MAT-KOL (Banja Luka)
XXII (1)(2016), 1-4
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5828 (o)

NEŠTO VIŠE
O POBOLJŠANJU OJLEROVE NEJEDNAKOSTI

(Some more about the improvement of Euler's inequality)

Dr. Šefket Arslanagić

Sarajevo, BiH

Sažetak: U ovom radu je dato još jedno poboljšanje Ojlerove nejednakosti za trougao $R \geq 2r$, gdje su R i r radijusi opisane i upisane kružnice trougla ΔABC.

Ključne riječi: a,b,c dužine stranica trougla, R i r radijusi opisane i upisane kružnice trougla, oštrougli i tupougli trougao, Ojlerova nejednakost.

Abstract: In this paper we give yet one improvement of Euler's inequality for the triangle $R \geq 2r$, where R and r are the circumradius and inradius of a triangle ΔABC.

Key words: a,b,c the side lengths of a triangle, R and r circumradius and inradius of a triangle, acute and obtuse triangle, Euler's inequality.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

U matematičkoj literaturi o geometrijskim nejednakostima svakako zapaženu ulogu igra geometrijska **Eulerova[1] (Ojlerova) nejednakost** za trougao koja glasi:

$$R \geq 2r, \tag{1}$$

gdje su R i r radijusi opisane i upisane kružnice trougla ΔABC.

U [1] i [2] je dato i nekoliko poboljšanja ove nejednakosti:

$$\frac{R}{r} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b}, \tag{2}$$

[1] L. Euler (Ojler), 1707.-1783., čuveni švajcarski matematčar

$$\frac{R}{r} \geq \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right), \tag{3}$$

$$\frac{R}{r} \geq \frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}, \tag{4}$$

$$\frac{R}{r} \geq \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4abc}, \tag{5}$$

$$\frac{R}{2r} \geq \frac{m_a}{h_a}, \tag{6}$$

gdje su a,b,c dužine stranica trougla ΔABC, a m_a i h_a su dužine težišnice i visine tog trougla povučene iz vrha A.

U [3] je dato još jedno poboljšanje nejednakosti (1) za **oštrougli trougao** koje glasi:

$$\frac{r}{2R} \leq \frac{abc}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}}. \tag{7}$$

U međuvremenu sam našao i dokaz nejdnakosti (7) u slučaju kada je trougao ΔABC **tupougli**. Dat ćemo sada taj dokaz.

Neka je u trouglu ΔABC ugao α tupi. Tada je $\cos\alpha < 0$, te zbog toga iz kosinusne teoreme:

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha > b^2+c^2, \tag{8}$$

i

$$2P_{\Delta ABC} = bc\sin\alpha < bc, \tag{9}$$

jer je $0 < \sin\alpha < 1$.

Tada važe nejednakosti

$$b+c-a>0,\ a^2-b^2-c^2>0$$

i

$$b^2-bc+c^2 = \left(b-\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2>0.$$

Imamo sada

$$a^2(a+b+c)^2-2\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+a^2\right)=$$

$$=a^2\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\right)-2a^2c^2-2a^4-2b^2c^2-2a^2b^2=$$

$$=2(b+c-a)a^3+\left(a^2-b^2-c^2\right)\left(a^2+2bc\right)+2bc\left(b^2-bc+c^2\right)>0,$$

a odavde

$$2\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+a^2\right)<a^2\left(a+b+c\right)^2. \tag{10}$$

Sada, zbog (8), (9) i (10), dobijamo:

$$\left(b^2+c^2\right)\cdot 16\left(P_{\Delta ABC}\right)^4\cdot 2\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+a^2\right)<a^2\cdot b^4c^4\cdot a^2\left(a+b+c\right)^2,$$

Odnosno, zbog $P_{\Delta ABC}=\dfrac{abc}{4R}$ i $P_{\Delta ABC}=\dfrac{\left(a+b+c\right)r}{2}$:

$$2\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\cdot\left[\frac{\left(abc\right)^2\left(a+b+c\right)^2r^2}{4R^2}\right]<\left(abc\right)^4\left(a+b+c\right)^2$$

te

$$2\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\cdot\frac{r^2}{4R^2}<\left(abc\right)^2,$$

tj.

$$\frac{r^2}{4R^2}\le\frac{\left(abc\right)^2}{2\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)},$$

a odavde nakon korjenovanja:

$$\frac{r}{2R}\le\frac{abc}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}},$$

što je trebalo dokazati.

Napomena 1. U (1) važi jednakost ako i samo ako je u pitanju jednakostranični trougao $\left(a=b=c\right)$, tada je $R=2r$. Ako je u pitanju tupougli trougao, tada u (7) važi očigledno stroga nejednakost, tj.:

$$\frac{r}{2R}<\frac{abc}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}}.$$

Napomena 2. Dokazaćemo sada da važi nejednakost

$$\frac{abc}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}}\le\frac{1}{4} \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)} \geq 4abc$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right) \geq 8a^2b^2c^2 ,$$

što je tačno zbog nejednakosti $a^2+b^2 \geq 2ab$, $b^2+c^2 \geq 2bc$, $c^2+a^2 \geq 2ca$.

Najzad, iz (7) i (11) slijedi za oštrougli trougao nejednakosr $R \geq 2r$, a za tupougli trougao slijedi iz (7) i (11) nejednakost $R > 2r$.

LITERATURA

[1] **Arslanagić, Š.**, *Matematička čitanka*, Grafičar promet, d.o.o., Sarajevo, 2008.

[2] **Arslanagić, Š.**, *Matematička čitanka 2*, Grafičar promet, d.o.o., Sarajevo, 2010.

[3] **Arslanagić, Š.**, *Matematička čitanka 6*, Grafičar promet, d.o.o., Sarajevo, 2014.

Pristiglo u Redakciju 21.09.2015. Dostupno na internetu 28.09.2015.