**MAT-KOL (Banja Luka)**
**XXIII (1)(2017),** 27-33
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1701033M

**ISSN 0354-6969 (o)**
**ISSN 1986-5828 (o)**

# OSAM NAČINA RJEŠAVANJA JEDNOG ZADATKA ZA TROUGAO

## (Eight ways to solve a problem for a triangle)

**Dragoljub Milošević**

Gornji Milanovac, Srbija
e-mail: dramil947@gmail.com

**Sažetak:** U radu dajemo osam raznih dokaza jednog zadatka iz [3].

**Ključne riječi**: trougao, sinusna i kosinusna teorema, sličnost, simetrala unutrašnjeg ugla, Stjuartova teorema, adicione formule za sinus.

**Abstract**. In this paper we give different solutions of one problem in [3].

**Key words**: triangle, sine and cosine law, similarity, angle-bisector, Stewart's theorem, addition formulas for sine.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**.

Posebnu pažnju zavređuju zadaci čijem se rješavanju može pristupiti s više pozicija. Upoređivanjem rješenja uočavamo koje je od njih kraće, efektnije, elegantnije. Time se stiče i izgrađuje vještina u rješavanju zadataka, naročito problemskih.

U [3] je postavljen zadatak namijenjen srednjoškolcima koji pokazuju povećano interesovanje za matematiku:

*Kutovi trokuta su u omjeru*

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : (k+1) : (k+3),\ k \in R^{+}.$$

*Dokaži da za njegove stranice vrijedi* $a^2 + bc = c^2$**.**

Ovdje dajemo 8 rješenja tog zadatka.

**Rješenje 1.** Koristićemo trigonometrijsku identičnost

$$sin^2x - sin^2y = sin(x-y)\,sin(x+y)\,,\ \ (x, y \in \boldsymbol{R})$$

koja se dobija iz adicionih formula za sinus

$$\sin(x-y) = sinxcosy - cosxsiny \ \ \text{i} \ \ \sin(x+y) = sinxcosy + cosxsiny\,.$$

Kako je

$$a = 2Rsin\alpha, b = 2Rsin(k+1)\alpha \text{ i } c = 2Rsin(k+3)\alpha,$$
($R$ je poluprečnik kružnice opisane oko trougla ABC)

imamo

$$c^2 - a^2 =$$
$$(2Rsin(k+3)\alpha)^2 - (2Rsin\alpha)^2 = (2R)^2 \sin(k+2)\alpha \cdot \sin(k+4)\alpha$$
$$= 2Rsin(k+2)\alpha \cdot 2Rsin(k+4)\alpha.$$

S obzirom da je α + β+γ = α + ($k$+*1*)$\alpha$ + *(*$k$+*3*)α = (*2*$k$ + *5*)$\alpha$ = $180^0$, dobijamo

$$sin(k+2)\,\alpha = sin\big(2k+5-(k+3)\big)\,\alpha = si\,n(k+3)\,\alpha \text{ i}$$

$$sin(k+4)\,\alpha = sin\big(2k+5-(k+1)\big)\,\alpha = sin(k+1)\,\alpha\ ,$$

pa je

$$c^2 - a^2 = 2Rsin(k+3)\alpha \cdot 2Rsin(k+1)\alpha = c \cdot b,$$

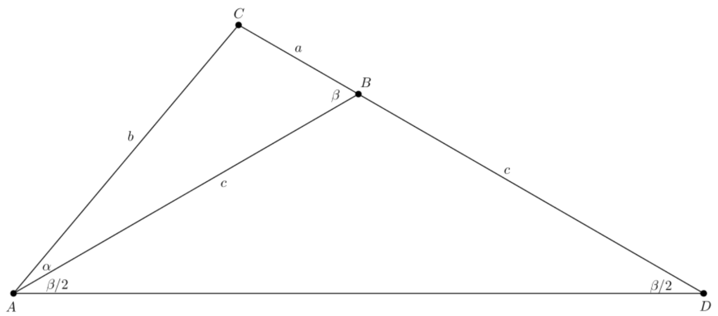
tj.

$$a^2 + bc = c^2\ .$$

□

**Rješenje 2.** Produžimo stranicu CB do tačke D tako da BD = AB = $c$ (slika 1). Tada je

<DAB = <ADB = $\frac{1}{2}$(<ABC) = $\frac{\beta}{2}$ .




**Slika 1**

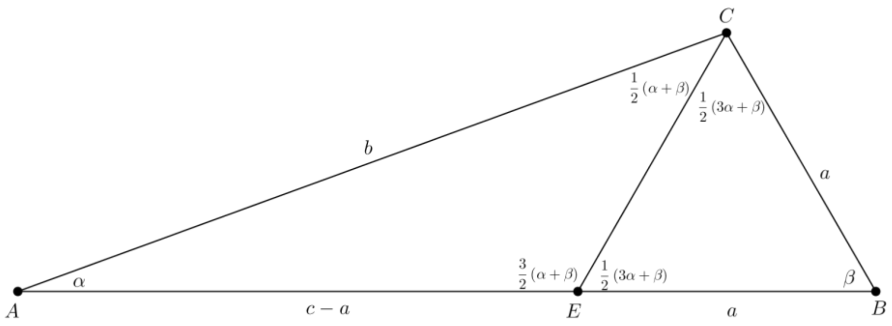
Sada na stranici AB odredimo tačku E tako da BE = BC = $a$ (slika 2), pa je AE = $-a$ . S obzirom da je zbir uglova u trouglu (2k+5)α, tj. 3α + 2β, i <CBE = β, imamo u jednakokrakom trouglu BCE:

<BCE = <BEC = $\frac{1}{2}(3\alpha + \beta)$.

Zbog toga je

<AEC = $\frac{3}{2}(\alpha + \beta)$ i <AEC = $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

Na osnovu sinusne teoreme primijenjene na trouglove ADC i AEC (slike 1 i 2),




**Slika 2**.

imamo

$$\frac{c+a}{b} = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}{sin\frac{\beta}{2}} \quad \text{i} \quad \frac{c-a}{b} = \frac{sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{sin\frac{\beta}{2}},$$

pa je

$$\frac{c+a}{b}\cdot\frac{c-a}{b} = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}{sin\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{sin\frac{\beta}{2}} \quad . \tag{1}$$

Kako je $sin(90^0 + x) = cosx\ , sin\ (90^0 - x)$ i $3\alpha + 2\beta = 180^0$, dobijamo

$$sin\frac{3(\alpha+\beta)}{2} = \sin\left(\frac{3\alpha+2\beta}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = cos\frac{\beta}{2}$$

i

$$\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\alpha+2\beta}{2} - \frac{\alpha+.\beta}{2}\right) = cos\frac{\alpha+\beta}{2}\ .$$

Tada iz (1), zbog $2sinxcosx = sin2x$ , slijedi

$$\frac{c^2-a^2}{b^2} = \frac{cos\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\left(\alpha+\beta\right)}{sin\beta} = \frac{\sin\left(180^0-\gamma\right)}{sin\beta} = \frac{sin\gamma}{sin\beta} = \frac{c}{b}\,,$$

a odavde je $c^2 - a^2 = bc$ , tj. $a^2 + bc = c^2$ .

□

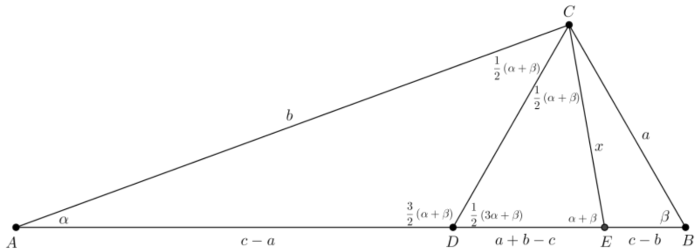
**Rješenje 3.** Na stranici AB odredimo tačke D i E tako da AE = $b$ i BD = $a$ (slika 3). Sada je

BE = $c - b$, AD = $c - a$ i DE = $a + b - c$ .

S obzirom da je <ACD = <DCE = $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, primjenom teoreme o simetrali unutrašnjeg ugla <ACE trougla AEC je

AD : DE = AC : CE, ili $(c - a)$: $(a + b - c) = b$: $x$, gdje je CE = $x$ . Otuda je

$$x = \frac{b(a+b-c)}{c-a}\ .$$




**Slika 3**

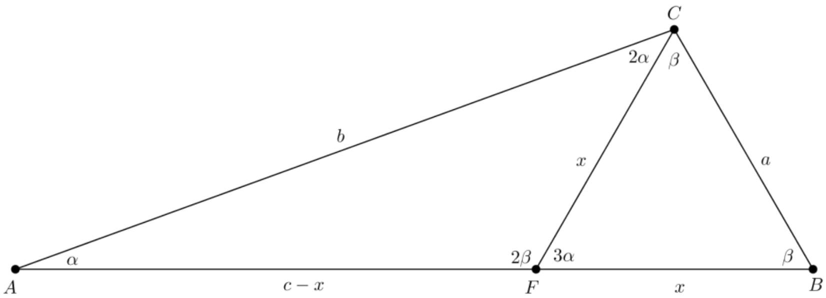
Primjenom sinusne teoreme na trouglove ABC i BCE imamo

$$\frac{sin\beta}{sin\alpha} = \frac{b}{a} \quad \text{i} \quad \frac{sin\beta}{sin\alpha} = \frac{x}{c-b}, \text{ pa je } \frac{b}{a} = \frac{b(a+b-c)}{(c-a)(c-b)}.$$

Odatle dobijamo $(c-a)(c-b) = a(a+b-c)$, tj. $c^2 - a^2 = bc$.

□

**Rješenje 4.** Na stranici AB odaberemo tačku F tako da <BCF = <ABC = β (slika 4). Zato je BF = CF, tj. trougao BCF je jednakokraki. Ako je BF = $x$ , onda je AF = $c - x$.




**Slika 4**.

Na osnovu sinusne i kosinusne teoreme primijenjene na trougao AFC imamo:

$$\frac{x}{sin\alpha} = \frac{c-x}{sin2\alpha} \text{ i } x^2 = b^2 + (c-x)^2 - 2b(c-x)cos\alpha .$$

Iz prve jednakosti, zbog $in2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$ , slijedi $cos\alpha = \frac{c-x}{2x}$. Uvrštenjem posljednje jednakosti u drugu dobijamo $x^2 = b^2 + (c-x)^2 - 2b(c-x) \cdot \frac{c-x}{2x}$, odavde:

$$(c-x)^2\left(1 - \frac{b}{x}\right) + b^2 - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(c-x)^2 \frac{x-b}{x} + (b-x)(b+x) = 0/:(x-b) \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(c-x)^2}{x} - (b+x) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{c^2}{b+2c}\,. \qquad (2)$$

Primjenom Stjuartove teoreme na trougao ABC imamo

$$AB\cdot(AF\cdot FB + CF^2) = AC^2 \cdot BF + BC^2 \cdot AF,$$

ili

$$c(\,(c-x)c + x^2) = b^2 \cdot x + a^2 \cdot (c-x),$$

odakle je

$$x = \frac{a^2 c}{c^2 - b^2 + a^2}\,. \qquad (3)$$

Iz jednakosti (2) i (3) slijedi

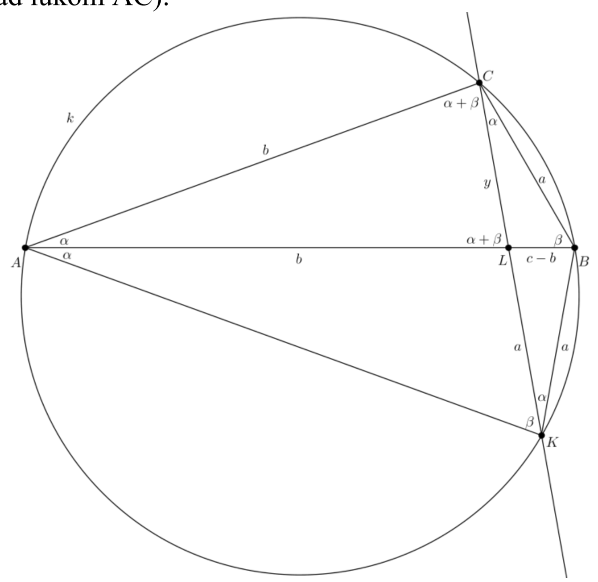
$$\frac{c}{b+2c} = \frac{a^2}{c^2-b^2+a^2}\,,$$

što je ekvivalentno sa $a^2 + bc = c^2$.

□

*Napomena 1*. Dokaz Stjuartove teoreme nalazi se u [1] i [2] .

**Rješenje 5.** Nacrtajmo kružnicu $k$ opisanu oko trougla ABC, a potom <BAK = <BAC = α (slika 5). Tada je <CKB = <BAC = α (periferijski ugao nad lukom BC) i <AKC = <ABC = β (periferijski nad lukom AC).




**Slika 5**

Zbog toga je u trouglu AKC:

$$<\text{ACK} = 180^0 - (< CAK + < AKC) = 3\alpha + 2\beta - (2\alpha+\beta) = \alpha+\beta,$$

a u trouglu ALC (L je tačka preseka duži AB i CK):

$$<\text{ALC} = 180^0 - (< CAL + < ACL) = 3\alpha + 2\beta - (\alpha + \alpha + \beta) = \alpha + \beta \,.$$

To znači da je trougao ALC jednakokraki, tj. AL = AC $=b$. Kako je <BCK = <BAC = α, trougao BCK je jednakokraki, tj. BK = BC = $a$. Dalje, imamo <BLK = <ALC = α + β (kao unakrsni) i <KBL = $180^0$- (<BKL + < <BLK) = 3α + 2β – (α+ α + β) = α + β, što znači da je i trougao BLK jednakokraki. Znači, KL = BK $=a$.

Neka je CL = $y$. Na osnovu teoreme o simetrali unutrašnjeg ugla, za trougao AKC dobijamo CL : LK = AC : AK, ili $y: a = b: c$ , odakle je $y = \frac{ab}{c}$ . Trouglovi ALC i BLK su slični, jer imaju jednake uglove. Zato je CL : LC = BL : KL, ili $y: b = (c -$ *b:a.* Otuda je *y= ba(c−b).* Najzad, iz jednakosti *y=abc* i *y= ba(c−b)* slijedi $\frac{ab}{c} = \frac{b}{a}(c - b)$, tj. $a^2 + bc = c^2$.

□

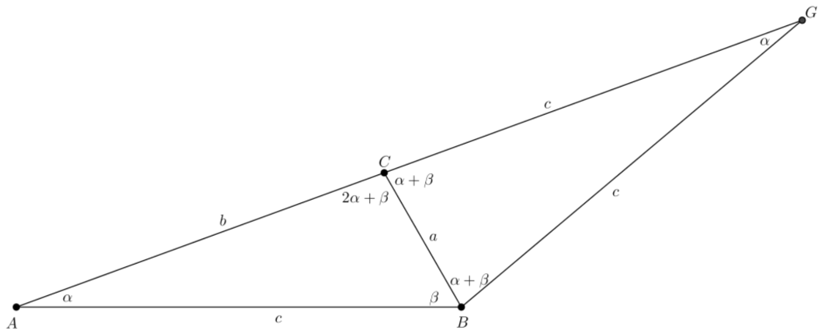
**Rješenje 6.** Presjek produžetka prave AC i kružnice $k$(B, AB) obilježimo sa G. Tada je trougao ABG jednakokraki, pa je <BGC = <BAC = α (slika 6). Kako je

<BCG = $180^0$ - <ACB = 3α + 2β – (2α + β) = α + β ,

imamo u trouglu BGC:

< CBG = (3α + 2β) – (α + α + β) = α + β,

tj. <BCG = <CBG. To, pak, znači da je i trougao BGC jednakokraki, tj. CG = BG = .




**Slika 6.**

Na osnovu kosinusne teoreme primijenjene na trouglove ABC i ABG možemo pisati

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\alpha \;\text{ i }\; c^2 = c^2 + (b + c)^2 - 2c(b + c)cos\alpha \,.$$

Iz druge jednakosti slijedi $cos\alpha = \frac{b+c}{2c}$ , pa uvrštenjem u prvu jednakost dobijamo

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{b+c}{2c}$. Konačno, odavde je $a^2 + bc = c^2$.

□

**Rješenje 7.** Primjenom Stjuartove teoreme na trougao ABG (slika 6), imamo

$$(b+c)(bc+a^2)=c^2\cdot b+c^2\cdot c.$$

Poslije dijeljenja lijeve i desne strane posljednje jednakosti sa $b+c$ dobijamo

$$bc+a^2=c^2.$$

□

**Rješenje 8.** Trouglovi ABC i BCE sa slike 3 su slični (imaju jednake uglove), pa je AB:

BC = BC : BE, ili $c : a = a : (c-b)$.

Odavde lahko dobijamo traženu jednakost.

□

*Napomena 2.* Predmetni zadatak se može riješiti i primjenom Pitagorine teoreme.

## LITERATURA


[1] Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene*; Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] A. Sredojević i D. Milošević: *Još četiri rješenja jednog zadatka o kvadratu*; MAT-KOL (Banja Luka), XXI (3) (2015), 143 – 147.

[3] *** : *Zadatak 3563*; Matematičko-fizički list (Zagreb), 2/266 (2016/17), 107.