MAT-KOL (Banja Luka) ISSN 0354-6969 (o)
XXII (2)(2016), 107-114 ISSN 1986-5828 (o)
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

# ДИКСОНОВА ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА И ЈЕДНА ОСОБИНА ПРИМИТИВНИХ ПИТАГОРИНИХ ТРОУГЛОВА

**Милан В. Живановић**
Висока школа струковних студија за образовање васпитача, Крушевац
*E-mail*: mzivanovic@vaspks.edu.rs

**Резиме:** Садржаји из теорије и примена Питагориних троуглова нису уврштени у редовну наставу. Међутим, различити проблеми из ове теорије јављају се у додатној настави завршних разреда основне школе и почетних разреда средње школе. Изучавање особина Питагориних троуглова или појединих њихових класа претпоставља добро теоретско предзнање из геометрије, алгебре, комбинаторике и теорије бројева. Стога су проблеми из ове области не само значајни за повезивање и продубљивање математичких знања, већ и привлачни и занимљиви младим математичарима. Самим тим велик је и њихов значај у популаризацији математике. До данашњих дана је представљено више различитих параметризација (решења) проблема Питагориних троуглова. Овде ћемо укратко описати једну модификацију Диксонове параметризације примитивних Питагориних троуглова и њену примену на одређивање парова Питагориних троуглова код којих су разлике дужина непарних катета и разлике дужина хипотенуза једнаке збиру дужина парних катета. Ова проблематика је захвална за примену у додатној настави завршних разреда основне школе, јер повезује различите математичке области и пружа могућности самосталних истраживања од стране ученика.

*MathEduc Subject Clasification:* **H30**
MSC *Subject Clasification:* **97F60, 97H30, 11D09**

**Кључне речи:** примитивни Питагорини троуглови, Диксонова параметризација, диофантске једначине, додатна настава

## Увод

Правоугли троугао чије су дужине страница природни бројеви се назива Питагорин троугао. Ако су ти бројеви узајамно прости онда је реч о примитивном Питагорином троуглу. Питагорин троугао који није примитиван називамо изведеним Питагориним троуглом.

Уређену тројку природних бројева $(x, y, z)$ зовемо Питагорина тројка ако вреди

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

Ако су бројеви $x$, $y$ и $z$ релативно прости онда кажемо да је $(x, y, z)$ примитивна Питагорина тројка. По аналогији са изведеним Питагориним троуглом дефинише се и изведена Питагорина тројка.

Једначина (1), њена уопштења, као и особине бројева који је задовољавају били су интересантни математичарима кроз разне друштвено-историјске епохе почев од античких цивилизација па до данашњих дана. О томе сведочи и обимна литература посвећена овој проблематици.

Први писани траг о општем решењу налазимо код Еуклида у Елементима (Fitzpatrick, R. 2007). У књизи 10. после тврђења 28. прва лема гласи: „Наћи два квадратна броја тако да и њихов збир буде квадратан број.“ Еуклид даје и решење овог проблема, али је оно више геометријско, конструктивно. Преведено на данашњу нотацију он доказује тврђење: „Нека су $m, n$ природни бројеви исте парности и $m > n$, тада је збир квадрата бројева $mn$ и $\frac{m^2 - n^2}{2}$ једнак квадрату броја $\frac{m^2 + n^2}{2}$. “

У осмом задатку своје друге књиге *Аритметике* Диофант решава задатак: „Дати квадрат разложити на два квадрата“ (Башмакова, И. Г. 1974). Он конкретно разлаже 16 на квадрате $\frac{256}{25}$ и $\frac{144}{25}$. Уопштењем поступка који он користи добијају се формуле $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$, које за произвољне природне бројеве $m, n$ и за $m > n$, омогућавају одређивање целобројних дужина страница правоуглог троугла. Више о овој параметризацији и условима када она генерише примитивне Питагорине троуглове писали су Сјерпински (Sierpinski W. 1962) и Дујела (Dujella, A. 1994). У овим текстовима је доказано и тврђење да дужине хипотенузе и једне катете примитивног Питагориног троугла морају бити непарни бројеви, а дужина друге катете паран број. Ми ћемо у нашим разматрањима претпоставити да је дужина катете $x$ непаран, а катете $y$ паран број.

Теорија Питагориних троуглова обједињује више математичких дисциплина, а посебно алгебру, геометрију, комбинаторику и теорију бројева. Својим садржајем и математичким апаратом који претпоставља тема је препоручена за додатни рад у завршним разредима основне и почетним разредима средње школе. У овом раду ће бити описана верзија једне параметризације једначине (1) са почетка прошлог века, као и једна релација између елемената примитивних Питагориних троуглова, коју је лакше уочити и доказати применом уведене параметризације. Биће предочене и неке методичке импликације описаног проблема и његовог решења.

## Геометризација Диксонове параметризације

Применом смене

$$x = m + n$$
$$y = m + p$$
$$z = m + n + p$$

Диксон (Dickson, L. E. 1920) је једначину (1) сводио на једначину $m^2 = 2np$. Тиме је одређивање Питагориних тројки свео на проналажење природних бројева $n$ и $p$ тако да производ $2np$ буде потпун квадрат. Затим је уврштавањем добијених вредности за $n$, $p$ и $m = \sqrt{2np}$ у дату смену одређивао дужине страница правоуглог троугла. Јасно је да се овим поступком могу одредити сви Питагорини троуглови. Ако би постојао Питагорин троугао који се не може добити помоћу наведене параметризације, решавањем смене по параметрима $m$, $n$ и $p$ добили бисмо целобројне вредности за које важи $m^2 = 2np$ те бисмо помоћу њих, на већ описан начин, добили Питагорин троугао што је супротно претпоставци. Како је смена линеарна немогуће је за различите $m$, $n$ и $p$ добити једнаке Питагорине троуглове. Исти поступак описао је и Ленемо (Lönnemo, H. A. 2000). При томе ни у једном од ових текстова није анализиран геометријски смисао уведених параметара. У ту сврху нека су у примитивном Питагорином троуглу са дужинама страница $x$, $y$ и $z$ где је $y$ паран број дати: дужина полупречника уписане кружнице $r = \frac{x + y - z}{2}$, непарна разлика дужина хипотенузе и катете $n = z - y$ и парна разлика дужина хипотенузе и катете $p = z - x$. Тада се дужине страница троугла могу изразити помоћу једнакости

$$\begin{aligned} x &= 2r + n \\ y &= 2r + p \\ z &= 2r + n + p \end{aligned} \tag{2}$$

На тај начин елементи Диксонове трансформације добијају свој геометријски смисао. Заменом трансформације (2) у једначину (1) после краћег сређивања добија се једначина

$$2r^2 = np \tag{3}$$

Да би решења једначине (1) била узајамно прости бројеви то мора бити $NZD(n, p) = 1$ и $n$, $p$ различите парности. То стога, јер на основу (3) оба од ових параметара не могу бити непарни, а ако би оба била парни добили бисмо изведени Питагорин троугао коме су дужине свих страница парни бројеви. Ако је $NZD(n, p) \neq 1$ добија се изведени Питагорин троугао. Такође, за релативно просте $n$ и $p$ на основу једнакости (3), следи да сви њихови фактори сем броја 2 морају бити парног изложиоца, тј. потпуни квадрати. Узмимо, зато, да је

$n = (2k-1)^2$, $p = 2l^2$ $k, l \in N$ и $NZD(2k-1, l) = 1$. Ако под тим претпоставкама уврстимо $n$ и $p$ у једначину (3) добија се да је $r = l(2k-1)$. На основу свега реченог добијамо, под датим условима, да се дужине страница примитивног Питагориног троугла могу одредити помоћу формула:

$$\begin{aligned} x &= 2l(2k-1) + (2k-1)^2 \\ y &= 2l(2k-1) + 2l^2 \\ z &= 2l(2k-1) + (2k-1)^2 + 2l^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Тако нпр. за $k = 5$ и $l = 4$ израчунамо прво $n = (2 \cdot 5 - 1)^2 = 81$ и $p = 2 \cdot 4^2 = 32$. Затим из $2r^2 = 81 \cdot 32$ добијамо $r = \sqrt{81 \cdot 16} = 9 \cdot 4 = 36$. На крају израчунавамо:

$$\begin{aligned} x &= 2r + n = 72 + 81 = 153 \\ y &= 2r + p = 72 + 32 = 104 \\ z &= 2r + n + p = 72 + 81 + 32 = 185 \end{aligned}$$

Заиста, важи да је $153^2 + 104^2 = 185^2$.

Параметризација (4) је варијанта Диксонове параметризације и омогућава једноставно одређивање класа примитивних Питагориних троуглова са задатом разликом дужина хипотенузе и неке од катета. У радовима (Живановић М. 2005) и (Живановић, М. 2011) је представљено уопштење Диксонове параметризације, као и на основу тога добијени резултат о броју примитивних и изведених Питагориних троуглова описаних око кружнице датог полупречника. У табели 1. су дате дужине страница Питагориних троуглова добијене применом параметризације (4) као уређене тројке бројева код којих је други члан паран. У њој се за случајеве $NZD(2k-1, l) \neq 1$ јављају и Питагорини троуглови који нису примитивни. Такође свака колона представља класу Питагориних троуглова са константном парном разликом дужина хипотенузе и катете, а свака врста класу Питагориних троуглова са константном непарном разликом дужина хипотенузе и катете. У свим случајевима класе троуглова су потпуно и линеарно уређене у растућем поретку по параметру $k$, односно $l$.

**Табела 1**. Питагорине тројке код којих је разлика дужина хипотенузе и катете квадрат непарног броја

| $k,(n)\backslash l,(p)$ | 1,(2) | 2,(8) | 3,(18) | 4,(32) | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,(1) | $(3,4,5)$ | $(5,12,13)$ | $(7,24,25)$ | $(9,40,41)$ | |
| 2,(9) | $(15,8,17)$ | $(21,20,29)$ | $(27,36,45)$ | $(33,56,65)$ | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3,(25) | $(35,12,37)$ | $(45,28,53)$ | $(55,48,73)$ | $(65,72,97)$ | |
| 4,(49) | $(63,16,65)$ | $(77,36,85)$ | $(91,60,109)$ | $(105,88,137)$ | |
| 5,(81) | $(99,20,101)$ | $(117,44,125)$ | $(135,72,153)$ | $(153,104,185)$ | |
| 6,(121) | $(143,24,145)$ | $(165,52,173)$ | $(187,84,205)$ | $(209,120,241)$ | |
| 7,(169) | $(195,28,197)$ | $(221,60,229)$ | $(247,96,265)$ | $(273,136,305)$ | |
| 8,(225) | $(255,32,257)$ | $(285,68,293)$ | $(315,108,333)$ | $(345,152,377)$ | |
| 9,(289) | $(323,36,325)$ | $(357,76,365)$ | $(391,120,409)$ | $(425,168,457)$ | |
| 10,(361) | $(399,40,401)$ | $(437,84,445)$ | $(475,132,493)$ | $(513,184,545)$ | |
| ... | | | | | |

У непосредном раду са ученицима попуњавање ове табеле се може искористити за увежбавање алгоритма за одређивање Питагориних троуглова описаном параметризацијом. Такође за фиксирано $k$ или $l$ одређују се једнопараметарске класе ових троуглова са задатом разликом хипотенузе и катете. Напредни ученици могу самостално у тим класама наћи неке законитости које важе за елементе троуглова из тако уочених класа. Једна од тих особина биће илустрована у наредном делу рада.

## Анализа једне релације између дужина страница примитивних Питагориних троуглова

У колони за $l=1$ самостално или уз помоћ наставника ученици прво треба да уоче чињеницу да је разлика дужина непарних катета суседних троуглова једнака збиру одговарајућих дужина парних катета и разлици дужина одговарајућих хипотенуза. Наравно да то треба и доказати, а поставља се и питање да ли су то једини парови примитивних Питагориних троуглова са наведеном особином. Формулишимо тај проблем помоћу следећег задатка:

*Нека је дат скуп Питагориних троуглова генерисаних формулама (4) као у табели 1. Одредити све парове примитивних Питагориних троуглова из овог скупа са дужинама страница* $x_1, y_1, z_1$ *и* $x_2, y_2, z_2$ *за које важе једнакости:*

$$x_2 - x_1 = y_2 + y_1 = z_2 - z_1$$

Уочимо најпре да је $x_2 - x_1 = z_2 - z_1 \Leftrightarrow z_1 - x_1 = z_2 - x_2$ тј. да пар тражених уређених тројки припада класи са истом разликом дужина хипотенузе и катете. Дакле за те троуглове важи да је $l_2 = l_1$ те се у даљој анализи могу изоставити индекси овог параметра. Укључимо и други услов $x_2 - x_1 = y_2 + y_1$

уз претпоставку да је $x_2 > x_1$. Применом параметризације (4) на последњу једнакост добијамо:

$$2l_2(2k_2-1)+(2k_2-1)^2-2l_1(2k_1-1)-(2k_1-1)^2=2l_2(2k_2-1)+2l_2^{\,2}+2l_1(2k_1-1)+2l_1^{\,2}$$

$$4k_2^2-4k_2+1-4k_1^2+4k_1-1=4l(2k_1-1)+4l^2,$$ где је $l=l_1=l_2$ и $k_2>k_1$

тј. на крају

$$l^2+(2k_1-1)l-k_2^2+k_2+k_1^2-k_1=0 \tag{5}$$

Решимо ову једначину за неке одређене вредности параметра $l$.
Ако је $l=1$ једначина (5) се своди на:

$$0=k_2^2-k_1^2-k_2-k_1=(k_2-k_1)(k_2+k_1)-(k_2+k_1)=(k_2+k_1)(k_2-k_1-1).$$

С обзиром да је $k_2+k_1>0$, мора бити $k_2-k_1-1=0$ тј. $k_2=k_1+1$ Другим речима у класи основних Питагориних троуглова са разликом хипотенузе и катете једнаком 2 тражена особина важи за сваке два суседна Питагорина троугла уређена узлазно по $k$ параметру у табели 1. То је оно што је већ уочено пре формулисања задатка.

Слично се за $l=2$, односно $p=8$ добија:

$$\begin{aligned}0&=k_2^2-k_1^2-k_2-3k_1-2=(k_2-k_1)(k_2+k_1)-2(k_2+k_1+1)+(k_2-k_1)\\&=(k_2-k_1)(k_2+k_1+1)-2(k_2+k_1+1)=(k_2+k_1+1)(k_2-k_1-2)\end{aligned}$$

Опет због $k_2+k_1+1>0$ је $k_2-k_1-2=0$ тј. $k_2=k_1+2$. Услове задатка задовољавају сваке две тројке из уређене класе за $p=8$ код којих се редни бројеви у табели 1. разликују за 2. Конкретно парови: $(45,28,53)$ и $(5,12,13)$; $(77,36,85)$ и $(21,20,29)$; $(117,44,125)$ и $(45,28,53)$ итд.

За $l=3$ , односно $p=18$ имамо да је:

$$\begin{aligned}0&=k_2^2-k_1^2-k_2-5k_1-6=(k_2-k_1)(k_2+k_1)-3(k_2+k_1+2)+2(k_2-k_1)\\&=(k_2-k_1)(k_2+k_1+2)-3(k_2+k_1+2)=(k_2+k_1+2)(k_2-k_1-3)\end{aligned}$$

Закључујемо да је $k_2=k_1+3$. Односно у уређеној класи за $p=18$ услове задатка задовољавају парови примитивних Питагориних троуглова чији се редни бројеви у четвртој колони табеле 1. разликују за 3. У овој колони постоје и Питагорини троуглови који нису примитивни, већ изведени. Међутим, према решењу $k_2=k_1+3$ изведени Питагорин троугао се не може упарити са примитивним, већ са изведеним. Стога они не ремете правило упаривања за примитивне Питагорине троуглове ове класе. До истог закључка се може доћи и за изведене троуглове из других класа.

Једначина (5) је методички значајна, јер је за разне вредности параметра $l$ погодна за увежбавање растављања полинома на просте чиниоце методом груписања чланова. За општи случај важи следећи низ једнакости:

$$0 = k_2^2 - k_1^2 - k_2 - (2l-1)k_1 - l^2 + l = (k_2 - k_1)(k_2 + k_1) - l(k_2 + k_1 + l - 1) + (l-1)(k_2 - k_1)$$
$$= (k_2 - k_1)(k_2 + k_1 + l - 1) - l(k_2 + k_1 + l - 1) = (k_2 + k_1 + l - 1)(k_2 - k_1 - l)$$

Под задатим условима добија се $k_2 - k_1 - l = 0$ тј. $k_2 = k_1 + l$. Односно у уређеној класи за $p = 2l^2$ услове задатка задовољавају парови примитивних Питагориних троуглова чији се редни бројеви у $(l+1)$-вој колони табеле 1. разликују за $l$.

До истог резултата се може доћи одређујући позитивно решење квадратне једначине (5) по промењљивој $l$:

$$l = \frac{-2k_1 + 1 + \sqrt{4k_1^2 - 4k_1 + 1 + 4k_2^2 - 4k_2 - 4k_1^2 + 4k_1}}{2} = \frac{-2k_1 + 1 + 2k_2 - 1}{2} = k_2 - k_1$$

тј. $k_2 = k_1 + l$.

## Закључак

Предавање са овом темом аутор је одржао напредним ученицима 8. разреда на Летњој школи младих математичара Ивањица 2015. У току предавања ученици су пронашли да за суседне елементе прве врсте из табеле 1. важи релација $x_2 + x_1 = y_2 - y_1 = z_2 - z_1$. Доказ тог тврђења је могуће извести аналогним поступком као и за описане релације у претходном делу тексту.

Параметризација описана у овом раду и табела 1. могу бити од користи ученицима за самостална истраживања особина Питагориних троуглова. То могу бити проблеми утврђивања геометријских и аритметичких особина појединих класа за један од фиксираних параметара $k$ или $l$. Надареним ученицима би требао бити изазов одређивање парова Питагориних троуглова за чије странице важи релација $x_2 - x_1 = 2(y_2 + y_1) = z_2 - z_1$ или уопште $x_2 - x_1 = m(y_2 + y_1) = z_2 - z_1$ за произвољно $m \in N$ Табела 1. може послужити и наставницима при креирању задатака са целобројним решењима у применама Питагорине теореме.

У наведеној литератури читалац се може упознати и са другим параметризацијама проблема Питагориних троуглова, као и са особинама бројева који представљају дужине страница Питагориних троуглова.

## Литература

[1] Башмакова, И. Г. (1974). *Диофант, Арифметика и книга о многоугольных числах*, Москва: Наука

[2] Dickson, L. E. (1920). *History of the theory of numbers*, vol. II: Diophantine analysis, Carnegie Institution, Washington, DC,

[3] Dujella, A. (1994). *Pitagorine trojke*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike mentore Crikvenica, 1-10.

[4] Fitzpatrick, R. (2007). *Euclid's elements of Geometry.* Посећено, 11. фебруара 2016. http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf,

[5] Lönnemo, H. A. (2000). *The Trinary Tree(s) underlying Primitive Pythagorean Triples*, Посећено 06. маја 2016. http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/PT_matrix.shtml

[5] Sierpinski, W. (1962). *Pythagorean Triangles*. New York: Yeshiva University

[7] Живановић, М. (2005). Инваријантна пресликавања Питагориних тројки. *Настава математике*, Год. L, Бр. 1-2, 41-46.

[8] Живановић, М. (2011). Алгебра Питагориних тројки, *Споменица академика Веселина Перића*, (стр. 525-535). Бања Лука: АНУРС