MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXIII (1)(2017), 49-60 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1701049S

Heuristika i generalizacija Heronove formule u dva smjera

Petar Svirčević

Zagreb, Hrvatska
e-mail:petar.svircevic@zg.t-com.hr

Sažetak. *U ovome članku ćemo pomoću heurističke metode izvesti, a onda strogo dokazati sljedeće formule:* ***Heronova formula kao funkcija duljina stranica trokuta****,* ***Heronova formula kao funkcija duljina visina trokuta*** *i* ***Heronova formula kao funkcija duljina težišnica trokuta****. Nakon toga ćemo sve tri formule kumulirati u jednu, koja ćemo zvati* ***Kumulativna formula za površinu trokuta****, i to bi bila generalizacija u prvom smjeru. Još ćemo izvesti i* ***Heronovu formulu kao funkcija duljina polumjera trokutu pripisanih kružnica****, koja je „slična“ prethodnim Heronovim formulama, ali se s njima ne može kumulirati. Nadalje, generalizacijom u drugom smjeru ćemo heuristički izvesti* ***Kumulativnu formulu za površinu tetivnoga poligona****, i pokazat ćemo, da ona općenito vrijedi samo za trokut i tetivni četverokut.*

Ključne riječi: *kumulativna formula, površina trokuta, površina tetivnog poligona*

Heuristics and The Generalization of Heron's Formula in two Directions

Abstract. *In this article we will be using heuristic methods to construct, and then rigorously prove the following formula:* ***Heron's formula as a function of the length of the sides of the triangle****,* ***Heron's formula as a function of the length of the altitudes of the triangle*** *and* ***Heron's formula as a function of the length of the medians of the triangle****. All three formulas we will cumulate into a single one, which we call the cumulative formula for the area of a triangle, and it would be a generalization in the first direction. We will also formulate* ***Heron's formula as a function of the length of***

the radiuses of the triangle assigned to the circle, *which is "similar" to the previous Heron's formula, but cannot be cumulated with them. Furthermore, by generalization into another direction we will heuristically formulate the* ***Cumulative formula for the surface of the tendon polygon***, *and we will show that it generally applies only to a triangle and a tendon quadrilateral.*

Keywords*: cumulative formula, the surface of a triangle, the surface of the tendon polygon.*

Napomena 1. Praktično je, da se za svaku veličinu a, koja predstavlja broj duljinskih jedinica uvedemo oznaku $[a]_D = L$, i čitamo "*dimenzija od a je L*", a to je duljina; dakle ne preciziramo da li se radi o: *m* (metru), *cm* (centimetru), *mm* (milimetru),... Slično ćemo za veličinu P, koja predstavlja broj površinskih jedinica, pisati da joj je dimenzija jednaka L^2; dakle $[P]_D = L^2$, i ovdje ne preciziramo, da li se radi o: m^2, cm^2, mm^2,...; broj volumnih jedinica definiramo da je $[V]_D = L^3$, ... Jasno je, da je $[\lambda]_D = L^0 = 1$, gdje je λ neimenovani broj, tj. $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

a) Generalizacija u smjeru Kumulativne formule za površinu trokuta

Ako su *a,b,c,* duljine stranica $\Delta ABC,$ tada vrijedi dobro poznatu *Heronova formula*

$$P = [s(s-a)(s-b)(s-c)]^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

gdje je

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

poluopseg trokuta. No, (1) se može pisati i u obliku

$$P = \frac{1}{4}[(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)]^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

koji lako transformiramo u modificirani oblik

$$P = \frac{1}{4}[(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)]^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

a on je praktičan za primjenu, ako su duljine stranica npr.: $a = \sqrt{19},\ b = \sqrt{21},\ c = \sqrt{23}$.

Nadalje, ćemo reći, da trokut postoji ako i samo ako je $P > 0$. Dakle $P \in \mathbb{R}^+$, jer P uzimamo kao broj neimenovanih kvadratnih jedinica; dok su: a, b, c, s brojevi istovrsnih neimenovanih duljinskih jedinica, pa je: $a, b, c, s \in \mathbb{R}^+$. Prema tome je funkcija P: $(\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}^+$. Iz (2) slijedi ekvivalencija

$$(P > 0) \Leftrightarrow ((b+c > a) \wedge (c+a > b) \wedge (a+b > c)), \tag{4}$$

a to znači da trokut postoji onda i samo onda ako su ispunjene sve tri nejednakosti. Nadalje vrijedi ekvivalencija

$$(P = 0) \Leftrightarrow ((b+c = a) \vee (c+a = b) \vee (a+b = c)), \tag{5}$$

dakle i to je realan, ali degenerirani, slučaj; jer je trokut degenerirao u dužinu. I na kraju imamo slučaj, kada površina nema realnu vrijednost, naime

$$(P \notin \mathbb{R}) \Leftrightarrow ((b+c < a) \vee (c+a < b) \vee (a+b < c)), \tag{6}$$

Sada ćemo heuristički doći do formule (1). Jasno je, da je nužni uvjet za postojanje trokuta valjanost nejednakosti: $(b+c>a) \Longrightarrow (a+b+c>2a) \Longrightarrow$
$$\left(\frac{a+b+c}{2} - a = s-a > 0\right) \Longrightarrow (s-a>0).$$
Na osnovi toga, po zakonu analogije istovremeno vrijede ove tri nejednakosti:
$$s-a>0,\ s-b>0,\ s-c>0\,;$$
koje su sada nužan i dovoljan uvijet za postojanje trokuta. Naslućujemo, da će veličine: $s-a,\ s-b,\ s-c$; tvoriti formulu za površinu trokuta, odnosno bit će zastupljen njihov produkt, jer su one međusobno „ravnopravne“. No, $((s-a)(s-b)(s-c))_D = L^3$, a to znači da bi trebali „ubaciti“ još jedan „neutralni“ varijabilni faktor, tako da korjenovanjem toga izraza dobijemo dimenziju površine. Za očekivati je, da bi taj faktor mogao biti poluopseg s. Na osnovi iznesenog naslućujemo, da je formula za površinu trokuta dana u obliku
$$P = k[s(s-a)(s-b)(s-c)]^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$
gdje je k konstanta koju moramo odrediti. No, ona se najjednostavnije određuje, da se izvrši specijalizacija za jednakostranični trokut, za koji je: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, a=b=c, s=\frac{3a}{2}$. Ako te vrijednosti uvrstimo u (7), tada slijedi da je $k=1$, dakle naslućujemo da je (1) točno. No, ovu formulu ipak nećemo strogo izvoditi, jer ona spada u standardno srednjoškolsko gradivo, i može se izvesti na više načina.

Napomenimo, da smo mi mogli „naslutiti“ da formula za površinu trokuta izgleda npr. ovako $P = k[(s-a)^4 + (s-b)^4 + (s-c)^4)]^{\frac{1}{2}}$. No, to nije točno, jer bi već za dva posebna slučaja kod određivanja konstante k vjerojatno dobili različite vrijednosti, a to bi bila kontradikcija, dakle ova formula općenito nema smisla. Svakako, da bi mogli ispitati, da li postoje i specijalni slučajevi za ovaj oblik formule.

Izvedimo sada formulu za površinu trokuta kao funkciju duljina visina. Ako je h_a duljina visine na stranicu duljine a, itd.,..., tada je $P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, a odatle slijedi
$$a = \frac{2P}{h_a}, b = \frac{2P}{h_b}, c = \frac{2P}{h_c}. \tag{8}$$
Vidimo, da nam ove zadnje jednakosti sugeriraju uz uvažavanje (2), da bi formula za površinu trokuta pomoću duljina visina mogla biti u obliku
$$P = k\left[(h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1})(h_b^{-1} + h_c^{-1} - h_a^{-1})(h_c^{-1} + h_a^{-1} - h_b^{-1})(h_a^{-1} + h_b^{-1} - h_c^{-1})\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{9}$$
Ako opet uzmemo, da je $a=b=c$, onda je $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ i $h_a = h_b = h_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Uvrstimo li te vrijednosti u (9), tada dobivamo da je $k=1$, dakle sada naslućujemo da je točna ova formula
$$P = \left[(h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1})(h_b^{-1} + h_c^{-1} - h_a^{-1})(h_c^{-1} + h_a^{-1} - h_b^{-1})(h_a^{-1} + h_b^{-1} - h_c^{-1})\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{10}$$
A sada dokažimo (10). Naime, ako (8) uvrstimo u (2), tada dobivamo da je (10) točno. Nadalje, vidimo da vrijede nejednakosti
$$h_b^{-1} + h_c^{-1} > h_a^{-1},\ h_c^{-1} + h_a^{-1} > h_b^{-1},\ h_a^{-1} + h_b^{-1} > h_c^{-1},$$
koje baš i nisu evidentne bez slijedeće analize.

Naime, uvedimo veličinu s_h čija je recipročna vrijednost jednaka poluzbroju recipročnih vrijednosti duljina visina, tj.

$$s_h^{-1} = \frac{1}{2}(h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}), \tag{11}$$

tada pomoću (10) i (11) dobivamo vezu

$$P = \frac{1}{4}\left[s_h^{-1}(s_h^{-1} - h_a^{-1})(s_h^{-1} - h_b^{-1})(s_h^{-1} - h_c^{-1})\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

a odatle se lako dobije modificirani oblik

$$P = \left[(h_a^{-2} + h_b^{-2} + h_c^{-2})^2 - 2(h_a^{-4} + h_b^{-4} + h_c^{-4})\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Analogoni relacijama: od (4) do (6), osim (5); sada za duljine visina vrijede ekvivalencije:

$$(P > 0) \Leftrightarrow ((h_b^{-1} + h_c^{-1} > h_a^{-1}) \wedge (h_c^{-1} + h_a^{-1} > h_b^{-1}) \wedge (h_a^{-1} + h_b^{-1} > h_c^{-1})),$$

$$(P = 0) \Leftrightarrow ((h_a = 0) \vee (h_b = 0) \vee (h_c = 0)), \tag{14}$$

$$(P \notin \mathbb{R}) \Leftrightarrow ((h_b^{-1} + h_c^{-1} < h_a^{-1}) \vee (h_c^{-1} + h_a^{-1} < h_b^{-1}) \vee (h_a^{-1} + h_b^{-1} < h_c^{-1})).$$

Dakle, evivalencija

$$(P = 0) \Leftrightarrow ((h_b^{-1} + h_c^{-1} = h_a^{-1}) \vee (h_c^{-1} + h_a^{-1} = h_b^{-1}) \vee (h_a^{-1} + h_b^{-1} = h_c^{-1})),$$

ako formalno gledamo, bi trebala odgovarati ekvivalenciji (5). No, to nije istina, jer bi tada iz (5) slijedilo da je $P = \infty$, a mora biti $P = 0$. Prema tome je jasno, da duljina bilo koje visine mora biti jednaka nuli, da bi trokut degenerirao u dužinu, tako da mu je površina jednaka nuli, dakle (14) je točno.

Konačno, izvedimo formulu za površinu trokuta kao funkciju duljina njegovih težišnica uz uobičajene oznake. Naime, ako pogledamo (3) i (13), tada je logično da očekujemo, da tražena formula ima oblik

$$P = k\left[(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)^2 - 2(t_a^4 + t_b^4 + t_c^4)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Svakako, da ćemo i ovdje izvršiti specijalizaciju $a = b = c$, pa dobivamo da je $t_a = t_b = t_c = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ i $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a pomoću tih vrijednosti iz (15) dobivamo $k = 1/3$. Dakle, heurističkom metodom dobivamo da je

$$P = \frac{1}{3}\left[(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)^2 - 2(t_a^4 + t_b^4 + t_c^4)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Da bi (16) strogo dokazali, tada se moramo prisjetiti, kako pomoću kosinusovog poučka možemo dobiti, da su kvadrati duljina težišnica:

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2),\ t_b^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2),\ t_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2). \tag{17}$$

Iz tih relacija dobivamo, da je:

$$a^2 = \frac{4}{9}(2t_b^2 + 2t_c^2 - t_a^2),\ b^2 = \frac{4}{9}(2t_c^2 + 2t_a^2 - t_b^2),\ c^2 = \frac{4}{9}(2t_a^2 + 2t_b^2 - t_c^2). \tag{18}$$

Sumiramo li jednakosti (18), tada dobivamo da je

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2). \tag{19}$$

A ako te iste jednakosti kvadriramo i zbrojimo, tada nakon sređivanja (ispis je malo duži) slijedi

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{16}{9}(t_a^4 + t_b^4 + t_c^4). \tag{20}$$

Uvrstimo li (19) i (20) u (3), tada dobivamo (16).

Jasno je, do po analogiji (2) i (3) iz (16) slijedi

$$P = \frac{1}{3}[(t_a + t_b + t_c)(t_b + t_c - t_a)(t_c + t_a - t_b)(t_a + t_b - t_c)]^{\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Nadalje, ako sa s_t označimo poluzbroj duljina težišnica, dakle $s_t = \frac{1}{2}(t_a + t_b + t_c)$, i ako to uvrstimo u (21) dobivamo formulu

$$P = \frac{4}{3}[s_t(s_t - t_a)(s_t - t_b)(s_t - t_c)]^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Vidljivo je, da iz (21) slijede nejednakosti $t_b + t_c > t_a,\ t_c + t_a > t_b,\ t_a + t_b > t_c$. Za ovaj slučaj vrijede analogne ekvivalencije kao (4), (5), (6).

Sada ćemo kumulirati formule: (1), (12), (22) u jednu, koja ćemo zvati *Kumulativna formula za površinu trokuta*. Analogno ćemo napraviti i s modificiranim formulama: (3), (13), (16). No, da bi do navedenog došli moramo prije dati jednu definiciju o oznakama veličina trokuta i definirati još tri funkcije.

Definicija 1. *Neka su A, B, C vrhovi ΔABC; a_1, b_1, c_1 duljine stranica nasuprot tim vrhovima; a_2, b_2, c_2 duljine visina iz tih vrhova, i konačno a_3, b_3, c_3 su duljine težišnica iz tih vrhova.*

Definirajmo jednu dobro poznatu i još dvije nove funkcije:

Definicija 2.

$$sng\colon \mathbb{R} \to \{-1,0,1\};\ sng(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ \ \ 0, x = 0 \\ \ \ 1, x > 0 \end{cases}.$$

Definicija 3.

$$\varepsilon\colon \{1,2,3\} \to \{-1,1\};\ \varepsilon_i = (-1)^{i+1};\ (i = 1,2,3).$$

Definicija 4.

$$K\colon \{1,2,3\} \to \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}\right\};$$

$$K_i = \left(4 \cdot 3^{sng\,(2-i)}\right)^{(-1)^i \cdot sng\,(1-i)}, (i = 1,2,3).$$

Kumulativna formula za površinu trokuta *može se napisati u obliku*

$$P = K_i\left[s_i^{\varepsilon_i}(s_i^{\varepsilon_i} - a_i^{\varepsilon_i})(s_i^{\varepsilon_i} - b_i^{\varepsilon_i})(s_i^{\varepsilon_i} - c_i^{\varepsilon_i})\right]^{\frac{\varepsilon_i}{2}}, \tag{23}$$

gdje je $s_i^{\varepsilon_i} = \frac{1}{2}(a_i^{\varepsilon_i} + b_i^{\varepsilon_i} + c_i^{\varepsilon_i})$, ili u modificiranom obliku

$$P = \frac{1}{4^{\varepsilon_i}} K_i\left[(a_i^{2\varepsilon_i} + b_i^{2\varepsilon_i} + c_i^{2\varepsilon_i})^2 - 2(a_i^{4\varepsilon_i} + b_i^{4\varepsilon_i} + c_i^{4\varepsilon_i})\right]^{\frac{\varepsilon_i}{2}}; \tag{24}$$

dakle površina je funkcija: duljina stranica za $i = 1$, duljina visina za $i = 2$, duljina težišnica za $i = 3$.

Primjenimo izvedene formule na tri problema.

Problem 1. *Izračunajmo $P, t_a, t_b, t_c, h_a, h_b, h_c$; ako je* $a = 2\sqrt{5},\ b = 2\sqrt{10},\ c = 2\sqrt{13}.$

Rješenje. Iz (3) slijedi

$$P=\frac{1}{4}[(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)]^{\frac{1}{2}}=\cdots=14,$$

a iz (17) je, $t_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)=\ldots 41$, tj. $t_a=\sqrt{41}$. Analogno dobivamo, da je $t_b=\sqrt{26}$ i $t_c=\sqrt{17}$. Nadalje je $h_a=\frac{2P}{a}=\cdots=\frac{14}{\sqrt{5}}$, odnosno $h_b=\frac{14}{\sqrt{10}}$ i $h_c=\frac{14}{\sqrt{13}}$.

Problem 2. *Izračunajmo P, ako je* $t_a=\sqrt{41}$, $t_b=\sqrt{26}$ *i* $t_c=\sqrt{17}$.

Rješenje. $P=\frac{1}{3}\left[(t_a^2+t_b^2+t_c^2)^2-2(t_a^4+t_b^4+t_c^4)\right]^{\frac{1}{2}}$=...=14, što smo i očekivali zbog P1.

Problem 3. *Izračunajmo P, ako je* $h_a=\frac{14}{\sqrt{5}}$, $h_b=\frac{14}{\sqrt{10}}$ *i* $h_c=\frac{14}{\sqrt{13}}$.

Rješenje. Iz (13) slijedi

$$P=\left[(h_a^{-2}+h_b^{-2}+h_c^{-2})^2-2(h_a^{-4}+h_b^{-4}+h_c^{-4})\right]^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left[\left(\frac{5}{14^2}+\frac{10}{14^2}+\frac{13}{14^2}\right)^2-2\left(\frac{5^2}{14^4}+\frac{10^2}{14^4}+\frac{13^2}{14^4}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\cdots=14,$$

a i to smo očekivali.

Sada dolazimo do još jedne formule, koja je „slična“ *Heronovim formulama*. Naime, ako je trokut zadan s duljinama polumjera njemu pripisanih kružnica, tada je površina trokuta dana s formulom

$$P=\left[\left[\left(r_b^{-1}+r_c^{-1}\right)^2+(r_c^{-1}+r_a^{-1})^2+\left(r_a^{-1}+r_b^{-1}\right)^2\right]^2-2\left[\left(r_b^{-1}+r_c^{-1}\right)^4+\right.\right.$$
$$\left.\left.(r_c^{-1}+r_a^{-1})^4+\left(r_a^{-1}+r_b^{-1}\right)^4\right]\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

Da bi dokazali (25) koristimo dobro poznate formule:

$$r=\frac{P}{s}, r_a=\frac{P}{s-a}, r_b=\frac{P}{s-b}, r_c=\frac{P}{s-c}, \tag{26}$$

gdje je *r* duljina polumjera trokutu upisane kružnice, dok su: r_a, r_b, r_c duljine polumjera trokutu pripisanih kružnica. Dalje, pomoću navedenih formula lagano dobivamo, da je $r^{-1}=r_a^{-1}+r_a^{-1}+r_a^{-1}$ i $P=\sqrt{rr_ar_br_c}$, a pomoću njih dolazimo do tražene formule.

Problem 4. *Ako su duljine polumjera pripisanih kružnica trokutu dane s:*

$$r_a=\frac{14}{-\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}}, r_b=\frac{14}{\sqrt{5}-\sqrt{10}+\sqrt{13}}, r_c=\frac{14}{\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{13}}; \tag{27}$$

tada trebamo naći površinu P.

Rješenje. Ako te vrijednosti supstituiramo u (25) dobivamo da je $P=14$. No, to je istina, jer pomoću: $a=2\sqrt{5}$, $b=2\sqrt{10}$ i $c=2\sqrt{13}$; smo već dobili $P=14$, a također možemo dobiti i (27), ako primjenimo (26).

Napomena 2. Razmatranje bi mogli proširiti tako, da s a_4, b_4, c_4 označimo duljine simetrala kutova trokuta. Znamo da vrijede formule

$$a_4=\frac{\sqrt{b_1c_1\left((b_1+c_1)^2-a_1^2\right)}}{b_1+c_1}, b_4=\frac{\sqrt{c_1a_1\left((c_1+a_1)^2-b_1^2\right)}}{c_1+a_1}, c_4=\frac{\sqrt{a_1b_1\left((a_1+b_1)^2-c_1^2\right)}}{a_1+b_1}.$$

Možemo dokazati da formule tipa (23) i (24) za duljine simetrala kutova trokuta ne vrijede. Naime, ako je $i = 4$, tada možemo pokazati da za $\varepsilon_4 = \pm 1$ veličina K_4 nije konstanta. To je najjednostavnije napraviti, tako da najprije uzmemo posebni slučaj $a_1 = b_1 = c_1$ (trokut je jednakostraničan) za koji nađemo K_4, zatim uzmemo drugi slučaj $a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$ (trokut je pravokutan), te za njega nađemo K_4. Vidjet ćemo, da ta konstanta u ova dva slučaja nema istu vrijednost, dakle formule tipa (23) i (24) nije moguće općenito proširiti na duljine simetrala kuta.

Nakon ovih razmatranja možemo postaviti dvije, čini se baš ne jednostavne, hipoteze, koje bi se mogle razmatrati.

Hipoteza 1. *Ako su* $a_4\ , b_4\ , c_4$ *duljine simetrala kutova trokuta, tada ne postoji formula*

$$P = \frac{1}{4}K_4\left[(a_4^{2p} + b_4^{2p} + c_4^{2p})^2 - 2(a_4^{4p} + b_4^{4p} + c_4^{4p})\right]^{\frac{q}{2}}$$

gdje je $K_4 = const$ *i* $pq = 1$ *za* $p, q \in \mathbb{Q}$.

Hipoteza 2. *Ako su* $a_5\ , b_5\ , c_5$ *duljine polumjera trokutu pripisanih kružnica, tada ne postoji formula*

$$P = \frac{1}{4}K_5\left[(a_5^{2p} + b_5^{2p} + c_5^{2p})^2 - 2(a_5^{4p} + b_5^{4p} + c_5^{4p})\right]^{\frac{q}{2}}$$

gdje je $K_5 = const$ *i* $pq = 1$ *za* $p, q \in \mathbb{Q}$.

b) Generalizacija u smjeru Kumulativne formule za površinu tetivnoga poligona

Sada ćemo napraviti poopćenje *Heronove formule* u drugom smjeru pomoću heurističke metode za opći tetivni poligon. Strogi dokaz te formule se odnosi samo na trokut i tetivni četverokut, onda dokazujemo, da ona općenito ne vrijedi za ostale tetivne poligone.

Konačno ćemo formulirati naš problem, i doći do vjerodostojne hipoteze, koju ćemo onda dokazati matematičkom indukcijom.

Hipoteza o površini općeg tetivnog poligona. *Neka je zadan tetivni n-terokut* ($n \geq 3$), *čiji su vrhovi desno orijentirani i nalaze se u točkama:* $A_1, A_2, \dots, A_n$. *Njegove duljine stranica su* $a_i = |A_i A_{i+1}|; i = 1,2, \dots, n-1;\ a_n = |A_n A_1|;$ *te je poluopseg*

$$s_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n), \tag{28}$$

tada je površina toga poligona dana formulom

$$P_n = \left(ctg\frac{180^\circ}{n}\right)\left[\frac{n^{n-2}}{(n-2)^n} s_n^{4-n}(s_n - a_1)\cdot \dots \cdot (s_n - a_n)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

Napomena 3. *Formulu* (29) *ćemo zvati* ***Kumulativna formula za površinu tetivnog poligona****, ako je* $n \in \{3,4\}$*; koju možemo još pisati i u oblicima*

$$P_3 = \frac{1}{4}\left[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 - 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$P_4 = \frac{1}{4}\left[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 - 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4) + 8a_1a_2a_3a_4\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{30}$$

zavisno o tome da li se radi o trokutu ili tetivnom četverokutu. Pokazat ćemo da za slučajeve $n > 4$ *ta formula općenito ne vrijedi, dakle nije heronskog tipa.*

Napomena 4. *Pravokutnik je tetivni četverokut, i ako su mu duljine stranica a i b, pa mu je tada površina* $P = ab$. *No, tu formulu možemo dobili, ako u* (30) *uvrstimo da je* $a_1 = a_3 = a$ *i* $a_2 = a_4 = b$.

Izvod hipoteze. Polazimo najprije od pravilnog *n-terokuta*, čija je površina dana s

$$P_n = \frac{na^2}{4} ctg \frac{180^\circ}{n}, \tag{31}$$

gdje je $a_i = a$; $i = 1,2, \dots, n$. Pokušajmo sada naći još koji posebni slučaj. Neka to bude, kada poligon degenerira u dužinu; a to znači da mu duljina polumjera opisane kružnice teži u beskonačnost; naime, neka je $a_2 + a_2 + \dots + a_n = a_1$, a odatle je, jer smo uvažili (28), $s_n - a_1 = 0$. Zbog toga posebnog slučaja površina poligona je $P_n = 0$, pa očekujemo da se u formuli pojavi razlika $s_n - a_1 = 0$ kao faktor.

Budući, da formula ne zavisi o tome, kako smo označili duljine stranica, onda to povlači, da ona sadrži i faktore $s_n - a_2, s_n - a_3, \dots, s_n - a_n$, a odatle zaključujemo da naša formula sadrži produkt

$$p_n = (s_n - a_1)(s_n - a_2) \cdot \dots \cdot (s_n - a_n). \tag{32}$$

Uvažimo li napomenu o dimenzioniranju, onda je jasno da je dimenzija od p_n dana s $[p_n]_D = L^n$, no znamo da mora biti

$$[P_n]_D = L^2 \tag{33}$$

Malo se podsjetimo *Heronove formule* za površinu trokuta, sada u novoj oznaci,

$$P_3 = [s_3(s_3 - a_1)(s_3 - a_2)(s_3 - a_3)]^{\frac{1}{2}}, \tag{34}$$

gdje je $s_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$ i formule za površinu tetivnog četverokuta dane u obliku

$$P_4 = [(s_4 - a_1)(s_4 - a_2)(s_4 - a_3)(s_4 - a_4)]^{\frac{1}{2}}, \tag{35}$$

gdje je $s_4 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$. Evidentno je, da se (34) može dobiti i iz (35), i to tako da trokut shvatimo kao degenerirani četverokut, kada mu je duljina jedne stranice jednaka nuli (npr. $a_4 = 0$).

U formulama (34) i (35) se pojavljuje drugi korijen, pa pretpostavljamo da i naša formula mora biti u obliku

$$P_n = [f(a_1, a_2, \dots, a_n) p_n]^{\frac{1}{2}}, \tag{36}$$

gdje je $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ homogena i simetrična funkcija, ali takva da je

$$[f(a_1, a_2, \dots, a_n)]_D = L^{4-n},$$

jer tada važi (33). Naslućujemo da je $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = k s_n^{4-n}, (k = const.)$ te iz (36) slijedi da je

$$P_n = [k s_n^{4-n} p_n]^{\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

Dakle, u (37) trebamo još odrediti konstantu *k*. Da bi nju dobili napravimo specijalizaciju $a = a_1 = a_2 = \dots = a_n$, prema tome radi se o pravilnom *n-terokutu*, kod kojega je

$$s_n = \frac{1}{2}na,\ p_n = \frac{(n-2)^n}{2^n}a^n, \tag{38}$$

dakle vrijedi (31). Ako (38) i (31) supstituiramo u (29) dobivamo da je

$$\frac{na^2}{4}ctg\frac{180^\circ}{n} = \left[k\left(\frac{1}{2}na\right)^{4-n}\frac{(n-2)^n}{2^n}a^n\right]^{\frac{1}{2}},$$

a odatle je $k = ctg^2\frac{180^0}{n}\cdot\frac{n^{n-2}}{(n-2)^n}$, pa (37) poprima oblik (29), jer smo uvažili (32). Prema tome došli smo do vjerodostojne *Hipoteze o površini općeg tetivnog poligona*. Pokazat ćemo da ona općenito ne vrijedi.

Sada ćemo najprije dati dvije posljedice dane hipoteze.

Napomena 5. Ako je $n = 3$, tada iz (29) slijedi *Heronova formula* (34), jer smo uvažili da je $ctg60^0 = \sqrt{3}/3$.

Napomena 6. Za $n = 4$ iz (29) slijedi formula za površinu tetivnog četverokuta (35), jer smo uvažili da je $ctg45^0 = 1$.

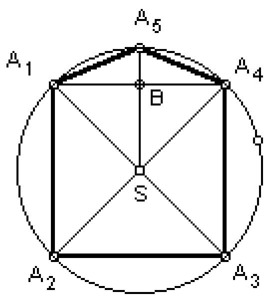
Napomena 7. Ako je $n = 5$, tada iz (29) slijedi

$$P_5 = (ctg36^0)\left[\frac{5^3}{3^5}s_5^{-1}(s_5-a_1)(s_5-a_2)(s_5-a_3)(s_5-a_4)(s_5-a_5)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{39}$$

Moramo pokazati da ova formula općenito nije točna za opći tetivni peterokut, no u nekim slučajevima ona je dobra aproksimacija, što možemo provjeriti upotrebom programa GSP ili nekog drugog (Maple V, Mahtematica,...).

Dokaz da hipoteza ne vrijedi za $n = 5$. Navedenu formulu ne znamo izvesti, ali ćemo je provjeriti za tetivni peterokut $A_1 \dots A_5$ koji je prikazan na slici 1., gdje je

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1,\ a_4 = a_5, \tag{40}$$



Slika 1.

a četverokut $A_1A_2A_3A_4$ je kvadrat. Nađimo a_4 . Iz slike 1 se vidi, da je.

$|A_1S| = |A_5S| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dalje dobivamo da je $a_4 = |A_4A_5| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}$ ili

.
$$a_4 = a_5 = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2} = 0.5411961. \tag{41}$$

Iz (40) i (41) dobivamo

$$s_5 = \frac{3+2\cdot 0.5411961}{2} = 2.0411961 \tag{42}$$

Supstituiramo li (40),(41) i (42) u (39) slijedi

$$P_5 = 1.10113. \tag{43}$$

Na drugi način dobijemo P_5 direktno iz slike 1, dakle potpuno točno ili približno; ako izvršimo korjenovanje; rezultat ovom metodom je

$$P_5 = 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{3+\sqrt{2}}{4} = 1.1035534. \tag{44}$$

Lako provjerimo, da se rezultati (43) i (44) razlikuju za 0.002423...(relativna greška je oko 0.2%) a to i nije čudo jer smo koristili formulu (39) gdje je realizirano 17 viših operacija, koje su mogle napraviti navedenu grešku, pa bi i dalje mogli vjerovati da je upotrebljena formula možda potpuno točna, jer je nismo strogo dokazali. Sada ćemo jednom strožom analizom to negirati.

Ako se bavimo sa *zlatnim rezom* i *konstrukcijom pravilnog peterokuta*, tada dolazimo do relacije $sin36° = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, a odatle je

$$ctg36° = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}. \tag{45}$$

Supstituiramo li sada vrijednosti:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, a_4 = a_5 = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}, P_5 = \frac{3+\sqrt{2}}{4} \text{ i (45);}$$

u (39) vidimo da formula nije točna, jer lijeva strana te jednakosti ne sadrži $\sqrt{5}$, a desna ga sadrži (postoji barem jedna kontradikcija), dakle formula (39) samo približno izračunava površinu.

Dokaz da hipoteza ne vrijedi za $n > 5$**.** Znamo, da je implikacija istinita, ako iz istine slijedi istina. Nadalje, neistina je da iz istine slijedi neistina, i istina je da iz neistine može slijediti i istina ili neistina.

Analizirajmo sada formulu (29). Naime, dokazali smo da je ona neistinita za $n = 5$. Pretpostavimo sada, da (29) vrijedi za $n = 6$. No, poligon za $n = 6$ može degenerirati tako da duljina jedne stranica bude jednaka nula, a to znači da bi (29) trebala vrijediti i za $n = 5$ što nije istina. I na osnovu ovih razmatranja možemo matematičkom indukcijom pokazati da (29) ne vrijedi za $n > 5$, pa bi time hipoteza bila u potpunosti dokazana.

Iz mnemotehničkih razloga, sada na kraju ispišimo sve formule heronskog tipa:

1. ***Heronova formula kao funkcija duljina stranica trokuta;***

$$P = [s(s-a)(s-b)(s-c)]^{\frac{1}{2}}, \tag{46}$$

gdja su: *a*,*b*,*c*, duljine stranica trokuta a $s = \frac{a+b+c}{2}$. (46) se može pisati i u obliku

$$P = \frac{1}{4}[(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)]^{\frac{1}{2}}.$$

2. ***Heronova formula kao funkcija duljina visina trokuta;***

$$P=\frac{1}{4}\left[s_h^{-1}(s_h^{-1}-h_a^{-1})(s_h^{-1}-h_b^{-1})(s_h^{-1}-h_c^{-1})\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{47}$$

gdje su: h_a, h_b, h_c, duljine visina trokuta; a $s_h^{-1}=\frac{1}{2}(h_a^{-1}+h_b^{-1}+h_c^{-1})$. (47) se može pisati i u obliku

$$P=[(h_a^{-2}+h_a^{-2}+h_a^{-2})^2-2(h_a^{-4}+h_a^{-4}+h_a^{-4})]^{-\frac{1}{2}}.$$

3. ***Heronova formula kao funkcija duljina težišnica trokuta;***

$$P=\frac{4}{3}[s_t(s_t-t_a)(s_t-t_b)(s_t-t_c)]^{\frac{1}{2}}, \tag{48}$$

gdje su: t_a, t_b, t_c; duljine težišnica trokuta; a $s_t=\frac{1}{2}(t_a+t_b+t_c)$. (48) se može pisati i u obliku

$$P=\frac{1}{3}\left[(t_a^2+t_b^2+t_c^2)^2-2(t_a^4+t_b^4+t_c^4)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

4. ***Kumulativna formula za površinu trokuta***

$$P=K_i\left[s_i^{\varepsilon_i}(s_i^{\varepsilon_i}-a_i^{\varepsilon_i})(s_i^{\varepsilon_i}-b_i^{\varepsilon_i})(s_i^{\varepsilon_i}-c_i^{\varepsilon_i})\right]^{\frac{\varepsilon_i}{2}}, \tag{49}$$

gdje je: $s_i^{\varepsilon_i}=\frac{1}{2}(a_i^{\varepsilon_i}+b_i^{\varepsilon_i}+c_i^{\varepsilon_i})$; $i=1$ radi se o duljini stranica, $i=2$ radi se o duljini visina, $i=3$ radi se o duljini težišnica; gdje je

$$\varepsilon_i=(-1)^{i+1}, K_i=\left(4\cdot 3^{sng\,(2-i)}\right)^{(-1)^i\cdot sng\,(1-i)}.$$

(49) se piše i u obliku

$$P=\frac{1}{4^{\varepsilon_i}}K_i\left[(a_i^{2\varepsilon_i}+b_i^{2\varepsilon_i}+c_i^{2\varepsilon_i})^2-2(a_i^{4\varepsilon_i}+b_i^{4\varepsilon_i}+c_i^{4\varepsilon_i})\right]^{\frac{\varepsilon_i}{2}}.$$

5. ***Formula kao funkcija duljina polumjera trokutu pripisanih kružnica;***

$$P=\left[\left[\left(r_b^{-1}+r_c^{-1}\right)^2+(r_c^{-1}+r_a^{-1})^2+\left(r_a^{-1}+r_b^{-1}\right)^2\right]^2-2\left[\left(r_b^{-1}+r_c^{-1}\right)^4+\right.\right.$$

$$\left.\left.(r_c^{-1}+r_a^{-1})^4+\left(r_a^{-1}+r_b^{-1}\right)^4\right]\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{50}$$

gdje su: r_a, r_b, r_c duljine polumjera pripisanih kružnica. Ta formula nije formula heronskog tipa, premda je njoj „slična“.

I na kraju napomenimo, kada je u pitanju trokut, da (50), ako uvažimo vezu $r^{-1}=r_a^{-1}+r_b^{-1}+r_c^{-1}$, možemo pisati i u obliku

$$P=\left[\left(r_a^{-1}+r_b^{-1}+r_c^{-1}\right)^{-1}r_ar_br_c\right]^{\frac{1}{2}}.$$

6. ***Kumulativna formula za površinu tetivnog poligona za*** $n\in\{3,4\}$

$$P_n=\left(ctg\,\frac{180^\circ}{n}\right)\left[\frac{n^{n-2}}{(n-2)^n}s_n^{4-n}(s_n-a_1)\cdot\ldots\cdot(s_n-a_n)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{51}$$

gdje su: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ duljine stranica i $s_n=\frac{1}{2}(a_1+\cdots+a_n)$. (51) se može pisati i u obliku:

$$P_3 = \frac{1}{4}[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 - 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4)]^{\frac{1}{2}}.$$

$$P_4 = \frac{1}{4}[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 - 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + + a_4^4) + 8a_1a_2a_3a_4]^{\frac{1}{2}}.$$

Zaključak. *Svrha ovoga članka je, da se prezentira heuristika (grč., nauka o metodama istraživanja novih spoznaja) ili ars inveniendi (lat., umijeće naslućivanja), koja ima veliku važnost u matematici, ali i u drugim naukama (fizika, kemija, biologija,...). No, u matematici zakoni dobiveni heurističkom metodom moraju biti potvrđeni još strogim teorijskim dokazom, koji direktno ili indirektno slijedi iz postavljenih aksioma za konkretnu matematičku granu. Međutim, uvjetno rečeno, u drugim naukama zakoni dobiveni tom metodom se prihvaćaju kao pravovaljani nakon konačnog broja empirijakih provjera, osim u onim dijelovima fizike koji su aksiomatski izgrađeni* (*klasična mehanika, mehanika neba, specijalna teorija relativnosti, ...*).

Literatura

[1] G. L. Alexanderson, *The random walks of George Pólya*, Washington, DC, 2000.

[2] B. Pavković, *Metoda posebnih slučajeva*, HMD, Zbornik radova, Šesti susret nastavnika matematike; Zagreb, 3.-5. srpnja 2002.

[3] P. Svirčević, *Kumulativna formula za površinu trokuta,* Matematičko-fizički list, br. 3, Zagreb, 2008/09.

[4] P. Svirčević, *Heuristika i kumulativna formula za površinu tetivnog poligona,* Matematičko-fizički list, br.2, Zagreb, 2012/13.

[5] П. Свирчевић, *Заједничка анализа три тврђења о троуглу,* Настава математике, LIX 1-2 / 2014.,

[6] H.Taylor and L.Taylor, *George Pólya - Master of Discovery,* Palo Alto, CA, 1993.