MAT-KOL (Banja Luka)
XXII (2)(2016), 115-126
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5828 (o)

Moji tragovi

Pavle M. Miličić
stan N. Beograd, Jurija Gagarina 255/56
tel. 6152910, 063 7003352
e-mail: pavle.milicic@gmail.com

Kratka biografija

Penzionisani profesor Matematičkog fakulteta, Pavle M. Miličić, rođen je 12.04.1934.g.(verovatnije: 12.04.1932.g.) u selu Unču, opština Plužine u Crnoj Gori.

Četiri razreda osnovne škole završio je u Unču sa odličnim uspehom, a osam razreda gimnazije u Nikšiću takođe sa odličnim uspehom. Diplomirao je matematiku na PMF-u Beogradu 1958.g. Magistarski rad je odbranio 1965. g. (mentor akademik S. Aljančić). Godine 1970. odbranio je doktorsku disertaciju (mentor akademik S. Kurepa iz Zagreba).

Školske 1958/59. g. Radio je kao profesor gimnazije u Nikšiću, a 1959.g. izabran je za asistenta na Katedri za matematiku PMF-a u Beogradu. Školsku 1961/62.g. proveo je na odsluženju vojnog roka, posle koga je ponovo izabran za asistenta na istom fakultetu. Za docenta na PMF-u (predmeti Funkcionalna analiza i Matematika I) izabran je 1971.g. Za vanrednog profesora, za iste predmete, izabran je 1978. g., a za redovnog profesora, za iste predmete izabran je 1985. g.

Školske 66/67. g. Predavao je geometriju prvoj generaciji Matematičke gimnazije u Beogradu. U istoj gimnaziji, školske 1993/94 i 1994/95 predavao je Matematičku analizu.

Kao asistent držao je vežbe iz predmeta; Nacrtna geometrija, Algebra, Matematika I, Matematika II, Matematička analiza I i Matematička analiza II. U zvanju predavača, na matičnom Matematičkom fakultetu, predavao je predmete: Matematika I, Matematika II, Matematička analiza I, Matematička analiza II, Analitička geometrija, Kompleksna i funkcionalna analiza, Diferencijalna geometrija i Funkcionalna analiza.

Kao predavač, pored predavanja na matičnom fakultetu, predavao je i na : Fakultetu organizacionih nauka u Beogradu, Filozofskom fakultetu u Nišu, PMF-u u Kragujevcu, PMF-u u Prištini, Nastavničkom fakultetu u Nikšiću i PMF-u u Titogradu.

Školske 1980/81. g. Bio je dekan OOUR-a za matematiku, mehaniku i astronomiju PMF-a u Beogradu. U dva mandatna perioda bio je delegat PMF-a u Skupštini Univerziteta. U dva mandatna perioda bio je član Stručnog veća za matematiku i računarstvo Univerziteta. Dva mandatna perioda bio je šef Katedre za Realnu i funkcionalnu analizu. Dve godine je bio član Prosvetnog saveta SR Srbije.

Učestvovao je sa saopštenjima na 14 domaćih i stranih kongresa i konferencija matematičara. Više od 20 godina je referent američkog časopisa ***Mathematical Rewiews*** u kome je prikazao više od 40 naučnih radova matematičara raznih zemalja. Član je Američkog matematičkog društva.Bio je mentor za izradu 5 doktorskih disertacija na Matematičkom fakultetu u Beogradu i 2 doktorske disertacije na Skopskom univerzitetu.

Oblast njegove naučne delatnosti je, uglavnom, ***Geometrija Banahovih prostora***. Objavio je 45 naučnih radova u domaćim ili stranim naučnim časopisima. Većina objavljenih radova su pozitivno prikazani u poznatim svetskim referentivnim časopisima. Neki njegovi rezultati su uključeni u 2 domaće i 5 strane monografije.

Od 38 stručno-pedagoška rada koja je objavio, sam ili u koautorstvu, 12 su udžbenici koji su više puta ponovo izdavani. ***„Zbirka zadataka iz više matematike I“*** (koautor M. Ušćumlić), prvo izdanje 1963. g., štampana je u 22 izdanja sa ukupnim tiražom preko 120 000 primeraka.

Bibliografija

A. Naučni radovi

1. Les normes absolues et les normes opérateur linéaires et bornés sur *H, Mat.Vesnik* 2(17), sv. 2(1965), 107-113,

2. Operatori koji održavaju izvesna geometrijska svojstva u Hilbertovim prostorima, *Magistarska teza, PMF Beograd 1965.*

3. Reprezentacija operatora Wignerovog tipa u *H* prostorima nad sistemom kvaterniona, *Mat.Vesnik, 4(19)(1967), 371-376.*

4. Kvazi-izometrični operatori na unitarnim prostorima, *Mat.Vesnik 4(19)(1967), 376-379.*

5. Les endomorphismes du corps des quaternions qui conservent les valeurs absolues et le group du cub, *Publ.ETF Univ.Beograd (1969), 149-151.*

6. Prostori sa poluskalarnim proizvodima i neke primene na normirane algebre, *Doktorska disertacija, PMF Beograd 1970.*

7. Sur la transversalité dans des espaces normés, *Mat.Balkanica 1(1971), 171-176.*

8. Sur le semi-produit scalaire dans quelques espaces normés, *Mat.Vesnik 8(23), sv.2(1971), 181-185.*

9. Sur l'existence du produit scalaire, *Mat.Vesnik 10(25),sv.1(1973), 3-7.*

10. Sur le semi-produit scalaire géneralisé, *Mat.Vesnik 10(25),sv.4(1973), 325-329.*

11. Sur la décomposition orthogonal du vecteur dans certains espaces normés, *Mat. Vesnik, 11(26), sv.1(1974), 55-57.*

12. Sur les endemorphismes du corps des quaternions qui conservent les valeurs absolues, *Mat. Vesnik, 11(26), sv.4(1974), 273-275.*

13. Sur la comparaison des normes d´opérateurs, *Math. Balkanica, 6:22(1976), 125-128.*

14. Sur le complement orthogonal des sous espace fermé d´un espace vectoriel normé, *Math. Balkanica 6:21(1976), 119-124.*

15. C-complete systems in normed spaces, *Publ. De l´Institute Math.,Nouvelle série,21(35), (1977), 145-150.*

16. Les systèmes orthonormeaux dans des espaces normés, *Mat. Vesnik, 1(14)(29),(1977), 243-249.*

17. Systèmes orthonormeaux dans des espaces avec semi-produit scalaire et dans leurs compléts métriquees, *Mat.Vesnik, 4(17)(32),(1980), 175-180.*

18. Sur les suites orthonormeaux dans des espaces normés, *Mat. Vesnik, 5(18)(33), (1981), 95-102;*

19. Les points extrêmes et les points unis dela boule unitée au moyen du semi-produit scalaire , *Mat. Vesnik,, 5(18)(33), (1981), 383-388.*

20. Sur les espaces semi-lisses, *Mat. Vesnik, 36(1984), 222-226.*

21. Les espaces faiblement lisses et les espaces strictement quadratiques, *Mat. Vesnik, 37(1985), 404-410.*

22. Sur la *g*-orthogonalité dans des espaces normés, *Mat. Vesnik, 39(1987), 325-334.*

23. Une généralisation naturelle du produit scalaire dans un espace normé et son utilisation, *Publ. de l'Institute Math.,Nouvelle serie, 42(56), (1987), 63-70.*

24. Sur une inégalité complementaire de l'inégalité triangulaire, *Mat. Vesnik, 41(1989), 83-88.*

25. La fonctionnelle *g* et quelques problmèmes des meilleures approximations dans des espaces normés, *Publ. de l'Institute Math., Nouvelle séri*e, *48(62), (1990), 110-118.*

26. Sur la géométrie d'un espace normé avec la propiété (G), *Proc.of the Intern. Workshop in Analysis and its Applications, Univ.Novi Sad, Institut za matematiku (1991), 163-170.*

27. On the Riesz-Fischer Theorem in a smooth Banach space, *Mat. Vesnik, 44(1992), 101-110.*

28. Sur le *g*-angle dans un espace normé, *Mat. Vesnik, 45(1993), 43-48.*

29. On the Gram-Schmidt projection in normed space, *Publ. ETF Univ.u Beogradu, Serija matematika, 4(1993), 85-95.*

30. On orthogonalities in Normed Spaces, *Math. Montisnigri, vol.3(1994), 69-77.*

31. On isomorphisms by orthogonality of a normed space and an inner-product space, *Publ. de l'Institut Math., 59(73),(1996), 89-94.*

32. Resolvability of *g*-orthogonality in normed spaces, *Math. Balkanica, New Series, vol.12(1998).*

33. A generalization of the paralellogram equality in normed spaces, *Jour. of Mathematics of Kyoto Univ., vol.38, No1(1998), 71-75;*

34. On definitions of the area of plane figures in normed spaces, *Publ.ETF Univ. u Beogradu, Serija matematika, 9(1998), 75-78;*

35. On the quasi-inner product spaces, *Mat. Bilten (Skopje), 22(XLVIII),(1998), 19-30;*

36. The angle modulus of the deformation of a normed space , *Riv. Math. Univ. Parma, (6)3(2000), 101-111;*

37. On the *g*-orthogonal projection and the best approximation of a vector in a quasi-inner product spaces, *Scientiae Math. Japonicae, vol.5,No3 (2001), ?;*

38. Characterizations of convexities of normed spaces by means of *g*-angles, *Mat. Vesnik, 54(2002), 37-44;*

39. On the *g*-orthogonal projection and the best approximation of a vector in a quasi-inner product spaces, *Math.Balkanica New Series,Vol.15 (2001),Fasc.3-4;*

40. On Duality Mapping and Canonical Isometry of a Normed Spaces, *Publikacije ETF Beograd, Ser.Mat.15(2004),87-91*

41. On moduli of expansion of the duality mapping of smooth Banach spaces, *Jour. of Inequalities and Applied Mathematics (JIPAM),vol.3, 4(2002);*

42. On the best approximation in smooth and uniformly convex real Banach space, *FaktaUniversitatis (Niš), Ser. Math.Inf. 20(2005),57-64*

43. On the *B*-angle and *g*-angle in normed spaces, *Jour. of Inequalities and Applied athematics (JIPAM), vol. 8(3)(2007), Article 99.*

44. Singer orthogonality and James orthogonality in the so-called quasi-inner product space, *Mathematica Moravica, Vol.15(1) (2011), 49-52.*

45. The Thy-angle and *g*-angle in a qusi-inner product space, *Mathematica Moravica, Vol.15(2)(2011), 41-46.*

46. *Metodologija skalarnog proizvoda u Banachovim prostorima* (Naučna monografija o g-funkcionalima) (Pripremljeno za objavljivanje);

B. Stručni radovi*:*

1. *Jednakosti, identične transformacije (Zbirka odabranih zadataka sa rešenjima),* Društvo matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije, (1964).

2. *Zbirka zadataka iz više matematike I*, (koautor M. Ušćumlić,), ″Građevinska knjiga″ Beograd(I izdanje 1964, 3+688, II izdanje 1967, III izdanje 1969, IV izdanje 1973);″Naučna knjiga″ Beograd (V izdanje 1975, IV izdanje 1977, VII izdanje 1979, VIII izdanje 1980, IX izdanje 1982, X izdanje 1984, XI izdanje 1985, XII izdanje 1986, XIII izdanje 1988, XIV izdanje 1989;XV izdanje 1990, ,XVI izdanje 1992, “Nauka” Beograd: (XVII izdanje 1994, XVIII izdanje 1996, XIX izdanje 1998, XX izdanje 2000, XXI izdanje 2002); XXII izdanje Građevinska knjiga Beograd 2005. Ukupan tiraž preko 120 000 primeraka. (Da li je to najtiražnija matematička knjiga u našoj zemlji ?).

3. Nekoliko odabranih geometrijskih zadataka u kojima se koristi konačnost skupa (Osvrt a konačnost skupa sa odabranim primerima), *Matematičko-fizički list Zagreb, 1(15)(1968), 44-45*

4. Rešenja zadataka iz rada 3, *Matematičko-fizički list Zagreb, 2(15)(1968), 74-76.*

5. Diferencijske jednačine, *Matematička biblioteka, sv.39(1969), 151-168.*

6. Linearna diferencijska jednačina I reda i uopštena aritmetička progresija, *Matematika stručno metodički časopis), 3,56-63*

7. Formulacija problema: br.98 i br.99 , *Mat. Vesnik, 4(19)(1967);* br 261 *Mat.Vesnik, 9(24), sv.2(1972).* Rešenje problema: br 38 *Mat. Vesnik, ?(1966),* br12 *Mat. Vesmik, ?(1971).*

8. Formulacija problema, *Amr. Math. Monthly, ?(1971).*

9. Zbirka zadataka iz više matematike II (koautor M. Ušćumlić), *″Građevinska knjiga″Beograd: I izdanje (1971, 3+792; ″Naučna knjiga″Beograd: (II izdanje 1979, III izdanje 1981, IV izdanje 1984, V izdanje 1986, VI izdanje 1988, VII izdanje 1990); ″Ekumena″Beograd: VIII izdanje 1991; ″Nauka″: (IX izdanje 1994, X izdanje 1998, XI izdanje 2000);*

10. Stav o tri normale i jedna njegova primena, *Matematičko-fizički list Zagreb, 2(21)(1971), 71-73.*

11. Karakterizacija uzajamnog položaja dva vektora pomoću jedne funkcije, *Matematičko-fizički list Zagreb, 1(25)(1974), 14-18.*

12. Četrdeset godina naučnog rada prof. Đ. Kurepe, *Dijalektika,4(1974),129-132.*

13. Matematika I (autorizovana skripta), *I izdanje, Savez Soc. Omladine PMF-a Beograd 1976.*

14. Matematika I, *″Naučna knjiga″ Beograd 1978, 8+437; II izdanje 1982.*

15. Matematika za II razred prve faze srednjeg usmerenog obrazovanja (koautori: Z. Ivković, D. Lopandić i R. Dacić), *″Naučna knjiga Beograd″1978, 1+239; II izdanje 1981.*

16. Matematika, udžbenik za II razred zajedničkih osnova srednjeg usmerenog obrazovanja (koautori: Z. Ivković, R. Dacić, uz korišćenje teksta D. Lopandića iz t.15), *″Naučna knjiga″ Beograd 1982,1+233; II izdanje 1987.*

17. Uvod u višu matematiku I (koautor M. Ušćumlić), *Privr. finan.vodičBeograd 1980, 1+363; II izdanje ″Naučna knjiga″Beograd 1984 (pod novim nazivom* Elementi više matematike I)*; III izdanje 1988;IV izdanje (1990); V izdanje ″Nauka″ Beograd 1992, VI izdanje 1998.*

18. Uvod u višu matematiku II (koautori: M. Ušćumlić i M. Trifunović),*Tehn. Metal. Fakultet Beograd 1983, 5+644; II izdanje ″Naučna knjiga″ Beograd (pod novim nazivom* Elementi više matematike II *1986; III izdanje ″Nauka″1990 IV izdanje 1994; V izdanje „Građevinska knjiga“2005...*

19. O jedinstvenosti nekih algebarskih operacija, *Matematika (stručno-metodički časopis), ?(Sarajevo), 1980.*

20. O uvođenju pojmova luk, površ i telo i njihovim merama, *Republički seminar 82,″Nastava matematike″(1982).*

21. Recenzija udžbenika ″Matematika za V razred osnovne škole″od S. Ptrešića, M. Ignjatovića i B. Jevremovića, *Prosvetni pregled (1985).*
22. Matematika sa zbirkom zadataka za I razred srednjeg obrazovanja i vaspitanja prorodno-matematičke struke (koautori: Z. Kadelburg, V. Stojanović, B Boričić, S Tmušić i D. Raspopović), *″Naučna knjiga″- Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika-Novi Sad 1988;II izdanje 1989.*
23. Matematika za I razred srednje škole (koautori: V. Stojanović, Z. Kadelburg i B. Boričić), *Zavod za izdavanje udžbenika-Novi Sad, ″Naučna knjiga″-Beograd 1991, VII izdanje 1998, VIII izdanje 2004, ...,XIV izdanje2012.*
24. Prevod Matematike za I razred srednje škole na mađarski jezik, slovački jezik i rusinski jezik, *Zavod za udjbenike i nastavna sredstva Beograd 2000. (više izdanja).*
25. Matematika sa zbirkom zadataka za IV razred srednje škole prirodno-matematičke struke i hidrometereološke struke (koautori: D. Banjević, D.Aranđelović i Z. Ivković), *″Naučna knjiga″-Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika Novi Sad 1991.*
26. Matematička analiza za srednjoškolce, (Metodska zbirka zadataka), *″Vedes″ Beograd 1996.*
27. Brojne recenzije udžbenika za srednje škole, brojne recenzije udžbenika matematike za više škole i fakultete.
28. Brojne recenzije naučnih radova iz matematike, za naučne časopise,brojni izveštaji i ocene o štampanim naučnim radovima za Američki referativni časopis Mathematical Reviews,...
29. Равенства, Равенки, Идентитети (ИДЕНТИЧНИ ТРАНСФОРМАЦИИ), *″Sigma″ Skopje 2002.*
30. Jednakosti, jednačine, identiteti (IDENTIČNE TRANSFORMACIJE), *″Nauka« ,Beograd 2002.*
31. Vektorska aksiomatika euklidske geometrije *,«Arhimedes«, Beograd 2004.*
32. Kurs diferencijalne geometrije , „*Gnosos“ Beograd, 2005* .
33. Deset tema iz matematike, *“Zavod za udžbenike“, Beograd 2010.*
34. O definicijama u matematici, *»Zavod za obrazovanje i vaspitanje«, Podgorica 2010, ?*
35. O počecima zasnivanja osnova diferencijalnog i integralnog računa, *MAT-KOL XX(1) (2015),51-71.*
36. Komplementarne njednekosti nejednakosti trougla, *MAT-KOL XXI(2) (2015).*
37. O nejednakosti trougla u aksiomatici euklidske geometrije u srednjoj školi, *Nastava matematike u srednjoj školi, ? (2015)*
38. О заблудама и тешкоћама у неким математичким расуђивањима, *МАТ-КОЛ XXII(2) (2016), 75-90.*

Kratak prikaz naučnog rada

Matematičarima je dobro poznat značaj *skalarnog proizvoda* u **Hilbertovim prostorima**. U Hilbertovim prostorima mogu se definisati i proučavati razni geometrijski pojmovi euklidske geometrije zahvaljujući skalarnom proizvodu.**Teorija linearnih operatora u Hilbertovim prostorima**, koja je osnovni jezik **kvantne mehanike**, zasnovana je na osobinama skalarnog proizvoda. **Harmonijska analiza** i **teorija najboljih aproksimacija** zasnovane su na osobinama ortogonalnosti koja izvire iz pojma skalarnog proizvoda. Itd.

U proizvoljnom normiranom prostoru $(X,\|\cdot\|)$ ne postoji skalarni proizvod pa se metodologija skalarnog proizvoda ne može primenjivati u takvim prostorima. Osnovni kriterijum pomoću koga se karakteriše egzistencija skalarnog proizvoda $(\cdot,\cdot)$, u normiranom prostoru saglasnog sa normom ($(x,x)=\|x\|^2$), jeste sledeći **Jordan-von Nojmanov identitet** (u euklidskoj geometriji poznata Apolonijeva jednakost paralelograma)

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)\quad (x,y\in X),$$

pri čemu je

$$(x,y)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2.$$

Koliki je značaj skalarnog proizvoda u normiranim prostorima govore i sledeće činjenice. Rumunski matematičar **V. I. Istratescu** je 1987. g. objavio knjigu od 895 strana pod nazivom ***„Inner Product Structures" (D.Reidel Publishing Company)*** a unutrašnje korice te knjige je ilustrovao sa jednim paralelogramom i 6 kvadrata nad stranama tog paralelograma i nad njegovim dijagonalama (ilustracija Apolonijeve jednakosti paralelograma, odnosno Jordan -von. Nojmanove karakterizacije egzistencije skalarnog proizvoda u normiranom prostoru). Osim toga Izralelski matematičar **Dan Amir** 1986.g. objavio je knjigu ***Charakterizations of inner product spaces"(Birkhauser-Verlag, Basel-Boston)*** u kojoj su navedena 250 kriterijuma raznih svetskih matematičara o egzistencije skalarnog proizvoda u normiranim prostorima. Svi ti kriterijumi potiču iz druge polovine 20. veka.

U prvoj od ovih knjiga, u integralnom obliku, navedeni su i neki rezultati o egzistenciji skalarnog proizvoda P. Miličića. U ovoj knjizi citirano je 10 Miličićevih radova. U D. Amirovoj knjizi citiran je jedan rad P. Miličića.

Dakle, metodologija skalarnog proizvoda u izgradnji geometrije u opštim **Banachovim prostorima** nije postojala ali je postajala potreba za njom. Zato se 1961.g. pojavio rad ***Semi-inner product spaces*** (***Trans. Amer.Math., Soc. Vol. 100 (1961)***), velikog nemačkog matematičar ***Guntera Lumera*** (1929-2005). U njemu je pokazano da u svakom normiranom prostoru $(X,\|\cdot\|)$ postoji tzv. ***poluskalarni proizvod*** $[\cdot,\cdot]$ (u opštem slučaju normiranih prostora *nejedinstven*), saglasan sa normom. Preciznije, dokazano je da postoji funkcional $[\cdot,\cdot]: X^2 \longrightarrow R$ koji ispunjava uslove

1) $[x,x]=\|x\|^2,$

2) $[\alpha x,\beta y]=\alpha\beta[x,y]\quad (\alpha,\beta\in R;\ x,y\in X,$

3) $[x+y,x]=\|x\|^2+[y,x]\quad (x,y\in X),$

4) $|[x,y]|\leq\|x\|\|y\|\quad (x,y\in X).$

Dakle,vidi se da *poluskalarni proizvod* ima dosta osobina skalarnog proizvoda tj. da je uopštenje *skalarnog proizvoda* nad X^2.

J.R.Giles je u radu ***Classes of semi-inner product space (Trans. Amer. Math. Soc. Vol.129(1967)*** dokazao da postoji normirani prostor X takav da na X^2 ima beskonačno mnogo poluskalarnih proizvoda gornjeg tipa.

Mnogo ranije veliki francuski matematičar ***René Eugéne Gâteaux*** (1889-1914). (***Bulletin de la S.M.F.,tom 50 (1922),1-37***), za slučaj inteziteta vektora u euklidskom prostoru, proučavao je sledeće limese

$$\tau_{\pm}(x,y) := \lim_{t\to\pm 0} \frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} \quad (x,y \in X).$$

U slučaju da na X^2 postoji skalarni prizvod $(\cdot,\cdot)$ saglasan sa normom, lako je videti da je tada

$$\tau_{-}(x,y) = \tau_{+}(x,y) = \frac{(x,y)}{\|x\|} \quad (x,y \in X - \{0\}).$$

P. MIličić je 1970. g., u svojoj doktorskoj disertaciji, pokazao da se, u širokoj klasi normiranih prostora, (koji su glatki (S), striktno konveksni (SC) i refleksivni (R)), pomoću gornjih Gatoovih izvoda norme, na *jedinstven način*, može definisati jedan određen *poluskalarni proizvod*, kao određena funkcija norme prostora. Naime, on je definisao funkcional $g: X^2 \to R$ sa

$$g(x,y) := \frac{\|x\|}{2}(\tau_{-}(x,y) + \tau_{+}(x,y)).$$

Pokazao je da ovaj funkcional ima osobine:

$$g(x,x) = \|x\|^2, g(ax,by) = abg(x,y), g(x,y+z) = g(x,y) + g(x,z),$$
$$|g(x,y)| \le \|x\|\|y\| \quad (a,b \in R;\ x,y \in X)$$

Nazvao ga je, po Gâteauxu, ***g-funkcional***. Naravno da je $[x,y] := g(y,x)$ jedan Lumerov poluskalarni proizvod. Dakle, od velikog je značaja ovaj poluskalarni proizvod jer se definiše preko norme na određen način. Ako u prostoru X postoji skalarni proizvod $(.,.)$ onda se ovaj poluskalarni proizvod svodi na skalarni proizvod ($(x,y) = g(x,y)$, tj. $g(.,.)$ je skalarni proizvod). Osim toga, za mnoge konkretne normirane prostore, bez skalarnog proizvoda, može se vrednost $g-$funkcionala dobiti u eksplicitnoj formi. Na primer, za prostor nizova l^p $(p \ge 1)$ važi

$$g(x,y) = \|x\|^{2-p} \sum_k |x_k|^{p-1} (\operatorname{sgn} x_k) y_k \quad (x = x_1, x_2, \cdots) \in l^p \setminus \{0\}).$$

Treba naglasiti da je, u slučaju kada je X sa osobinama (S), (SC) i (R), P. Miličić dokazao da je $g(x,y)$ jedinstven poluskalarni proizvod na X^2, naravno, saglasan sa normom prostora ($(x,x) = \|x\|^2$).

U radu ***»A generalization of the paralellogram equality in normed spaces« (Jour. of Mathematics of Kyoto Univ., vol.38, No1(1998), 71-75)*** P. Miličić je definisao tzv. ***prostore sa kvazi-skalarnim proizvodima.*** To su prostori kod kojih važi sledeća uopštena jednakost paralelograma

$$\|x+y\|^4 - \|x-y\|^4 = 8(\|x\|^2 g(x,y) + \|y\|^2 g(y,x)) \quad (x,y \in X).$$

Koristeći $g-$funkcional definisao je tzv. $g-$ ***ugao*** između dva vektora i tzv. $g-$ ***ortogonalnost,*** na tri načina. Naime, prema Koši-Švarc-Bunjkovskijevu nejednakost $|g(x,y)|\leq\|x\|\|y\|$ uveo je, na sledeći način, tri $g-$***ugla***

$$\cos\angle_1(x,y):=\frac{g(x,y)}{\|x\|\|y\|},$$

$$\cos\angle_2(x,y):=\frac{g(x,y)+g(y,x)}{2\|x\|\|y\|},$$

$$\cos\angle_3(x,y):=\frac{\|x\|^2g(x,y)+\|y\|^2g(y,x)}{\|x\|\|y\|(\|x\|^2+\|y\|^2)}.$$

Iz ovih definicija slede tri definicije $g-$***ortogonalnosti*** uglova:

$$x\perp_1 y\Leftrightarrow g(x,y)=0,$$
$$x\perp_2 y\Leftrightarrow g(x,y)+g(y,x)=0,$$
$$x\perp_3 y\Leftrightarrow \|x\|^2g(x,y)+\|y\|^2g(y,x)=0.$$

(nazovimo ih redom: g_1-ortogonalnost, g_2-ortogonalnost i g_3-ortogonalnost)

Značajno je ovde istaći da su od ranije postojale ortogonalnosti vektora u proizvoljnom normiranom prostoru:

$$x\perp_B y\Leftrightarrow(\forall\lambda\in R)\|x\|\leq\|x+\lambda y\|$$ (*Birkhoff orthogonality,1935.*g)

$$x\perp_J y\Leftrightarrow\|x-y\|=\|x+y\|$$ (*James orthogonality,1947. g*),

$$x\perp_S y\Leftrightarrow\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|=\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|$$ *(Singer orthogonality,1971*

Opravdanje za uvođenje $g-$uglova i $g-$ortogonalnosti, pored ostalog, sledi iz sledećih dokazanih činjenica (koje je P. Miličić dokazao:

$$(x\perp_1 y\Leftrightarrow x\perp_B y)\Leftrightarrow X \text{ gladak prostor.}$$

U kvazi euklidskom prostoru važe ekvivalencije

$$x\perp_2 y\Leftrightarrow x\perp_S y,$$
$$x\perp_3 y\Leftrightarrow x\perp_J y.$$

Posebno treba naglasiti da klasa ***kvazi-euklidskih prostora*** ima više osobina koje ima euklidski prostor. Ovi prostori su *uniformno glatki, vrlo glatki* i *uniformno konveksni*. To znači da kompletni prostori koji pripadaju toj klasi pripadaju i klasi tzv. *uniformno neprekidnih* prostora koje je definisa ***J.R.Giles*** **1967.g**.

Ako je normirani prostor X refleksivan, tj.ako postoji izometrijski izomorfizam $J : X \to X^{**}$ ($X^{\times\times}$ je drugi dual od X) tada J održava $g-$poluskalarni proizvod vektora tj. važi $g(Jx, Jy) = g(x, y)$. To znači da se u tom slučaju odrgavaju definisani glovi između vektora idefinisane ortogonalnosti.

U kvazieuklidskim prostorima u odnosu na uvedene pojmove važe mnoga geometrijska tvrđenja euklidske geometrije. Evo nekih.1)Dužine dijagonala paralelograma $(0, x, y, x+y)$ su jednake ako i samo ako je taj paralelogram g_1 $-$pravougaonik, tj ako je $x \perp_1 y$. 2). Dijagonale romba $(0, x, y, x+y)$ su g_1 $-$ortogonalne, tj $(x-y) \perp_1 (x+y)$. 3) Ugao nad prečnikom kruga je g_3 $-$prav. 4) Centar opisanog kruga oko g_3 $-$ prvouglog trougla je središte hipotenuze.

Budući da se u prostoru$(X, (.,.))$,sa skalarnim proizvodom$(.,.)$, površina paralelograma, sa temenima $0, x, y, x+y$,može definisati sa

$$A(x, y) := \sqrt{\Gamma(x, y)} = \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - (x, y)^2},$$

i da se zapremina paralelepipeda sa temenima

$$0, x, y, z, x+y, x+z, y+z, x+y+z$$

može definisati sa

$$V(x, x, z) = \sqrt{\Gamma(x, y, z)},$$

($\Gamma(x, y)$ je Gramova determinanta vektora x i y), u normiranom prostoru X sa poluskalarnim proizvodom $g(\cdot, \cdot)$, odgovarajući pojmovi se mogu definisati sa

$$A(x, y) := \sqrt{\Gamma(x, y)} = \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - g(x, y) g(y, x)}.$$

$$V(x, y, z) := \sqrt{|\Gamma(x, y, z)|} = \left(\left| \begin{matrix} g(x, x) & g(x, y & g(x, z) \\ g(y, x) & g(y, y) & g(y, z) \\ g(z, x) & g(z, y) & g(z, z) \end{matrix} \right| \right)^{1/2}.$$

Obzirom na činjenicu da bidualno preslikavanje J održava $g-$poluskalarni proizvod, može se zaključiti da su navedene površina paralelograma i zapremina paralelepipeda invarijantni u odnosu J $-$ preslikavanje.

Važnost uvedenog $g-$ funkcionala prepoznali su svi oni matematičari koji se bave geometrijom Banahovih prostora.

U monografiji ***Semi-Inner Product and Applications (Nova sciance Publ Inc Published,2004/02)*** od ***Sever S. Dragomira*** prikazano je više Miličićevih rezultati vezanih za ***g***-funkcional. Tako četvrta glava u toj monografiji nosi naslov ***Semi-Inner Product in the Sence of Miličić***.*(S.S.*Dragomir $g-$funkcional naziva po Miličiću naziva $M-$funkcional). U pomenutoj monografiji su prikazane glavne osobine prostora tipa *(G)*, koje je Miličić definisao koristeći ***g***-funkcional. Osim toga, u istoj monografiji, paragraf 9.2 nosi naslov ***Orthogonality in the Sence of Miličić*** a paragrf 10.2 je naslovljen sa ***The Case of Miličić Orthogonality***. Dakle, pomoću ***g-*** funkcionala P. Miličić je dao više priloga geometriji Banachovih prostora. Navedimo jedan koji govori onajboljim aproksimacijama:

Neka je X gladaki uniformno konveksan normiran prostor i neka su $x, y \in X \setminus \{0\}$ linearno nezavisni vektori. Vektor ax je jdinstvena najbolja aproksimacija vektora y vektorima iz $span\{x\} = [x]$, tj. $P_{[x]}\, y = ax$ ako i samo ako je

$$g(y - ax, x) = 0,$$

tj.ako i samo ako je vektor $y - ax$ g_1 $-$ortogonalan na vektor x.(Ova jednačina se u nekim prostorima, kao na pr. l^4 svodi na algebarsku jednačinu). U ovoj monografiji citirano je 14 Miličićevih radova.

Poznatu ***Rieszovu teoremu*** o reprezentaciji ograničenih linearnih funkcionala preko skalarnog proizvoda $(\cdot,\cdot)$ u Hilbertovim prostorima, (kada ju je otkrio, Riesz je napisao da se sva teorija Hilbertovih prostora može izvesti iz te teoreme), uopštio je ***J. R. Giles (Trans. Amer. Math.Soc. ,Vol. 129 (1967))***, na taj način što je pokazao da ona važi ako se umesto Hilbertovog prostora uzme Banahov prostor koji je gladak i uniformno konveksan a umesto skalarnog proizvoda uzme odgovarajući poluskalarni proizvod.

P. Miličić je ovo Gilesovo uopštenje poboljšao na taj način što je uslove normiranog prostora oslabio pretpostavljajući da je on samo strogo konveksan, gladak i refleksivan (što su slabiji uslovi od glatkosti, uniformne konveksnosti i kompletnosti) a poluskalarni proizvod $[\cdot,\cdot]$ je zamenio sa jednim funkcionalom g_p $(p > 1)$, koga je on definisao, i koji se za $p = 2$ svodi na ranije definisan funkcional g. Preciznije njegov rezultat glasi:

Neka je $p > 1$ fiksiran realan broj i neka je *X* strogo konveksan normiran prostor koji je gladak i refleksivan. Pomoću ovog funkcionala Miličić je pokazao da važi sledeća reprezentacija ograničenog linearnog funkcionala: Za svaki ograničen linearan funkcional f na *X* postoji jedinstven $y \in X$ takav da je, za svaki $x \in X$,

$$f(x) = g_p(y, x).$$

Poznati indijski matematičar, na Univerzitetu u Kalkuti, ***Dilip Kumer Sen***, ovu Miličićevu reprezentativnu teoremu direktno je koristio da bi definisao i proučio novu vrstu operatora, tzv ***p-adjungovanih operatora***. To je objavljeno u njegova dva rada, u radu »***Sur l΄adjoint géneralisé d΄un opérateur« (C.R.Acad. Sci.Paris,287(1978))*** i u radu »***Generalized p-selfadjoint operators on Banach spaces« (Math. Japonica 27.No 1(1982)).***

Španski matematićar ***Viktor Manuel Onieva*** u svojoj monografiji, na španskom, **»** ***El operador adjunto en analisis funcional*«** **(*Univerzidad de Santander* 1980**.) , navedenu Miličićevu teoremu, citira kao ***teoremu Riesz-Miličića***, što je za Miličića velika čast, ako se ima u vidu da je Riesz jedan od tvoraca funkcionalne analize.

Koristeći $g-$ funkcional, P.Miličić je dao više karakterizacija nekih osnovnih geometrijskih svojstava realnih normiranih prostora. Pomoću uvedenog pojma g_1-ugla dao je više karakterizacija pojedinih klasa normiranih prostora kao što su: *strogo konveksni prostori, uniformno konveksni prostori, lokalno uniformno konveksni prostori, uniformno konveksni prostori u proizvoljnom pravcu, glatki prostor* i *uniformno glatki prostori*. Ovi rezultati su delimično prikazani u pomenutoj monografiji S.S.Dragomira.

Više Miličićevih rezultata koristio je, i citirao (4 rada), nemački matematičar ***Volker W. Thurey*** u svojoj monografiji ***Angles and a Classification of Normed Spaces (ArXiv: 1207 [math.FA] 2012).***

U radu *»**The angle modulus of the deformation of a normed space«*** (**Riv. *Math.Univ. Parma, (6)3(2000), 101-111)*** definisao je nove pojmove: tzv. *uglovni modul konveksnost, uglovni modul glatkosti i uglovni modul deformacije* normiranih prostora i pomoću njih dao nove karakterizacije konveksnosti i glatkosti normiranih prostora.

Uveo je novi pojam tzv. *slabe glatkosti normiranog prostora* i pomoću njega je okarakterisao tzv. Λ***-prostore*** koje je definisao rumunski matematičar ***G.Godini*** 1979.g.

Nekoliko radova posvećeno je problemima novouvedenog pojma g_1***-projekcije*** vektora (***Scientiae Math. Japonica,vol.5, No 3 (2001)***) i problemima g_1***-ortogonalnog*** razlaganja normiranog prostora

U 10 svojih radova, on raspravlja o tzv. g_1***-ortonormiranim sistemima*** vektora u normiranim prostorima. Ovde ističemo njegov rad ***»On the Riesz-Fishcer theorem in a smooth Banach spaces« (Mat. Vesnik 44 (1992)).*** U njemu je, korišćenjem g_1- ortonormiranog niza pokazano da ***Riesz-Ficherova*** teorema, koja važi u Hilbertovim prostorima, važi i u glatkim Banachovim prostorima, ako se umesto skalarnog proizvoda uzme g-funkcional.Ovde je takođe pokazano da ***Beselova nejednakost*** i ***Parsevalova jednakost*** važe u glatkim, striktno konveksnim i refleksivnim prostorima u odnosu na ***g-poluskalarni proizvod***. Takođe je dat i potreban i dovoljan uslov da jedan g_1-ortonormiran niz (e_n)bude ***Schauderova baza*** u određenom normiranom prostoru.

Dakle, može se reći da naučna delatnost P. Miličića pripada, uglavnom, oblasti ***Geometrije Banahovih prostora,*** iako on ima radova koji ne pripadaju toj oblasti, takvi su radovi pod brojevima 12. i 24. Rad pod br.12 koji pripada oblasti kvaterniona ušao je u kolekciju referenci ***Marie Josefa Wonenburger Plamells*** u oblasti *nekomukativnih algebri* a rezultat rada pod br. 24 uvršćen je u monografiju ***Sever Silvestru Dragomira „Advances in Inequalities of the Schwarz Grüss and Bessel type in inner product spaces“***

Beograd, 16.05.2016.