MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXII (1)(2016), 45-59 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

Površina konveksnog i konkavnog četverokuta pomoću jedne formule

Petar Svirčević

Zagreb, Hrvatska
e-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr

Sažetak. U ovom članku ćemo izvesti formulu pomoću koje je može eksplicite izračunati površina općeg konveksnog i konkavnog četverokuta. Naime, to je poopćenje Brahmaguptine formule i na opći konkavni četverokut.

Ključne riječi: *opći konkavni i konveksni četverokut, površina, Brahmagupta*

Abstract. In this article we derive a formula by which it can be explicitly calculate the area of a general convex and concave quadrangles. In fact, it is a generalization of the Brahmagupta formula on the general concave quadrangle.

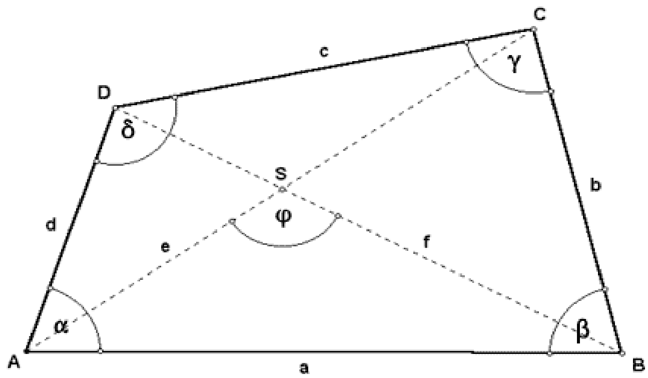
Keywords: *general concave and convex quadrangle, surface, Brahmagupta*

Lako možemo izvesti tvrdnju, koja kaže da je svaki n-terokut zadan, ne nužno i jdnoznačno, s $E_n = 2n - 3$ $(n \geq 3)$ međusobno nezavisnih veličina ili veza nad određenim domenama; dakle trokut je zadan s $E_3 = 3$ elementa, a četverokut s $E_4 = 5$ elemenata, što ćemo sada i koristiti.

Kada smo se bavili s problemima o općem trokutu naučili smo da on može, a i ne mora, biti jednoznačno zadan s tri elementa, a to još ne znači da se taj problem može razriješiti i u smislu konstruktivne geometrije. Analogna konstatacija vrijedi i za n-terokute.

Pozabavimo se sada općim konveksnim četverokutom. Na slici 1 je dan takav četverokut s uobičajenim oznakama; dakle duljina stranice $\overline{AB}$ neka je a, tj.

$a=|AB|$; slično je $b=|BC|$, $c=|CD|$, $d=|DA|$; a duljine dijagonala su $e=|AC|$ i $f=|BD|$. Mjera kuta *DAB* je α, a ostale mjere kutova su β, γ, δ; dok je φ mjera kuta među dijagonalama.



Slika 1.

Sada ćemo dokazati dvije leme, gdje će se prva odnositi na opći konveksni četverokut, a druga na opći konkavni četverokut, tada će obje biti objedinjene u teoremu 1, koji će biti ustvari poopćenje *Brahmaguptine formule*.

Lema 1. (Brahmaguptina formula) *Površina općeg konveksnog četverokuta ABCD* (sl. 1) *dana je formulom*

$$P=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}\,, \tag{1}$$

gdje je

$$s=\frac{a+b+c+d}{2} \tag{2}$$

poluopseg četverokuta i gdje je također

$$\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}=\cos^2\frac{\beta+\delta}{2}\,. \tag{2a}$$

Dokaz. Iz sl.1 se vidi da je

$$P=\frac{1}{2}ad\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin\gamma\,,$$

a odatle slijedi

$$4P=2ad\sin\alpha+2bc\sin\gamma\,. \tag{2b}$$

No nadalje iz iste slike dobivamo, primjenjujući kosinusov poučak, da je

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma\,, \tag{3}$$

a odatle je

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad\cos\alpha - 2bc\cos\gamma\,. \tag{3a}$$

Kvadriramo li i zbrojimo jednakosti (2b) i (3a), tada slijdi

$$16P^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 8abcd\cos(\alpha + \gamma)\,. \tag{4}$$

Ako relaciju

$$\cos(\alpha + \gamma) = 2\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2} - 1$$

supstituiramo u (4) dobivamo

$$16P^2 = (2ad + 2bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2} =$$

$$= (2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2)(2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2) - 16abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2} =$$

$$= (-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d) - 16abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}\,,$$

i ako ovdje uvažimo (2) dobivamo (1), što je i trebalo pokazati.

■

Jasno je da smo mogli početi dokazivati lemu s duljinom druge dijagonale $e = |AC|$, tada bi dobili formulu analognu formuli (1), samo bi umjesto $\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}$ bilo $\cos^2\frac{\beta + \delta}{2}$. Jednakost (2a) slijedi iz $\frac{\alpha + \gamma}{2} = 180^\circ - \frac{\beta + \delta}{2}$.

Napomenimo da (1) vrijedi i za slučaj degeneracije, bilo da dva susjedna vrha četverokuta padnu u jednu točku, ili da bilo koji kut postane ispruženi.

Prodiskutirajmo nužan i dovoljan broj varijabli, koje tvore domenu funkcije (1). Budući da je $E_4 = 5$, kako smo već konstatirali, a sada vidimo da (1) zavisi od šest varijabli, prema tome, mi možemo uz određene uvjete birati pet varijabli da bi izračunali površinu *P*. Iz (3) dobivamo

$$\gamma = \arccos\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2 + 2ad\cos\alpha}{2bc}\,,$$

dakle P može, zapravo mora, biti funkcija pet veličina (varijabli) a, b, c, d, α uz određene uvjete. No, ako P zadaju veličine a, b, c, d, γ, tada je

$$\alpha = \arccos \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2 + 2bc\cos\gamma}{2ad}. \tag{5}$$

Ova zadnja napomena je važna kada zadajemo četverokut. Kasnije ćemo ovaj problem još detaljnije prodiskutirati.

Pozabavimo se sada općim konkavnim četverokutom, koji nije obuhvaćen *Brahmaguptinom formulom*.

Lema 2. Površina konkavnog četverokuta *ABCD* (sl.2) dana je formulom

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2 \frac{\alpha - \gamma}{2}} + bc\sin\gamma, \tag{6}$$

gdje je

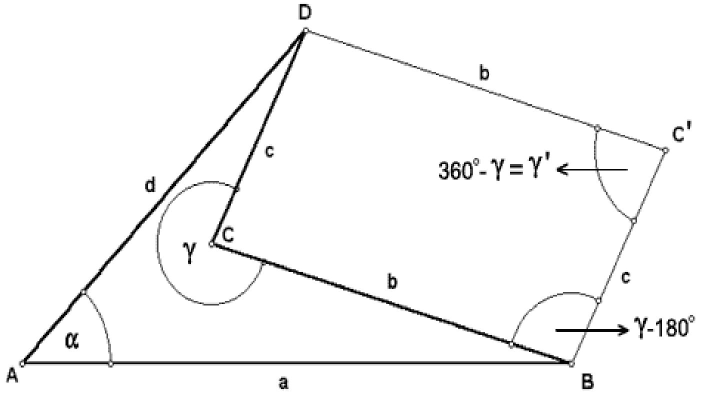
$$s = \frac{a+b+c+d}{2},$$

i

$$\gamma \in \left\langle 180^o, 360^o \right\rangle. \tag{7}$$

Dokaz. Iz sl.2 vidimo da je površina konkavnog četverokuta *ABCD* jednaka površini konveksnog četverokuta $ABC'D$ umanjenog za površinu paralelograma $BC'DC$, dakle

$$P = P_{ABC'D} - P_{BC'DC}.$$



Slika 2.

$$P=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma'}{2}}-bc\sin\gamma'. \qquad (8)$$

Očigledno je

$$\sin\gamma'=\sin(360^o-\gamma)=-\sin\gamma, \qquad (9)$$

a odatle je

$$\cos\frac{\alpha+\gamma'}{2}=\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}+180^o\right)=-\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}. \qquad (10)$$

Ako (9) i (10) supstituiramo u (8) dobivamo (6), što je i trebalo pokazati.

■

Sada ćemo izvesti formulu, koja daje površinu općeg konveksnog i općeg konkavnog četverokuta.

Teorem 1. (poopćenje Brahmaguptine formule**)** *Ako je zadan opći četverokut, konveksan ili konkavan, sa standardnom oznakom veličina, tada je njegova površina dana formulom*

$$P=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\varepsilon}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\operatorname{sgn}\left(\frac{\alpha}{180^\circ}-1\right)+1\right]da\sin\alpha+\frac{1}{2}\left[\operatorname{sgn}\left(\frac{\beta}{180^\circ}-1\right)+1\right]ab\sin\beta+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\operatorname{sgn}\left(\frac{\gamma}{180^\circ}-1\right)+1\right]bc\sin\gamma+\frac{1}{2}\left[\operatorname{sgn}\left(\frac{\delta}{180^\circ}-1\right)+1\right]cd\sin\delta, \qquad (11)$$

gdje je

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left[\alpha\operatorname{sgn}\left(1-\frac{\alpha}{180^\circ}\right)+\gamma\operatorname{sgn}\left(1-\frac{\gamma}{180^\circ}\right)\right] \qquad (12)$$

ili

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left[\beta\operatorname{sgn}\left(1-\frac{\beta}{180^\circ}\right)+\delta\operatorname{sgn}\left(1-\frac{\delta}{180^\circ}\right)\right], \qquad (13)$$

i

$$s=\frac{a+b+c+d}{2}. \qquad (14)$$

Dokaz. Kada je $\gamma\in\langle 180^o,360^o\rangle$ izveli smo da vrijedi (6). Cikličkim pomakom za

$$\delta\in\langle 180^o,360^o\rangle, \qquad (15)$$

dobivamo da je

$$P=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{\beta-\delta}{2}}+cd\sin\delta\,; \qquad (16)$$

za

$$\alpha\in\langle 180°,360°\rangle, \qquad (17)$$

dobivamo da je

$$P=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{\gamma-\alpha}{2}}+da\sin\alpha\,;$$

(18)
i konačno za

$$\beta\in\langle 180°,360°\rangle, \qquad (19)$$

dobivamo da je

$$P=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{\delta-\beta}{2}}+ab\sin\beta\,. \qquad (20)$$

Lako se vidi, da ako supstituiramo (7), (15), (17) i (19) u (11) i (12) (ili (13)), dobivamo redom (6), (16), (18) i (20), pa je time teorem u potpunosti dokazan. I svi su slučajevi pojedinačno razmotreni.

■

Sada ćemo se malo pozabaviti o zadavanju četverokuta, ali prije ćemo dati osnovne teze o zadavanju općeg trokuta tretirajući zadatke.

Zadatak 1. Neka je trokut zadan s tri stranice čije su duljine *a,b,c,* a njihove domene su D_a, D_b, D_c respektivno. Ako je $D_a=D_b=R^+=\langle 0,\infty\rangle$, tada treba naći D_c da površina toga trokuta bude $P>0$.

Rješenje. Znamo da je $P>0$ nužan i dovoljan uvjet postojanja svih triju nejednakosti

$$a<b+c,\ b<c+a,\ c<a+b.$$

Ako uzmemo da je $a,b\in R^+$, tada lako dolazimo do zaključka da mora biti

$$c\in D_c=\langle |a-b|,a+b\rangle,$$

da bi vrijedilo $P>0$. Sada imamo domene svih triju varijabli *a,b,c* s time da najprije proizvoljno odaberemo $a,b\in R^+$. Iz ovoga slijedi da je domena funkcije *P*, za $P>0$, *Kartezijev produkt* navedenih domena duljina stranica, dakle

$$D_P=D_a\times D_b\times D_c,$$

Prema tome došli smo do funkcije $P : D_a \times D_b \times D_c \to R^+$ ili

$$P : \left(R^+\right)^2 \times \langle |a-b|, a+b \rangle \to R^+ .$$

Napomenimo, da smo do ovih rezultata mogli doći i iz *Heronove formule* dane u obliku

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{21}$$

gdje je $2s=a+b+c$, ili u obliku

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 - 2\left(a^4+b^4+c^4\right)}.$$

I na kraju ovoga rješenja recimo još da je iz (21) evidentno da je $P=0$, ako vrijedi bilo koja od ovih jednakosti

$$a=b+c,\, b=c+a,\, c=a+b;$$

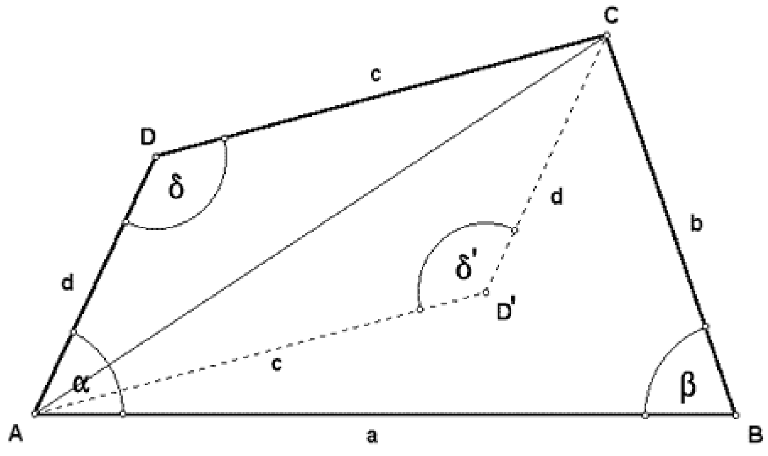
odnosno P nije realan ako vrijedi bilo koja od ovih nejednakosti

$$a>b+c,\, b>c+a,\, c>a+b.$$

□

Zadatak 2. Zadan je konveksni četverokut sa duljinama stranica *a,b,c,d* i kutom β, i to tako da je $a,b,c \in R^+$ i $\beta \in D_\beta = \langle 0{,}180°\rangle$; treba naći domenu od d tako da bude površina $P>0$.

Rješenje. U ovom zadatku ćemo razlikovati tri slučaja.



Slika 3.

1.slučaj. Neka je četverokut *ABCD* konveksan (sl.3). Budući je

$$|AC| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta}\ ,$$

te ako uvažimo rezultat iz zadatka 1., i to primjenimo na naš slučaj, tada dobivamo

$$d \in D_d = \left\langle \left| c - \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta} \right|, c + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta} \right\rangle,$$

pa slijedi funkcija

$$P : \left(R^+\right)^3 \times D_d \times D_\beta \to R^+ .$$

2. slučaj. Druga je mogućnost kada je četverokut $ABCD'$ konkavni, dakle $\delta' \in D_{\delta'} \in \langle 180°, 360° \rangle$. Uočimo da vrijedi rastrikcija domene od *c*, naime

$$c \in \langle 0, b \rangle .$$

Nadalje mora biti

$$d \in \langle 0, a \rangle ,$$

i

$$c + d > \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta} = |AC| .$$

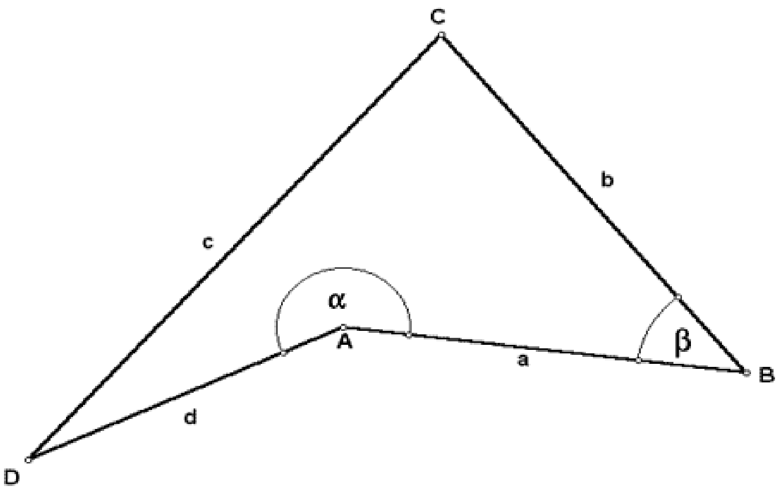
3. slučaj. Ovaj slučaj (sl.4) nastupa kada je $a, b \in R^+$ i

$$\alpha \in \langle 180°, 360° \rangle ,$$

i

$$b + c > a + d .$$

Svakako, da se u sva tri slučaja uvjet za β nije mijenjao.



Slika 4.

□

Zadatak 3. Naći površinu konkavnog četverokuta, ako je $a = 21cm,\ b = 13cm,$ $c = 7\,cm,\ d = 15cm$ i $\gamma = 247.38°$.

Rješenje. Iz (14) dobivamo da je

$$s = 28(cm),$$

a iz (5)

$$\alpha = 53.13°.$$

Ako sada ove zadane i dobivene veličine supstituiramo u (6) slijedi

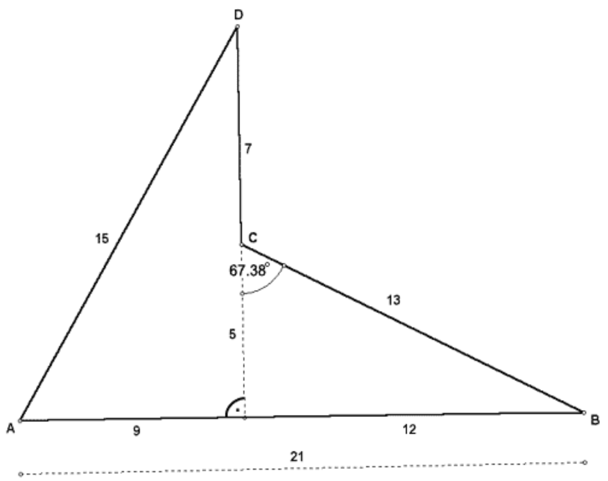
$$P = \sqrt{7\cdot 15\cdot 21\cdot 13 - 21\cdot 13\cdot 7\cdot 15\cdot \cos^2 194.25^o} + 14\cdot 7\cdot \sin 247.38^o = 84,$$

dakle

$$P = 84\,cm^2.$$

□

Primjedba u vezi zadatka 3. Naš četverokut mogli smo podijeliti na dva pravokutna trokuta kao na sl.5, pa se lako vidi da je $P = \frac{9\cdot 12}{2} + \frac{12\cdot 5}{2} = 84\ \mathrm{cm}^2$; što smo i očekivali.



Slika 5.

Teorem 2. *Površina tetivnog četverokuta dana je formulom*

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\,, \tag{22}$$

gdje je $2s = a + b + c$; *ili u obliku*

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^2 - 2\left(a^4 + b^4 + c^4 + d^4\right) + 8abcd} \,. \qquad (22a)$$

Dokaz. Znamo da je četverokut tetivni onda i samo onda, ako je

$$\alpha + \gamma = 180^o \text{ i } \beta + \delta = 180^o, \qquad (23)$$

a to povlači da je $\cos\frac{\alpha + \gamma}{2} = 0$, pa (1) prima oblik (22), a odatle i (22a); što je i trebalo pokazati.

■

Teorem 3. *Za površinu trokuta vrijedi Heronova formula*

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

Dokaz. To je već navedena formula (21), kada je *d=0* ; dakle tetivni četverokut je degenerirao u trokut.

■

Teorem 4. *Površina tangencijalnog četvetokuta je*

$$P = \sqrt{abcd}\,\sin\frac{\alpha + \gamma}{2}\,. \qquad (24)$$

Dokaz. Četverokut je tangencijalni onda i samo onda, ako je

$$a + c = b + d\,. \qquad (25)$$

Ako uvažimo (25) dobivamo da je

$$s - a = \frac{b + c + d - a}{2} = \frac{a + c + c - a}{2} = c\,,$$

Dakle

$$s - a = c\,. \qquad (26)$$

Analogno je

$$s - b = d,\ s - c = a,\ s - d = b. \qquad (27)$$

Ako ove relacije uvrstimo u (1) dobivamo da je

$$P = \sqrt{abcd - abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}} = \sqrt{abcd\left(1 - \cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)} = \sqrt{abcd}\,\sin\frac{\alpha + \gamma}{2}\,,$$

a to je i trebalo dokazati.

■

Teorem 5. *Površina četverokuta, koji je tetivni i tangencijalni, je*

$$P = \sqrt{abcd}\ . \tag{28}$$

Dokaz.

1. način. Neka je četverokut tetivni, dakle vrijedi (22). Da bi postao i tangencijlni moraju biti zadovoljene jednakosti od (25) do (27), koje kada supstituiramo u (22) dobivamo (28), što smo i očekivali.

2. način. Uzmimo sada da je četverokut tangencijlni, tj. vrijedi (24), a da bih on postao i tetivni moraju biti zadovoljene jednakosti (23), a to povlači da (24) poprima očekivani oblik (28).

■

Na kraju postavimo još dva pitanja za vježbu:
1. Da li se ovaj zadatak može poopćiti na nivo ekvivalencije?
2. Da li je za postojanje (28) nužno i dovoljno, da se radi o četverokutu, koji je istokračni trapez?

Teorem 6. (Bertschneiderov teorem) *Dokazati da među osnovnim veličinama a,b,c,d,e,f,*φ *konveksnog četverokuta (sl.1) vrijede formule*

$$e^2 f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma)\,, \tag{29}$$

i

$$e^2 f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\beta+\delta)\,. \tag{30}$$

Dokaz. Na sl.1 označene su duljine kako slijedi:

$$|AS| = p,\ |BS| = q,\ |CS| = s,\ |DS| = t\ .$$

Sa slike vidimo

$$2P = pq\sin\phi + qs\sin\phi + st\sin\phi + tp\sin\phi\,,$$

ili

$$2P = (p+s)(q+t)\sin\phi\,,$$

a odatle je

$$2P = ef\sin\phi\,, \tag{31}$$

jer je

$$e = p+s \text{ i } f = q+t\,.$$

Iz trokuta *ABS, BCS, CDS, DAS* slijede jednakosti

$$a^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos\phi\,, \tag{32}$$
$$b^2 = q^2 + s^2 + 2qs\cos\phi\,, \tag{33}$$
$$c^2 = s^2 + t^2 - 2st\cos\phi\,, \tag{34}$$
$$d^2 = t^2 + p^2 + 2tp\cos\phi\,. \tag{35}$$

Ako (32) i (34) pomnožimo s (-1) i onda ih zbrojimo sa (33) i (35), dobivamo

$$b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = 2(p+s)(q+t)\cos\phi\,,$$

$$b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = 2ef\cos\phi\,. \tag{36}$$

Nadalje, ako (31) pomnožimo s 2 i kvadriramo, tada tu relaciju dodamo kvadriranoj relaciji (36), dobivamo jednakost

$$16P^2 + (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2 = 4e^2 f^2\,. \tag{37}$$

Iz (4) i (37) slijedi (29) i (30), pa je teorem u potpunosti dokazan.

■

Teorem 7. (Ptolemejev teorem i njegov obrat) *Četverokut je tetivni onda i samo onda, ako je produkt duljina njegovih dijagonala jednak sumi produkata duljina nasuprotnih stranica.*

Dokaz. Budući da za svaki konveksni četverokut vrijedi *Bertschneiderov teorem* (formula (29)), tj.

$$e^2 f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma)\,,$$

odatle je

$$e^2 f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd\,, \tag{38}$$

jer je četverokut tetivni pa je $\cos(\alpha+\gamma) = \cos 180^o = -1$. No iz relacije (38) dobivamo *Ptolemejev teorem*

$$ef = ac + bd\,.$$

Obrat je evidentan.

■

Zadatak 4. Dokažite da je polumjer upisane kružnice tangencijalnom četverokutu dan relacijama

$$r = \frac{P}{s} = \frac{\sqrt{abcd}}{a+c}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\sqrt{abcd}}{b+d}\sin\frac{\beta+\delta}{2}\,.$$

Zadatak 5. Konveksni četverokut ima duljine stranica respektivno a,b,c,d ; treba dokazati da mu je površina maksimalna onda i samo onda, ako je on tetivni četverokut.

Zadatak 6. Dokazati da za tetivni četverokut vrijedi razmjer

$$\sin\alpha : \sin\beta = (ab+cd):(bc+da), \tag{39}$$

odnosno prošireni razmjer

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma : \sin\delta = (ab+cd):(bc+da):(cd+ab):(da+bc). \tag{40}$$

Rješenje. Budući se radi o tetivnom četverokutu, tada iz sl.1. vidimo da je
$2P = bc\sin\gamma + da\sin\alpha = bc\sin(180^0-\alpha) + da\sin\alpha = (bc+da)\sin\alpha$, a odatle je

$$\sin\alpha = \frac{2P}{bc+da} = \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{bc+da}. \tag{41}$$

Analogno, dobivamo da je

$$\sin\beta = \frac{2P}{ab+cd} = \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ab+cd}. \tag{42}$$

Iz (41) i (42) slijedi (39), a odatle cikličkim pomakom lako dobivamo i (40).

□

Zadatak 7. Dokažite da su duljine dijagonala u tetivnom četverokutu dane relacijama

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}, \tag{43}$$

$$f = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}. \tag{44}$$

Rješenje. Iz sl.1 vidimo, da je

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta, \tag{45}$$

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta. \tag{46}$$

Ako (45) pomnožimo s cd,a (46) s ab, te jednakosti zbrojimo, dobijemo

$$cde^2 + abe^2 = a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2 - 2abcd(\cos\beta + \cos\delta),$$

a odatle je

$$e^2(ab+cd) = (ac+bd)(ad+bc), \tag{47}$$

jer smo uvažili jednakost, da je četverokut tetivni. Dakle iz (47) slijedi (43). Analogno se dobiva (44), te je time zadatak u potpunosti dokazan.

□

Zadatak 8. Dokažite da za tetivni četverokut vrijedi razmjer

$$\sin\alpha : \sin\beta = f : e\,. \tag{48}$$

Rješenje. Iz (43) i (44) slijedi

$$f : e = (ab + cd) : (bc + da) = \sin\alpha : \sin\beta,$$

jer smo uvažili (73), pa je razmjer (48) dokazan.

□

Zadatak 9. Ako je R duljina polumjera opisane kružnice tetivnom četverokutu, dokazati da je

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}\,. \tag{49}$$

Rješenje. Ako je četverokut tetivni, čije su oznake kao na sl.1, tada je kružnica opisana trokutu *ABD* identična kružnici opisanoj trokutu *BCD*, odnosno ta je kružnica opisana četverokutu *ABCD*. Iz trokuta *ABD*, ako primjenimo *poučak o sinusima*, dobivamo

$$\frac{f}{\sin\alpha} = 2R,$$

a odatle je

$$R = \frac{f}{2\sin\alpha}\,. \tag{50}$$

Supstituiramo li (44) i (41) u (50) dobivamo (49), što je i trebalo pokazati.

□

Zadatak 10. Za svaki konveksni četverokut vrijedi jednakost

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2, \tag{51}$$

gdje je m duljina spojnice polovišta dijagonala.

Uputa za rješenje. Četverokut na sl.1 vektoriziramo, te uvedemo vektor koji spaja polovišta dijagonala, a čija je duljina m, zatim ustanovimo, da je mjera kuta između pravaca *AB* i *CD* jednaka $\alpha + \delta - 180^o$ ili $\beta + \gamma - 180^o$; što koristimo kod skalarnog produkta; i konačno uvažavamo relacije od (41) do (44); potom nakon dosta ispisa dođemo do (51).

Zadatak 11. Dijagonale konveksnog četverokuta se međusobno raspolovljavaju, onda i samo onda, ako je $a=c$ ili $b=d$.

Zadatak 12. Ako je $x_1x_2x_3x_4 = x_5^2$ i $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$; da li se može riješiti sustav diofantskih jednadžbi, tako da su rješenja $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in N^5$, gdje je N skup prirodnih brojeva. Treba dati interpretaciju rješenja!

Zadatak 13. Heurističkom metodom izvedite formulu (49).

Dokaz hipoteze. Znamo da je polumjer trokutu opisane kružnice dan formulom

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}. \tag{52}$$

Jasno je, da trokut možemo smatrati da je to degenerirani četverokut, kada mu je duljina jedne stranice jednaka nuli. Iz (52) slijedi

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{abacbc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+c\cdot 0)(ac+b\cdot 0)(bc+a\cdot 0)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-0)}}. \tag{53}$$

Budući su sve stranice u četverokutu ravnopravne u poretku a,b,c,d , to onda (53) možemo shvatiti kao slučaj degeneracije kada je $d=0$, pa naslućujemo da nulu u ovoj formuli možemo zamijeniti s d, a s tom zamjenim dobivamo formulu (49), koju smo strogo matematički izveli, pa je time heuristička metoda produktivno povrđena.

□

Literatura:

[1] Šefket Arslanagić: *Neke teoreme u vezi sa konveksnim četverouglom*, TRIANGLE, Serija A, VOL.5 (2001) No.1, Sarajevo 2001.

[2] Petar Svirčević: *Konstrukcija težišta poligona i težišta njegova ruba*, HMD, Zbornik radova, Šesti susret nastavnika matematike; Zagreb, 3.-5. Srpnja 2002.

Primljeno u redakciju 06.01.2016. Dostupno online 11.01.2016.