MAT-KOL (Banja Luka)
XXII (2)(2016), 127-133
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5828 (o)

NEKE ZANIMLJIVE ALGEBARSKE NEJEDNAKOSTI
/Some interesting algebraic inequalities/

Šefket Arslanagić i Harun Hindija,
Sarajevo, BiH

Sažetak: U ovom radu su dati zanimljivi dokazi algebarske nejednakosti:

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_1}\geq\sqrt{n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)};\ \ \left(a_i>0,\, i=1,2,\ldots,n\right)$$

za $n=2$ i $n=3$ kao i uputa za dokaz za $n=4$. Za ove dokaze se koristi nejednakost Koši-Buniakovski-Švarca. Poslije ovih dokaza od čitalaca ovog rada se traži da dokažu i gornju generalisanu nejednakost.

Ključne riječi i izrazi: algebarska nejednakost, nejednakost Koši-Buniakovski-Švarca, Engelova nejednakost.

Abstract: In this paper are gived the interesting proofs of the algebraic inequality:

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_1}\geq\sqrt{n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)};\ \ \left(a_i>0,\, i=1,2,\ldots,n\right)$$

for $n=2$ and $n=3$ as and directions for the proof for $n=4$. For these proofs we use the inequality of Cauchy-Buniakovski-Schwarz. After these proofs the authors of this paper ask from the readers of this paper that try to prove the given generalisation of the inequality.

Key words and phrases: algebraic inequality, the inequality of Cauchy-Buniakvski-Schwarz, the Engel's inequality.

AMS Subject Classification (2010): 97 F 50
ZDM Subject Classification (2010): F 50, N 50

Ovaj rad ćemo započeti sa dokazom jedne na prvi pogled jednostavne algebarske nejednakosti. Riječ je o nejednakosti:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\ge\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)};\ \left(a,b>0\right) \tag{1}$$

Upotrebićemo poznatu nejednakosti Koši-Buniakovski-Švarca napisanoj u **Engelovoj**[1] **formi**:

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{x_n}\ge\frac{\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n};\ \left(x_i>0,\, a_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\ldots,n\right)$$

za $n=2$, tj.

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}\ge\frac{\left(a_1+a_2\right)^2}{x_1+x_2} \tag{2}$$

Naime, dobijamo iz (2):

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\ge\frac{\left(a+b\right)^2}{a+b};\ \left(a,b>0\right)$$

a odavde

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\ge a+b\ .$$

Da bismo dokazali datu nejednakost (1), trebamo sada dokazati da je

$$\begin{aligned}&a+b\ge\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\\&\Leftrightarrow\left(a+b\right)^2\ge2\left(a^2+b^2\right)\\&\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\le0\\&\Leftrightarrow\left(a-b\right)^2\le0\ ,\end{aligned}$$

a ova nejednakost nije tačna. Neki su sada skloni tvrdnji da data nejednakost (1) nije tačna. Za njih u najboljem slučaju vrijedi jednakost u (1) ako i samo ako je $a=b$.

Na svu sreću, nije tako. Dokazaćemo sada sa malo više truda da je data nejednakost (1) tačna.

Dokaz 1: Imamo

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\ge\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)};\ \left(a,b>0\right)/\cdot ab$$

[1] Engel Arthur (rođen 1928. godine), poznati njemački matematičar, autor knjige „Problem-Solving Strategies“ namijenjene radu sa nadarenim učenicima – takmičarima na raznim matematičkim takmičenjima.

$$\Leftrightarrow a^3+b^3 \geq ab\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\ /^2$$

$$\Leftrightarrow \left(a^3+b^3\right)^2 \geq 2a^2b^2\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^6-2a^4b^2+2a^3b^3-2a^2b^4+b^6 \geq 0 / :\left(b^6>0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^6}{b^6}-2\cdot\frac{a^4}{b^4}+2\cdot\frac{a^3}{b^3}-2\cdot\frac{a^2}{b^2}+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^6-2\left(\frac{a}{b}\right)^4+2\left(\frac{a}{b}\right)^3-2\left(\frac{a}{b}\right)^2+1 \geq 0,$$

a odavde nakon smjene $\frac{a}{b}=t>0$ dobijamo nejednakost:

$$t^6-2t^4+2t^3-2t^2+1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)^2\left(t^4+2t^3+t^2+2t+1\right) \geq 0,$$

a ova nejednakost je tačna pa je tačna i njoj ekvivalentna nejednakost (1). Vrijedi jednakost ako i samo ako je $t=1$, tj. $\frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b$.

Sada se opravdano postavlja pitanje da li se nejednakost (1) može dokazati na neki drugi način. Odgovor je pozitivan.

Dokaz 2: Poćićemo od poznate nejednakosti Koši-Buniakovski-Švarca za $n=2$:

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)\left(a^2b+ab^2\right) \geq \left(a^2+b^2\right)^2,$$

a odavde

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a} \geq \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^2b+ab^2} \tag{3}$$

Sada je dovoljno dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^2b+ab^2} \geq \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)} \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(a^2+b^2\right)^4}{\left(a^2b+ab^2\right)^2} \geq 2\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(a^2+b^2\right)^3}{\left(a^2b+ab^2\right)^2} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(a^2+b^2\right)^3}{2} \geq \left(a^2b+ab^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right) \cdot \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{2} \geq \left(a^2b+ab^2\right)^2 \qquad (5)$$

Kako je zbog nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab, \text{ tj.}$$

$$\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{2} \geq 2a^2b^2,$$

to imamo nejednakost:

$$\left(a^2+b^2\right) \cdot \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{2} \geq 2a^2b^2\left(a^2+b^2\right).$$

Sada ćemo dokazati nejednakost:

$$2a^2b^2\left(a^2+b^2\right) \geq \left(a^2b+ab^2\right)^2$$

ili

$$\left(a^2b^2+a^2b^2\right)\left(a^2+b^2\right) \geq \left(a^2b+ab^2\right)^2,$$

a ovo je nejednakost Koši-Buniakovski-Švarca za $n=2$, što znači da je nejednakost (5) tačna. Ovim smo dokazali i njoj ekvivalentnu nejednakost (4). Najzad, iz nejednakosti (3) i (4) slijedi data nejednakost (1) gdje vrijedi jednakost ako i samo ako je $a=b$.

Ovaj Dokaz 2. će nam dati ideju kako da dokažemo nejednakost:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq \sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)};\ \left(a,b,c>0\right) \qquad (6)$$

Ako bi pokušali koristiti nejednakost Koši-Buniakovski-Švarca u Engelovoj fomi za $n=3$, dobili bi:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}, \text{ tj.}$$

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c.$$

Ali, ne vrijedi

$$a+b+c\geq\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}, \text{ tj.}$$

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}},$$

već, naprotiv vrijedi poznata nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine za tri pozitivna realna broja:

$$\frac{a+b+c}{3}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Dakle, da bi dokazali nejednakost (6), koristićemo put sličan onom kod Dokaza 2. nejednakosti (1). Opet ćemo poći od poznate nejednakosti Koši-Buniakovski-Švarca za $n=3$:

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\geq\left(a^2+b^2+c^2\right)^2,$$

a odavde

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+b^2c+c^2a} \tag{7}$$

Dovoljno je sada dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+b^2c+c^2a}\geq\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}, \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^4}{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)^2}\geq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{3}\geq\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3}\geq\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)^2. \tag{9}$$

Iz poznate nejednakosti:

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3} \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

$$\left(\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(c^2-a^2\right)^2\right] \geq 0\right),$$

dobijamo

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3} \geq \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right).$$

Dovoljno je sada dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \geq \left(a^2b+b^2c+c^2a\right)^2,$$

a ovo je nejednakost Koši-Buniakovski-Švarca za $n=3$, što znači da je nejednakost (9) tačna, pa je tačna i njoj ekvivalentna nejednakost (8). Najzad iz nejednakosti (7) i (8) slijedi data nejednakost (6) gdje vrijedi jednakost ako i samo ako je $a=b=c$.

Napomena 1. Na sličan način dokazujemo i nejednakost:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a} \geq \sqrt{4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)};\ (a,b,c,d>0). \qquad (10)$$

Prethodno treba dokazati nejednakost:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2 \leq \frac{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2}{4};\ (a,b,c,d>0).$$

Ona se lako dokaže kao posljedica nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja:

$$\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)} \leq \frac{\left(a^2+c^2\right)+\left(b^2+d^2\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right) \leq \left(\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2 \leq \frac{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2}{4}.$$

Naravno i ovdje trebamo poći od nejednakosti Koši-Buniakovski-Švarca za $n=4$:

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a}\right)\left(a^2b+b^2c+c^2d+d^2a\right)\geq\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2.$$

Napomena 2. Kao otvoreno pitanje ostavljamo ambicioznim i upornim čitaocima ovog rada da pokušaju dokazati generalizaciju nejednakosti (1), (6) i (10) koja glasi:

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_1}\geq\sqrt{n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)};\ \left(a_i>0,\ i=1,2,\ldots,n\right).$$

Napomena 3. U [5], str. 74 je data nejednakost (kao Problem 13.) autora Nguyen Van Thacha koja glasi:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 3\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}};\ \left(a,b,c>0\right).$$

Njen dokaz je prilično složen. No, lako pokažemo da je ova nejednakost bolja (jača) od nejednakosti (6) jer imamo:

$$3\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}}\geq\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow 9\cdot\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}\geq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a^4+b^4+c^4\right)\geq\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^4+2b^4+2c^4\geq 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(c^2-a^2\right)^2\geq 0\ ,$$

što je tačno.

LITERATURA

[1] Arslanagić, Š., *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
[2] Arslanagić, Š., *Matematička čitanka 7*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2015.
[3] Arslanagić, Š., *Matematička čitanka 8*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2016.
[4] Engel, A., *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag New York, Inc. 1998.
[5] Tran Phuong, *Proposal for a book „Diamonds in Mathematical Inequalities“*, Hanoi Publishing House, Hanoi, Vietnam, 1990.