MAT-KOL (Banja Luka)
XXIII (1)(2017), 45-47
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1701045M

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5828 (o)

O JEDNOJ ALGEBARSKOJ NEJEDNAKOSTI
(On an algebraic inequality)

Dragoljub Milošević

Gornji Milanovac, Srbija
E-mail: dramil947@gmail.com

Sažetak: U radu su data četiri dokaza poboljšanja jedne nejednakosti iz [2].

Ključne riječi: pozitivni brojevi, nejednakost, ekvivalentno, aritmetičko-geometrijska nejednakost.

Abstract: In this paper four proofs are given for the improvement of an inequality from [2].

Key words: positive numbers, inequality, equivalent, arithmetic-geometric inequality.

AMS Subject Classification (2010): 97 F 50
ZDM Subject Classification (2010): F 50, N 50

U [2], na str. 279-280, dokazana je sljedeća nejednakost za pozitivne realne brojeve a, b, c :

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca\,. \tag{*}$$

Ovdje ćemo dati četiri načina dokazivanja poboljšanja nejednakosti (*):

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq\ a^2 +\ b^2 +\ c^2;\ (a, b, c > 0). \tag{1}$$

Prvi način. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja, možemo pisati

$$\frac{a^3}{b} + \frac{a^3}{b} +\ b^2\ \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b} \cdot \frac{a^3}{b} \cdot b^2} = 3a^2.$$

Na sličan način dobijamo

$$\frac{b^3}{c}+\frac{b^3}{c}+c^2 \geq 3b^2 \text{ i } \frac{c^3}{a}+\frac{c^3}{a}+a^2 \geq 3c^2 .$$

Sabiranjem posljednje tri nejednakosti imamo

$$2(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a})+b^2+c^2+a^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2).$$

Odavde, nakon sređivanja, slijedi tražena nejednakost (1).

□

Napomena 1. S obzirom da je nejednakost

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \tag{2}$$

ekvivalentna sa tačnom nejednakošću

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0,$$

Zaključujemo da nejednakost (1), zaista, predstavlja poboljšanje nejednakosti (*).

Napomena 2. Jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako $a=b=c$.

Drugi način. Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja dobijamo

$$\frac{a^3}{b}+ab \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b}\cdot ab}=2a^2 , \frac{b^3}{c}+bc \geq 2b^2 \text{ i } \frac{c^3}{a}+ca \geq 2c^2,$$

pa je

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ab+bc+ca \geq 2a^2+2b^2+2c^2. \tag{3}$$

Iz nejednakosti (3) i (2) slijedi nejednakost (1).

□

Treći način. U [1] je dat dokaz nejednakosti

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}, \tag{4}$$

gdje su a, b, c, x, y, z pozitivni realni brojevi. Primjenom nejednakosti (4) imamo

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}=\frac{a^6}{a^3b}+\frac{b^6}{b^3c}+\frac{c^6}{c^3a} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{3(a^3b+b^3c+c^3a)} . \tag{5}$$

Preostaje nam da dokažemo da vrijedi nejednakost

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a). \tag{6}$$

Nejednakost

$$(m+n+p)^2 \geq 3(mn+np+pm), (m,n,p>0) \tag{7}$$

je tačna, jer se svodi na nejednakost oblika (2). Ako u (7) stavimo

$$m = a^2+bc-ab, n = b^2+ca-bc \text{ i } p = c^2+ab-ca,$$

dobijamo željenu nejednakost (6). Konačno, iz nejednakosti (6) i (5) slijedi nejednakost (1).

□

Četvrti način. U [3] je dokazana nejednakost

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, (a,b,c,x,y,z>0)\,. \tag{8}$$

Njenom primjenom dobijamo

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} = \frac{a^4}{ab}+\frac{b^4}{bc}+\frac{c^4}{ca} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca},$$

a odavde, zbog (2), slijedi tražena nejednakost (1).

□

LITERATURA

[1] Arslanagić, Š., Bašić, A.: *Jedna zanimljiva algebarska nejednakost i njena primjena*, MAT-KOL (Banja Luka), XX (2) (2014), 69 – 75.

[2] Cvetkovski, Z.: *Inequalities (theorems, techniques and selected problems)*, Springer –Verlag, Berlin/Heidelberg, 2012.

[3] Milošević, D. : *Jedna nejednakost i njena primena*, Tangenta (Beograd), 55 (2008/2009-3),8-10.

[4] Mitrinović,D.S.: *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

Pristiglo u redakciju 23.01.2017. Dostupno online 30.01.2017.