\log_2 3,\ -0,7(3 + \sqrt[3]{2}) \in I.$

PRIMJEDBA 3. Proizvod racionalnog i iracionalnog broja je iracionalan broj. Dokaz slijedi iz stava 6 za $p = 0.$

PRIMJER 7. $4\sqrt{3},\ -\dfrac{4}{5}\log_{15} 18 \in I.$

STAV 8. *Recipročna vrijednost iracionalnog broja je iracionalan broj.*

Dokaz je analogan dokazu stava 6.

PRIMJER 8. $\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\log_2 3} \in I.$

Sljedeća tri stava ukazuju na činjenicu da su, uz neke izuzetke, vrijednosti trigonometrijskih funkcija uglova, koji imaju racionalan broj stepena, iracionalne.

STAV 9. *Ako je* α *mjera nekog oštrog ugla u stepenima , takva da je* $\alpha \neq 45^0$ *i* $\alpha = \dfrac{m}{n} \cdot 180^0$, *pri čemu* $m, n \in N$, *tada je broj* $tg\alpha$ *iracionalan.*

Dokaz (Vidjeti [2]).

PRIMJER 9. $tg1^0, tg2^0, tg3^0, \cdots, tg44^0, tg46^0, tg47^0, \cdots, tg88^0, tg89^0 \in I$ (za $n = 180$ i za $m \in \{1, 2, 3, ..., 44, 46, 47, ..., 88, 89\}$).

STAV 10. *Ako je* α *mjera nekog oštrog ugla u stepenima, takva da je* $\alpha \neq 45^0$ *i* $\alpha = \dfrac{m}{n} \cdot 180^0$, *pri čemu* $m, n \in N$, *tada je broj* $ctg\alpha$ *iracionalan.*

Dokaz. Zaključak neposredno slijedi iz jednakosti $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$ na osnovu stavova 7 i 8.

PRIMJER 10.

$$ctg1^0, ctg2^0, ctg3^0, \cdots, ctg44^0, ctg46^0, ctg47^0, \cdots, ctg88^0, ctg89^0 \in I$$

(za $n=180$ i $m\in\{1,2,3,...,44,46,...,88,89\}$).

Na sličan način se može dokazati i sljedeći stav.

STAV 11. *Ako je* α *mjera nekog ugla u stepenima, takva da je* $\alpha=\frac{m}{n}\cdot 180^0$, *m, n* $\in N$ *, onda su brojevi* $\cos\alpha(\alpha\neq 60^0)$ *i* $\sin\alpha(\alpha\neq 30^0)$ *iracionalni.*

Razni načini dokazivanja iracionalnosti brojeva

Slijedi nekoliko zadataka u kojima se iracionalnost brojeva dokazuje raznim metodama.

ZADATAK 1. Da li je $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ racionalan ili iracionalan broj?

Rješenje. Pretpostavimo da je dati broj racionalan: $x=\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\in Q.$ Odatle je $\sqrt[3]{2}=x-\sqrt{3}$. Stepenovanjem sa 3 i rješavanjem po $\sqrt{3}$ imamo $\sqrt{3}=\frac{x^3+9x-2}{3x^2+3}\in Q$, što je kontradikcija, jer je na lijevoj strani iracionalan broj. Dakle, $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\in I.$

ZADATAK 2. Dokazati da $\frac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt[3]{3}}\in I.$

Rješenje. Uputstvo: Kao i u prethodnom zadatku, pretpostavimo suprotno da je dati broj racionalan. Označimo ga sa x, a zatim $\sqrt[3]{3}$ izrazimo preko x i $\sqrt{2}$. Nakon kubiranja izrazimo $\sqrt{2}$ u funkciji od *x*. Na taj način se dolazi do kontradikcije, jer je na lijevoj strani iracionalan, a na desnoj racionalan broj. Dakle, dati broj je iracionalan.

PRIMJEDBA 4. Zadaci 1 i 2 mogu da navedu na zaključak da su brojevi sličnog oblika uvijek iracionalni, a da to nije tako pokazuje sljedeći primjer

$$\sqrt{15}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\sqrt{15}-\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{2}=-4\in Q.$$

Na osnovu ovog primjera se može zaključiti:

1. Zbir i razlika dva iracionalna broja ne mora biti iracionalan broj ($\sqrt{2}\in I, -\sqrt{2}\in I$ ali $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0\in Q$ i $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0\in Q$).

2. Proizvod i količnik dva iracionalna broja može, ali ne mora biti iracionalan broj ($\sqrt{3}\in I$ ali $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3\in Q$ i $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1\in Q$).

PRIMJEDBA 5. Kao što je poznato realne brojeve dijelimo na racionalne i iracionalne. Suprotno racionalnim brojevima čiji je skup zatvoren u odnosu na operacije sabiranja, oduzimanja, množenja i dijeljenja(isključujući dijeljenje nulom) na osnovu izloženog zaključujemo da skup iracionalnih brojeva ne sadrži ni jedno od navedenih svojstava. Odnosno važi sljedeći stav, koji je sinteza stavova 7 i 8:

STAV 12. *Neka je* α *proizvoljan iracionalan broj i* r *bilo koji racionalan broj različit od nule. Tada je zbir, razlika, proizvod i količnik brojeva* α *i* r *iracionalan broj. Osim toga brojevi* $-\alpha$ *i* α^{-1} *su takođe iracionalni.*

Na osnovu ovog stava može se konstruisati široka klasa iracionalnih brojeva iz jednog datog iracionalnog broja. Na primjer iz iracionalnog broja $\sqrt{2}$ možemo konstruisati brojeve $-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}-4, ..., 5+\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \frac{-7}{\sqrt{2}}$ koji su takođe iracionalni. Umjesto $\sqrt{2}$ može se uzeti bilo koji od brojeva $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, ..., \sqrt[3]{2}, ..., \sqrt[5]{10}, ..., \log_3 2, ..., \sin 2^0, \cos 7^0, tg1^0, ctg5^0, ...$ za koje smo već dokazali da su iracionalni brojevi.

Osim podjele realnih brojeva na racionalne i iracionalne postoji podjela na *algebarske* i *transcedentne* brojeve.

DEFINICIJA 3. Ako realan broj x zadovoljava jednačinu oblika

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

gdje su $a_i \in Z, i \in \{0,1,2,...,n\}$, kažemo da je algebarski, a realan broj koji ne zadovoljava ni jednu od jednačina takvog oblika nazivamo transcendentnim.

Svaki racionalan broj je algebarski. Zaista, svaki racionalan broj $\frac{a}{b}$ zadovoljava jednačinu oblika $bx - a = 0$ pa je samim tim algebarski..

Kako je svaki racionalan broj ujedno i algebarski broj, tako svaki realan broj , koji nije algebarski je iracionalan, odnosno svaki transcendentan broj je iracionalan.

Transcendentni brojevi su na primjer $e, \pi, \log 2$.

U vezi transcendentnih brojeva istaći ćemo još samo činjenicu: *Za svaki prost broj* p *broj* e^p *je iracionalan.* Njima se dalje, zbog obima rada, nećemo baviti.

NAPOMENA 2. Ne zna se da li su brojevi $\pi + e$ i $\pi - e$ iracionalni ili ne. Ne postoje prirodni brojevi m i n za koje se zna da li je $m\pi + ne$ iracionalan ili ne. Takođe, nije poznato da li su $2^e, \pi^e, \pi^{\sqrt{2}}$ iracionalni brojevi.

ZADATAK 3. Može li broj p^q biti racionalan, ako su p i q iracionalni brojevi?

Rješenje 1. Može. Neka su npr. dati iracionalni brojevi $p = \sqrt{5}$ i $q = 2\log_5 3$, tada je $\sqrt{5}^{2\log_5 3} = 3 \in Q.$

Rješenje 2. Dokaz da traženi brojevi p i q postoje može se izvesti i na sljedeći način: Posmatrajmo broj $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ako je on racionalan, onda je dovoljno uzeti $p=q=\sqrt{2}$, a ako je iracionalan, onda za $p=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ i $q=\sqrt{2}$ nalazimo da je $p^q=\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ racionalan broj.

Ovo je primjer tzv. egzistencijalnog dokaza, tj. takvog u kome se dokazuje postojanje nekog matematičkog objekta, a da pri tome taj objekt nije efektivno konstruisan. Naime, u dokazu tvrđenja mi za broj $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nijesmo utvrdili da li je racionalan ili iracionalan, jer to za dokaz nije bilo neophodno. Ustvari, broj $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je iracionalan, ali ovog puta to nećemo dokazivati.

ZADATAK 4. Dokazati da se između svaka dva iracionalna broja nalazi bar jedan iracionalan broj.

Rješenje. Dokaz je isti kao i dokaz da se između svaka dva racionalna broja nalazi racionalan broj, odnosno da je Q gust skup.

Ako su p i q dva iracionalna broja, onda se njihova aritmetička sredina $r=\dfrac{p+q}{2}$ nalazi između njih. Ako je r iracionalan broj, dokaz je završen. Ako pak $r\in Q$, tada se $s=\dfrac{r+q}{2}$ nalazi između r i q pa samim tim i između p i q i prema stavu 6, $s=\dfrac{r}{2}+\dfrac{1}{2}q\in I$. Na taj način zaključujemo da između svaka dva iracionalna broja postoji bar jedan iracionalan broj, a nastavljajući isti postupak zaključujemo da ih je beskonačno mnogo, odnosno da je i skup I svuda gust.

ZADATAK 4. Dokazati da je broj $\left(1+2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$ iracionalan.

Rješenje. Nekada nam i polinomi sa cjelobrojnim koeficijentima mogu pomoći da dokažemo da je neki broj iracionalan. Podsjetimo se: Kandidati za racionalne korijene polinoma $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_1x+a_0$ sa cjelobrojnim koeficijentima $a_0,a_1,\dots,a_n$ su oblika $x=\dfrac{r}{s}$, gdje $r\,|\,a_0$ i $s\,|\,a_n$. Pošto je njihov broj konačan, za svakog pojedinačno možemo izvršiti provjeru. Ako nijedan od njih nije korijen polinoma $P(x)$, tada x mora biti iracionalan broj.

Neka je u našem slučaju $x=\left(1+2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$, tada je $\left(x^3-1\right)^2=2,$ odnosno , $x^6-2x^3-1=0$. Kako su jedini kandidati za racionalne korijene polinoma, koji se nalazi na lijevoj strani zadnje jednakosti, brojevi ± 1, a provjerom se utvrđuje da nijedan od njih nije korijen pomenutog polinoma, to je dati broj iracionalan.

ZADATAK 5. Dokazati da je $\sin 10^0$ iracionalan broj.

Rješenje 1. Koristeći adicione teoreme lako se pokaže da je $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$, pa ako je $\varphi = 10^0$, imamo $3\sin 10^0 - 4\sin^3 10^0 = \frac{1}{2}$, odnosno $8\sin^3 10^0 - 6\sin 10^0 + 1 = 0$. Dakle, broj $\sin 10^0 = x$ zadovoljava jednačinu $8x^3-6x+1=0$. No, ta jednačina nema racionalnih rješenja. Da bismo se u to uvjerili, dovoljno je na osnovu izloženog stava iz algebre pokazati da brojevi $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$ nijesu njena rješenja.

Rješenje 2. Može se provjeriti da vrijedi

$$3\sin 10^0 - 4\sin^3 10^0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 10^0 = \frac{1}{6} + \frac{4}{3}\sin^3 10^0.$$

Pretpostavimo da je $sin10^0$ racionalan broj, tj. $\sin 10^0 = \frac{p}{q}$, gdje su p i q uzajamno prosti brojevi. Tada je $\frac{p}{q} = \frac{1}{6} + \frac{4}{3}\frac{p^3}{q^3} \Leftrightarrow 6pq^2 = q^3 + 8p^3$. Iz zadnje jednakosti slijedi da je q paran broj, tj. $q = 2n, n \in N$. Tada $3pn^2 = n^3 + p^3 \Leftrightarrow n^2(3p-n) = p^3$. Slijedi da $n^2 \mid p^3$, a kako je $\frac{p}{q} = \frac{p}{2n}$ neskrativ, to je $n=1$. U tom slučaju dobijamo jednakost $3p-1 = p^3 \Leftrightarrow p(3-p^2) = 1$ koja nema rješenje u skupu cijelih brojeva. Dakle, $\sin 10^0$ se ne može predstaviti u obliku neskrativog razlomka $\frac{p}{q}$, što znači da je iracionalan.

ZADATAK 6. Dokazati da je broj $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}}$ iracionalan za sve prirodne brojeve $n>1$.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno tj. da je broj

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}} = r_1$$

racionalan.

Razlikovaćemo dva slučaja.

1. slučaj: Broj n nije potpun kvadrat. Iz date jednakosti slijedi da je broj $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}=r_1^2-1=r_2$ racionalan, pošto je kvadrat racionalnog broja umanjen za racionalan broj takođe racionalan. Ponavljajući ovaj postupak $n-1$ puta, dobijamo da je broj $\sqrt{n}=r_{n-2}^2-n+1=r_{n-1}$ racionalan broj. Dakle, $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$ gdje su p i q uzajamno prosti brojevi. Kvadrirajući ovu jednakost dobijamo $n=\frac{p^2}{q^2}$. Pošto je n prirodan broj mora biti $q=1$ i $n=p^2$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da n nije potpun kvadrat. Dakle, u ovom slučaju smo dokazali da je traženi broj iracionalan.

2. slučaj: Broj n je potpun kvadrat.

Iz date jednakosti $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}=r_1^2-1=r_2$ slijedi da je broj na njenoj lijevoj strani racionalan iz istog razloga kao u slučaju 1. Ponavljajući ovaj postupak $n-2$ puta dobijamo da je broj $\sqrt{n-1+\sqrt{n}}=r_{n-3}^2-n+2=r_{n-2}$ racionalan broj. Neka je $n=k^2$, gdje je $r_{n-2}=\frac{p}{q}$. Kvadrirajući ovu jednakost dobijamo $k^2+k-1=\frac{p^2}{q^2}$, a pošto je k^2+k-1 prirodan broj mora biti $q=1$ i $k^2+k-1=p^2$. Međutim, $k^2<k^2+k-1<k^2+2k+1=(k+1)^2$ zbog $k>1$, pa bi bilo $k^2<p^2<(k+1)^2$, tj. između k i $k+1$ morao bi da se nalazi još jedan prirodan broj. Kontradikcija! Dakle, i u om slučaju je posmatrani broj iracionalan.

ZADATAK 7. Kocka $n\times n\times n$ obojena je spolja, a zatim isječena na n^3 jediničnih kocki.Da li je moguće da je za neko n broj malih kocki sa bar jednom obojenom stranom jednak polovini ukupnog broja malih kocki?

Rješenje. Ne. Pretpostavimo da je to moguće. Kako je broj malih kocki koje nemaju nijednu obojenu stranu jednak $(n-2)^2$, to je $n^3=2(n-2)^2$. Slijedi da je $2=\frac{n^3}{(n-2)^3}$, $\sqrt[3]{2}=\frac{n}{n-2}$, što je nemoguće, jer je $\sqrt[3]{2}$ iracionalan broj.

ZADATAK 8. Dokazati da je broj $\sqrt{\overline{ababab}}$ iracionalan.

Rješenje. Primijetimo da je $10101 = 3\cdot 7\cdot 13\cdot 37$. S druge strane, broj $\overline{ababab}$ može se napisati u obliku $10101\cdot\overline{ab}$ i ako je on potpun kvadrat, onda je djeljiv sa $3^2, 7^2, 13^2$ i 37^2. To znači da je broj $\overline{ab}$ djeljiv sa $3, 7, 13$ i 37, što je nemoguće. Dakle, broj $\overline{ababab}$ nije potpun kvadrat; prema tome je broj $\sqrt{\overline{ababab}}$ iracionalan.

ZADATAK 9. Dokazati da je broj $0{,}123456789101112...$ dobijen ispisivanjem svih prirodnih brojeva iza decimalnog zareza (*Čampernounova* konstanta), iracionalan.

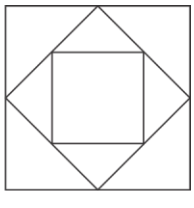
Rješenje 1. Pretpostavimo da je broj $0{,}12345678910111213 14...$ racionalan. Tada je on periodičan. Neka je dužina periode k. Kako se među prirodnim brojevima nalazi i broj $100...00$ (broj koji se zapisuje pomoću jedne jedinice i k nula), slijedi da su sve cifre periode nule. Na isti način dokazujemo(pošto se među prirodnim brojevima nalazi i broj koji se zapisuje pomoću $3k$ jedinica), da su sve cifre periode jedinice. Dobijena kontradikcija pokazuje da dati broj nije racionalan.

Rješenje 2. Broj je racionalan ako mu je decimalan zapis konačan ili periodičan. Jasno je da posmatrani broj nema konačan decimalan zapis. Dokažimo da ne može biti ni periodičan. Pretpostavimo da posmatrani broj poslije k-te pozicije ima period od n cifara $a_1a_2a_3...a_n$. Uočimo broj $10^{(k+3n+1)^2}$. Očigledno je da on ima više od k nula, pa se on nalazi u decimalnom dijelu broja iza k-te pozicije, prekriven "periodama". Kako on ima više od 3n+1 nula po Dirihleovom principu potrebno je bar 4 "periode" da bi prekrile sve nule. Međutim, bar jedan od tih "perioda" cio pada tačno iza nekih n uzastopnih nula od $3n+k+1$ nule. Dakle, period čine samo nule, tj. poslije k-te pozicije u decimalnom zapisu nalaze se samo nule, što je očigledno nemoguće. Zato je naša pretpostavka pogrešna pa je posmatrani broj iracionalan.

Iz istorijata iracionalnih brojeva

Postojanje iracionalnih brojeva otkrio je u 5. v.p.n.e učenik Pitagorejske škole u Antičkoj Grčkoj *Hipasus (Hipas)* iz Metapontuma. Sam dokaz je objavio *Euklid* oko 200 godina kasnije i vezan je za $\sqrt{2}$. Taj dokaz je analogan izloženom u radu, jer je svođenje na protivurječnost bila omiljena metoda Pitagorejaca. Na sličan način je *Teodor* iz Kirene dokazao da su iracionalni svi brojevi $\sqrt{n}, n\in N, n<18, n\neq 1,4,9,16.$

Poznato je da su Pitagora i njegovi sljedbenici(Pitagorejci) tvrdili da su sve geometriske veličine samjerljive, odnosno prikazive u obliku odnosa dva prirodna broja. Iz toga je slijedilo da postoje samo racionalni brojevi. Legenda kaže da je Hipas posmatrajući sliku 2 zaključio da dijagonala i stranica kvadrata nijesu samjerljive. To otkriće je toliko šokiralo njegove kolege



Slika 2

Pitagorejce da su ga kaznili smrću, davljenjem. Bacili su ga sa palube broda i pustili ga da se utopi. Razlog za to je što je Pitagorejsko bratstvo bilo zatvorenog tipa. Otkrića do kojih su dolazili strogo su čuvali kao tajnu. Ko bi odao tajnu, bio je kažnjavan smrću. Zato su kaznili Hipasa, koji je otkrio brojeve koji nijesu racionalni i tako negirao njihovo učenje o postojanju samo racionalnih brojeva i iz razloga što je, izgleda, nekom van bratstva ispričao o svom otkriću. Pitagorejci su smatrali da je svijet u suštini matematički i da se sve u njemu može predstaviti odnosom brojeva. Brojevi koji se nijesu mogli predstaviti tako su po njima bili van uma(lat. *racio*) odnosno van pameti, pa ih je neko tako i nazvao, iracionalni (grčki *alogon*, što može značiti i ono o čemu ne treba pričati, što je Hipas, izgleda prekršio).

Egipatski i Vavilonski matematičari nijesu znali za pojam iracionalnog broja. Oni su uslijed nepoznavanja iracionalnih brojeva nailazili na poteškoće pri rješavanju problema iz prakse. Umjesto iracionalnih koristili su racionalne brojeve kao i njihove približne vrijednosti. Bilo im je važno da što tačnije riješe praktične probleme. Za određivanje približnih vrijednosti kvadratnog korijena pronašli su postupak koji se zasnivao na primjeni formule $\sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm \frac{b}{2a}$. U Vavilonu je pronađena glinena pločica na kojoj je nacrtan kvadrat sa dijagonalama i napisana približna vrijednost broja $\sqrt{2}$ u šezdesetičnom sistemu.

U periodu od 10. do 12. vijeka mnogi arapski matematičari su dali doprinos daljem razvoju pojma iracionalnog broja. Spomenimo samo neke od njih: al-Biruni, al-Nairizi, Sabit ibn Kora i Omar Hajam.

U 15. vijeku za iracionalne brojeve se zanima italijanski matematičar Luka Paćoli. Dekart je prvi ispravno shvatio suštinu iracionalnog broja. On ističe da je broj: "*sve što se odnosi prema jedinici kao jedna duž prema drugoj*". Interesantno je da i on iracionalne brojeve naziva *neizrazivim.*Kasnije će engleski matematičar i fizičar Isak Njutn (1707) razraditi Dekartovu definiciju iracionalnog broja.

U 19. vijeku su brojevi razdvojeni na algebarske i transcendentne, dokazano je postojanje transcendentnih brojeva i napravljen novi pristup u oblasti koja je nedirnuta od doba Euklida, teoriji iracionalnih brojeva. Dokaz o postojanju transcendentnih brojeva dao je francuski matematičar *Liuvil* 1844. godine, kao i prvi decimalan prikaz takvog broja, tzv Liuvilove konstante (1851. g.) $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0{,}110001000000...$, dok je *D. Hilbert* 1900. godine na II međunarodnom kongresu matematičara izložio problem poznat kao njegov VII problem, a formulisao ga je na sljedeći način. "*Pokazati da je* α^{β} *transcendentan ili u krajnjoj mjeri iracionalan broj ako je* α *algebarski, a* β *iracionalan broj*".

NAPOMENA 3. Drugi dio VII Hilbertovog problema je: "*Ako je u jednakokrakom trouglu odnos ugla na osnovici i ugla pri vrhu algebarski ali ne racionalan, onda je odnos osnovice i kraka uvijek transcendentan*".

Ojleru pripada zasluga za definisanje transcendentnih brojeva u današnjem smislu, a sam naziv "*transcendentan*" dolazi od *Lajbnica* koji je 1682. godine dokazao da $\sin x$ nije algebarska funkcija po promjenljivoj x. Prvi broj za koga je dokazana transcendentnost je broj e (1873.g.), zasluga pripada *Hermitu*,dok je *Kantor* 1874. godine pokazao da je skup transcendentnih brojeva gust skup. *Lindeman* je 1882. godine dokazao transcendentnost broja π polazeći od *Hermitovih* zaključaka. *Lindemanov* dokaz je pojednostavio *Vajerštras 1885.* godine i *Hilbert* 1893. godine a kasnije su se time bavili i *Hurvic* i *Pol Albert Gordon.*

Zadaci za samostalan rad

1. Ako je proizvod dva broja iracionalan broj, onda je i njihov zbir iracionalan.
2. Dokazati da je broj $0,1010010001\cdots$ iracionalan.
3. Dokazati da je broj $0,1491625364964\cdots$ dobijen ispisivanjem kvadrata svih prirodnih brojeva iza decimalnog zareza, iracionalan.
4. Dokazati da je konstanta Copeland-Erdösa $0,23571113171923293137414 3\cdots$ dobijena ispisivanjem, iza decimalnog zareza, svih prostih brojeva, iracionalan broj.
5. Dokazati da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ iracionalan broj.
6. Dokazati da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}+\sqrt{13}+\sqrt{17}$ iracionalan broj.
7. Dokazati da je $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ iracionalan broj.
8. Dokazati da je $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ iracionalan broj.
9. Da li je $\sqrt{3-\sqrt{4+\sqrt{12}}}+\sqrt{3+\sqrt{4-\sqrt{12}}}$ iracionalan broj?
10. Da li je vrijednost izraza $1,494949\cdots+\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ racionalan ili iracionalan broj?
11. Dokazati da su $\sin 1^0$ i $\cos 1^0$ iracionalni brojevi.
12. Dokazati da je $\cos 2^0$ iracionalan broj.
13. Dokazati da su sin$x$ i cos$x$ racionalni brojevi tada i samo tada kada je $tg\,\dfrac{x}{2}$ racionalan.
14. Dokazati da se između dva različita iracionalna broja nalazi racionalan broj.
15. Uočimo u koordinatnoj ravni jedinični kvadrat sa tjemenima u cjelobrojnim tačkama. Neka je (m,n) proizvoljna cjelobrojna tačka u toj ravni. Dokazati da je bar jedno od rastojanja od te tačke do tjemena kvadrata-iracionalan broj.
16. Data je kvadratna mreža u ravni i trougaso sa tjemenima u čvorovima te mreže. Dokazati da je tangens bilo kog unutrašnjeg ugla tog trougla racionalan broj.
17. Prava je obojena sa tri boje. Svakom bojom obojena je bar jedna tačka te prave. Da li se uvijek mogu naći tri tačke različite boje takve da je jedna od njih središte duži sa krajevima u druge dvije tačke?
18. Neka su *a, b, c* različiti prosti brojevi. Dokazati da brojevi $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ ne mogu biti članovi jedne aritmetičke progresije.
19. Dokazati da jednačina $x^2+px+q=0$ ne može imati racionalna rješenja, ako su p i q racionalni brojevi.

20. Dokazati implikaciju $x^2 \in I \Rightarrow x \in I$.
21. Dokazati da je za svako $n \in N$, broj $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ iracionalan.
22. Neka su brojevi $a, b, \sqrt{a}+\sqrt{b}$ racionalni. Kakvi su brojevi $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$?
23. Dokazati da je broj $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^9}+\cdots$ iracionalan.
24. Da li je broj $10^{-1}+10^{-4}+10^{-9}+10^{-16}+10^{-25}+\cdots$ racionalan ili iracionalan broj?
25. *Iracionalna eksplozija* sa epicentrom u tački P odstranjuje iz ravni sve tačke koje se nalaze na iracionalnom rastojanju od tačke P. Koliko je najmanje iracionalnih eksplozija dovoljno da bi se iz ravni odstranile sve tačke?

Literatura

[1] M. Anđić: *Jedan pristup dokazivanju iracionalnosti brojeva,* Nastava matematike, XXXVII (4)(1992).
[2] D. Jović, *Iracionalnost nekih vrijednosti trigonometrijskih funkcija*, Nastava matematike, XXXVIII (3-4)(1993), 33-34
[3] Е. В. Галкин, *Нестандартные задачи по математике*, Алгебра, Челябинск, „Взгляд“, 2004.
[4] Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов, *Алгебра и теория чисел*, Сборник задач, Издательство Московского центра непрерывного математического образования, Москва, 2009.