

PRILOG ZA ČLANAK
„NEKE ZANIMLJIVE ALGEBARSKJE NEJEDNAKOSTI“
(Addenda to the article „Some interesting algebraic inequalities“)

Dragoljub Milošević

Gornji Milanovac, Srbija
e-nail: dramil947@gmail.com

Sažetak: U ovom radu dajemo nove dokaze dviju nejednakosti iz Arslanagićevog i Hindijinog članka (v. [1]).

Ključne riječi i izrazi: algebarska nejednakost, Engelova nejednakost.

Abstract: In this paper we give new proofs of two inequalities from the article of Arslanagić and Hindija (see: [1]).

Key words and phrases: algebraic inequality, the Engel's inequality.

AMS Subject Classification (2010): 97 F 50

ZDM Subject Classification (2010): F 50, N 50

U [1] autori su dali dokaze sljedećih nejednakosti:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \sqrt{2(a^2 + b^2)}, (a, b > 0) \quad (1)$$

i

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}, (a, b, c > 0). \quad (2)$$

Ovdje ćemo prikazati dva nova dokaza nejednakosti (1) i jedan novi dokaz nejednakosti (2), bez korištenja nejednakosti Koši - Švarc - Bunjakovskog. Daćemo i neke zanimljive napomene.

a) **Dokaz 1:** Najprije dokažimo sljedeću nejednakost

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)}. \quad (3)$$

Imamo redom:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)} &\Leftrightarrow \left(\frac{a^3 + b^3}{ab}\right)^3 \geq 4(a^3 + b^3) \\ &\Leftrightarrow (a^3 + b^3)^2 \geq 4a^3b^3 \\ &\Leftrightarrow (a^3 - b^3)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

što je tačno.

U [2], str. 24, je dokazana nejednakost između kvadratne i kubne sredine dva pozitivna broja a i b :

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}},$$

tj.

$$\sqrt[3]{4(a^3 + b^3)} \geq \sqrt{2(a^2 + b^2)}. \quad (4)$$

Iz nejednakosti (3) i (4) slijedi nejednakost (1).

Dokaz 2: Prvo ćemo dokazati nejednakost

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{ab(a+b)}. \quad (5)$$

Imamo:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} - \frac{(a^2 + b^2)^2}{ab(a+b)} &= \frac{a^3(a+b) + b^3(a+b) - (a^2 + b^2)^2}{ab(a+b)} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} \\ &= \frac{(a-b)^2}{ab} \end{aligned}$$

$$\geq 0,$$

čime je dokaz nejednakosti (5) okončan.

Tačna nejednakost $(a - b)^2 \geq 0$ je ekvivalentna sa

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

ali i sa

$$a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)},$$

pa iz (5) slijedi

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} &\geq \frac{2ab(a^2 + b^2)}{ab(a+b)} \\ &= \frac{2(a^2 + b^2)}{a+b} \\ &\geq \frac{2(a^2 + b^2)}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} \\ &= \sqrt{2(a^2 + b^2)}, \text{ tj. (1).} \end{aligned}$$

b) **Dokaz:** U [3], str. 8, nalazi se dokaz nejednakosti za $x, y, z > 0$ i $a, b, c \in \mathbf{R}$:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}. \quad (6)$$

Primjenom nejednakosti (6) dobijamo

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{a^4}{a^2b} + \frac{b^4}{b^2c} + \frac{c^4}{c^2a} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b + b^2c + c^2a}. \quad (7)$$

Kako vrijede sljedeće dvije nejednakosti

$$a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \quad (8)$$

$$(\Leftrightarrow (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2))$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2) \geq 0 \text{ (tačno)}$$

i

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \quad (9)$$

$$(\Leftrightarrow 3(a^2b + b^2c + c^2a) \leq a^3 + ab^2 + ac^2 + ba^2 + b^3 + bc^2 + ca^2 + cb^2 + c^3)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2b + b^2c + c^2a) \leq a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2$$

$$\Leftrightarrow (a^3 - a^2b) + (b^3 - b^2c) + (c^3 - c^2a) + (ab^2 - a^2b) + (bc^2 - b^2c) + (ca^2 - c^2a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-b) + b^2(b-c) + c^2(c-a) + ab(b-a) + bc(c-b) + ca(a-c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2-ab) + (b-c)(b^2-bc) + (c-a)(c^2-ca) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)^2 + b(b-c)^2 + c(c-a)^2 \geq 0 \text{ (tačno) },$$

iz (7) slijedi

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} \\ &= \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c} \\ &\geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} \\ &= \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}, \end{aligned}$$

čime je dokaz nejednakosti (2) završen.

Napomena 1: Nejednakost (6) autori članka [1] nazivaju **Engelovom formom** nejednakosti Koši-Švarc-Bunjakovskog:

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{x_1+x_2+\dots+x_n}; \quad (x_i > 0, a_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

za $n = 3$.

Napomena 2: Nejednakost (5) se može dobiti primjenom Engelove nejednakosti (10) za $n = 2$:

$$\frac{a^4}{a^2b} + \frac{b^4}{b^2a} \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b+b^2a} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}.$$

Napomena 3: S obzirom da su tačne nejednakosti

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_1 \leq \frac{1}{2} (a_1 + a_2) (a_1^2 + a_2^2), \quad (a_1, a_2 > 0)$$

$$(\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 \geq 0)$$

i

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_1 \leq \frac{1}{3} (a_1 + a_2 + a_3) (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2), \quad (a_1, a_2, a_3 > 0)$$

(v. nejednakost (9)),

postavlja se pitanje: Da li je tačna nejednakost

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \dots + a_n^2 a_1 \leq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2),$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n > 0) ?$$

Napomena 4: Pozitivan odgovor na posljednje pitanje predstavljao bi jedan od ključeva za dokazivanje generalizacije nejednakosti (1) i (2):

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_1} \geq \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}; \quad (a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n).$$

LITERATURA

- [1] Arslanagić, Š., Hindija, H., *Neke zanimljive algebarske nejednakosti*, MAT-KOL (Banja Luka), XII (2)(2016), 127 – 133.
- [2] Simjanović, D.J., Vesić, N.O., *Uopštenja nekih algebarskih nejednakosti*, MAT-KOL (Banja Luka), XIX (3)(2013), 23 – 29.
- [3] Милошевић, Д., *Једна неједнакост и њене примене*, Тангента (Београд), **55** (2008/2009-3), 8-10

Primljeno u redakciju 26.06.2016. Dostupno online 04.07.2016.