MAT-KOL (Banja Luka)
XXIII (2)(2017), 67-72
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1702067M

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5828 (o)

PET NAČINA RJEŠAVANJA JEDNOG ZADATKA O PRAVILNOM OSAMNAESTOUGLU

(Five ways to solve a problem on regular 18 – gon)

Dragoljub Milošević

Gornji Milanovac, Srbija
e-mail: *dramil947@gmail.com*

Sažetak: U ovom radu dajemo pet raznih načina rješavanja jednog zadatka o pravilnom 18–ouglu.

Ključne riječi: pravilan 18-ougao, stranica i dijagonale pravilnog 18-ougla, slični trouglovi, sinusna teorema, adicione formule, Ptolemejeva teorema.

Abstract. In this paper we give five different ways to solve a problem on regular 18-gon.

Key words: regular 18-gon, side and diagonals of regular 18-gon, similar triangles, sine law, addition formulas, Ptolemy's theorem.

AMS Subject Classification (2010): 51M04, 97G40
ZDM Subject Classification (2010: G40

Rješavanje zadataka na različite načine omogućava iskazivanje svog našeg bogatstva ideja, dosjetki i inventivnosti. Upoređivanjem tih načina može se ustanoviti koji je od njih kraći, efektniji, elegantniji.

Ovdje ćemo prezentovati nekoliko načina rješavanja sljedećeg zadatka namijenjenog mladim matematičarima srednjoškolcima: *U pravilnom osamnaestouglu* $A_0A_1 \dots A_{17}$ *važi jednakost*

$$\frac{A_0A_5}{A_0A_3} - \frac{A_0A_2}{A_0A_4} = 1.$$

Prvi način. Uvedimo sljedeće oznake: $A_0A_1 = a$, $A_0A_2 = b$, $A_0A_3 = c$, $A_0A_4 = d$, $A_0A_5 = e$, $A_0A_6 = f$, $A_0A_7 = g$ i $A_0A_8 = h$. Tada navedena jednakost postaje

$$\frac{e}{c} - \frac{b}{d} = 1. \tag{1}$$

Centralni ugao nad stranicom pravilnog osamnaestougla je $360^0 : 18 = 20^0$, a odgovarajući periferijski ugao iznosi $20^0 : 2 = 10^0$. S obzirom da je spoljašnji ugao jednak centralnom uglu, tj. 20^0, to je unutrašnji ugao pravilnog 18-ougla jednak $180^0 - 20^0 = 160^0$.

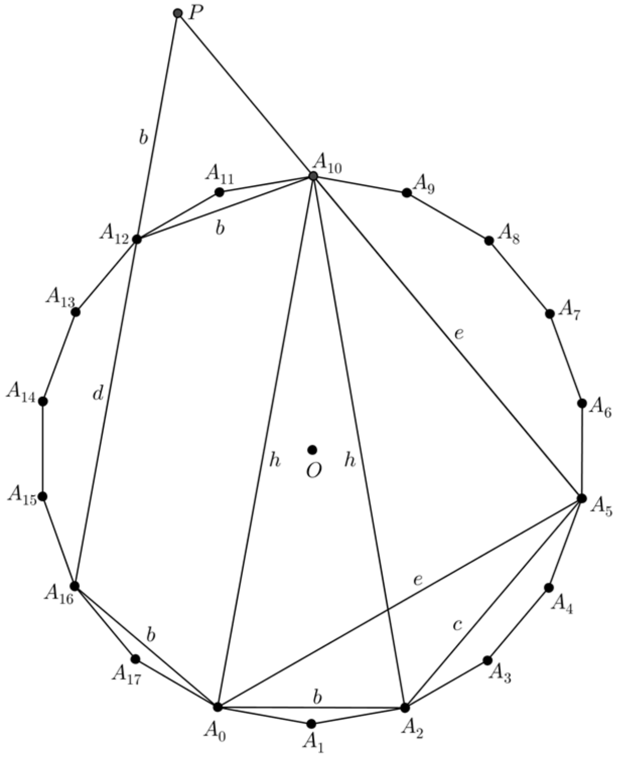
Primjenom Ptolemejeve teoreme na tetivni četverougao $A_0A_2A_5A_{10}$ (slika 1), dobijamo

$$A_0A_5 \cdot A_2A_{10} = A_0A_2 \cdot A_5A_{10} + A_2A_5 \cdot A_0A_{10}, \text{ ili } eh = be + ch, \text{ tj.}$$

$$h(e - c) = be. \tag{2}$$

Sada pokažimo da je

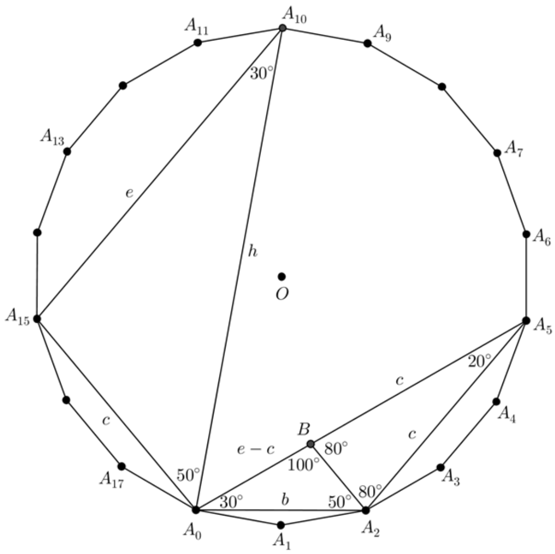
$$h = b + d\,. \tag{3}$$



Slika 1

Produžimo dijagonalu $A_{16}A_{12} = d$ do tačke P tako da $A_{12}P = A_{12}A_{10} = b$. Kako je $<A_{16}A_0A_{10} = 60^0$ (periferijski ugao nad trećinom kružnice opisane oko pravilnog 18-ougla), $A_{12}A_{16} \parallel A_{10}A_0$ i $A_0A_{16} = A_{10}A_{12=} b$, zaključujemo da je četverougao $A_0A_{10}A_{12}A_{16}$ jednakokraki trapez. To znači da je $<A_{10}A_{12}A_{16} = 120^0$, pa je $<PA_{12}A_{10} = 180^0 - 120^0 = 60^0$. Budući da je $A_{10}A_{12} = A_{12}P = b$ i $<\mathrm{P}A_{12}A_{10} = 60^0$, proizlazi da je trougao $A_{10}PA_{12}$ jednakostranični, pa je i $<A_{10}PA_{12} = 60^0$. Imajući u vidu da je $<A_{12}A_0A_{16} = 60^0 =< A_{10}PA_{12}$ i $A_{16}P \parallel A_{10}A_o$, zaključujemo da je četverougao $A_0A_{12}PA_{16}$ paralelogram. Zbog toga je $h = A_0A_{10} = A_{16}P = A_{16}A_{12} + A_{12}P = d + b$, tj.$h = b + d$. Iz jednakosti (2) i (3) slijedi $(b + d)(e - c) = be,$ što je ekvivalentno s traženom jednakošću (1).

Drugi način. Na dijagonali $A_0A_5 = e$ odredimo tačku B tako da $A_5B = A_5A_2 = c$ (slika 2).



Slika 2

Tada je $A_0B = e - c$. U jednakokrakom trouglu A_2A_5B je $<A_2A_5B = 20^0$ (periferijski ugao nad devetinom kružnice opisane oko pravilnog 18-ougla) i $< BA_2A_5 =< A_5BA_2 = (180^0 - 20^0): 2 = 80^0$, pa je u trouglu A_0A_2B: $< A_0BA_2 = 180^0 - 80^0 = 100^0$,

$< BA_0A_2 = 30^0$ i $< A_0A_2B = 180^0 - (100^0 + 30^0) = 50^0$. Trouglovi A_0A_2B i $A_0A_{10}A_{15}$ su slični, jer imaju jednake uglove, pa je

$$A_0B : A_{15}A_{10} = A_0A_2 : A_0A_{10}, \text{ ili } (e-c) : e = b : h \text{, tj. } h(e-c) = be.$$

Otuda, zbog (3), slijedi $(b+d)(e-c) = be \Leftrightarrow \frac{e}{c} - \frac{b}{d} = 1$, tj. (1).

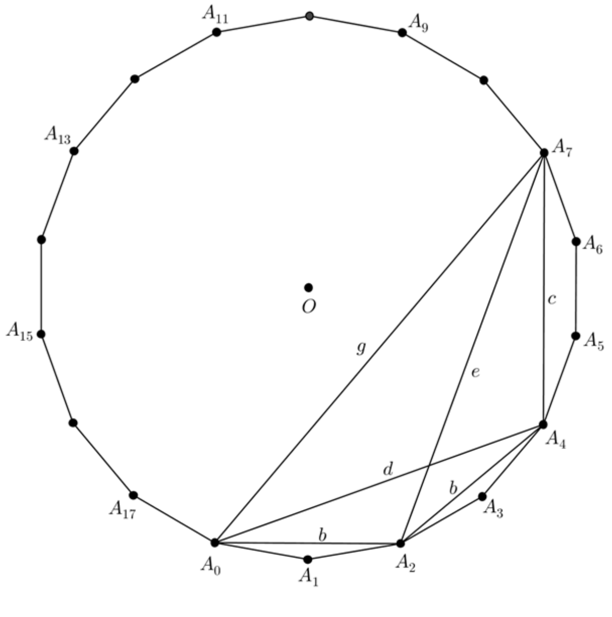
Treći način. Primjenom sinusne teoreme na trougao A_0A_2B (slika 2), imamo $\frac{e-c}{b} = \frac{sin\,50^0}{sin\,100^0}$. Primjenom te teoreme na trougao $A_0A_3A_7$ je $\frac{A_3A_7}{A_0A_3} = \frac{sin\,40^0}{sin\,30^0}$. Sada dobijamo $\frac{e-c}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{sin\,50^0}{sin\,100^0} \cdot \frac{sin\,40^0}{sin\,30^0}$. Odavde, zbog $sin40^0 = sin(90^0 - 50^0) = cos50^0$, formule za sinus dvostrukog ugla ($sin2x$= $2sinxcosx$) i $sin30^0 = \frac{1}{2}$, slijedi

$$\frac{e-c}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{sin50^0}{2sin50^0cos50^0} \cdot \frac{cos50^0}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Iz ove jednakosti i jednakosti (3) lako dobijemo željenu relaciju (1).

Četvrti način. Ako primjenimo Ptolemejevu teoremu na tetivni četverougao $A_0A_2A_4A_7$ (slika 3), imamo

$$de = bc + bg\,. \tag{4}$$



Slika 3

Sada pokažimo da vrijedi jednakost

$$bg = cd\,. \tag{5}$$

Na osnovu sinusne teoreme je

$$bg = 2Rsin20^0 \cdot 2Rsin70^0, \tag{6}$$

gdje je R poluprečnik kružnice opisane oko pravilnog 18-ougla.

Primjenom trigonometrijske formule

$$sinx \cdot siny = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)),$$

dobijemo

$$sin70^0 sin20^0 = \frac{1}{2}(\cos(70^0 - 20^0) - (70^0 + 20^0))$$

$$= \frac{1}{2}cos50^0$$

$$= sin30^0 sin40^0\ ,$$

pa iz (6) slijedi

$$bg = 2Rsin30^0 \cdot 2Rsin40^0 = cd, \text{ tj. (5).}$$

Iz Jednakosti (4) i (5) dobijemo

$$de = bc + cd \iff de - bc = cd\ /: cd$$

$$\iff \frac{e}{c} - \frac{b}{d} = 1, \text{ tj. (1).}$$

Peti način. Kako je

$$b = 2Rsin20^0,\ c = 2Rsin30^0,\ d = 2Rsin40^0 \text{ i } e = 2Rsin50^0,$$

zadana jednakost (1) je ekvivalentna sa

$$\frac{sin50^0}{sin30^0} - \frac{sin20^0}{sin40^0} = 1,$$

tj. sa

$$sin50^0 sin40^0 - sin20^0 sin30^0 = sin30^0 sin40^0 \ . \qquad (7)$$

Primjenom formule (6) imamo

$$sin50^0 sin40^0 - sin20^0 sin30^0 = \frac{1}{2}(cos10^0 - cos90^0) - \frac{1}{2}(cos10^0 - cos50^0)$$

$$= \frac{1}{2} cos50^0$$

$$= sin30^0 sin40^0, \text{ tj. (7).}$$

Ovim je dokazana postavljena jednakost (1).

LITERATURA

[1] Arslanagić, Š.: *Matematika za nadarene*; Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Blagojević, V.: *Teoreme i zadaci iz planimetrije*; Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Istočno Sarajevo, 2002.