MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN: 0354-6969 (p), ISSN: 1986-5228 (o)
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
Vol. XXIII (2)(2017), 79-87
DOI: 10.7251/MK1702079M

NEOBIČNI BROJEVI I JEDNAKOSTI

Josip Matejaš, Marija Kovačić

Sažetak. U svakodnevnom životu neobične stvari i događaji pobuđuju najveći interes i stoga ostaju najduže zapamćeni. Iako se s brojevima stalno susrećemo, mnoštvo njihovih neobičnih svojstava nije nam dovoljno poznato. Otkrivajući ,,nepoznato o poznatom" u ovom radu prezentiramo izabranu kolekciju brojeva i jednakosti neobičnih ali zanimljivih svojstava. Kako se radi o iznimkama a ne o pravilima, ne mogu se generalizirati. Štoviše, njihova neobičnost zaista začuđuje pa rad predstavlja onu drugu, zanimljiviju stranu matematike s ciljem motiviranja i pobuđivanja dodatnog interesa čitatelja za ovaj standardno nepopularni predmet.

1. Uvod

U rutinskoj svakodnevici najzapaženiji su neki neobični i nesvakidašnji događaji, ljudi i pojave, dok one uobičajene često ni ne zamjećujemo. Svakodnevna prisutnost brojeva, računanja i matematike općenito nas ne navodi na razmišljanje o posebnostima koje se pritom pojavljuju. No i među brojevima i jednakostima u matematici ima onih koji se ističu svojim posebnim, specifičnim svojstvima i karakteristikama. Možda je razlog neprepoznatljivosti ovih posebnosti predodžba kako brojevi ne mogu biti neobični i zanimljivi jer su uvijek isti i odavno poznati pa je u matematici sve već otkriveno. Međutim, matematika je područje koje se aktivno razvija u svim smjerovima. Kako je prisutna u svim područjima ljudske djelatnosti, stalni izazovi i problemi moderne svakodnevnice nameću potrebu otkrivanja novih ideja, metoda i rješenja. Kratko rečeno otkriva se ,,nepoznato o poznatom". Dakle, brojevi uvijek iznova mogu biti zanimljivi i mogu iznenaditi svojim neobičnim svojstvima. Kako su takva svojstva uglavnom iznimka, ne možemo ih generalizirati. Međutim, zbog svoje neobičnosti, mogu biti izazovna te pobuditi interes za računanje i matematiku općenito. Mnoštvo takvih zanimljivosti nalazimo još u starim matematičkim knjigama i časopisima (vidjeti [**1**]) što dokazuje da one oduvijek privlače pažnju šireg čitateljstva te su, poput čitave matematičke

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11D41, 11N05, 11Z05.
Key words and phrases. Brojevi neobičnih svojstava, jednakosti neobičnih svojstava.

znanosti, aktualne i danas. Neke od njih, malo prerađene i dopunjene, donosimo u ovom radu. Različite pristupe ovoj tematici možemo naći u literaturi iz gotovo svih kultura i vremenskih epoha (vidjeti [**2, 3, 4**]) a što pokazuje njenu univerzalnost.

2. Neobični brojevi

Neki prirodni brojevi mogu se, na jednostavne načine, prikazati pomoću svojih znamenaka. Tako, koristeći mnoenje, zbrajanje i oduzimanje, imamo:

$$\begin{aligned} 369 &= 3\cdot 69+36\cdot 9-3\cdot 6\cdot 9\\ 639 &= 6\cdot 39+63\cdot 9-6\cdot 3\cdot 9\\ 688 &= 6\cdot 88+68\cdot 8-6\cdot 8\cdot 8 \end{aligned}$$

a može i bez oduzimanja:

$$155 = 1\cdot 55+15\cdot 5+1\cdot 5\cdot 5$$

ili sa još manje mnoenja i zbrajanja:

$$\begin{array}{rcccc} 36 &=& 3\cdot 6 &+& 3\cdot 6\\ 655 &=& 6\cdot 55 &+& 65\cdot 5\\ 1258 &=& 1\cdot 258 &+& 125\cdot 8\\ 6208 &=& 6\cdot 208 &+& 620\cdot 8\\ \dots & & \dots & & \end{array}$$

pa i uz pomoć kvadriranja:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} 101 &=& 10^2+\ 1^2 & 2025 &=& (20+25)^2\\ 1233 &=& 12^2+33^2 & 3025 &=& (30+25)^2\\ 8833 &=& 88^2+33^2 & 88209 &=& (88+209)^2 \end{array}$$

a ima i mnogo drugih:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} 94122353 &=& 9412^2+2353^2 & 24502500 &=& (2450+2500)^2\\ 8235038125 &=& 82350^2+38125^2 & 25502500 &=& (2550+2500)^2\\ 876712328768 &=& 876712^2+328768^2 & 52881984 &=& (5288+1984)^2\\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \end{array}$$

Neki su brojevi jednaki drugoj, trećoj, itd. potenciji zbroja svojih znamenaka, npr. $81=(8+1)^2$, pa zatim:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} 512 &=& (5+1+2)^3 & 2401 &=& (2+4+0+1)^4\\ 4913 &=& (4+9+1+3)^3 & 234256 &=& (2+3+4+2+5+6)^4\\ 17576 &=& (1+7+5+7+6)^3 & 614656 &=& (6+1+4+6+5+6)^4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 17210368 &= (1+7+2+1+0+3+6+8)^5\\ 34012224 &= (3+4+0+1+2+2+2+4)^6\\ 612220032 &= (6+1+2+2+2+0+0+3+2)^7\\ \dots\ & \quad \dots \end{aligned}$$

Višekratnici broja 9 imaju vrlo zanimljivo svojstvo da zbrajanjem njihovih znamenaka, po potrebi više puta, uvijek dobijemo 9. Posljedica toga je pravilo djeljivosti po kome je neki broj djeljiv s 9 ako je zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 9:

$$\begin{array}{llllll}
2\cdot 9=18 & \Rightarrow & 1+8=9 & & \\
72\cdot 9=648 & \Rightarrow & 6+4+8=18 & \Rightarrow & 1+8=9\\
555\cdot 9=4995 & \Rightarrow & 4+9+9+5=27 & \Rightarrow & 2+7=9\\
9876\cdot 9=88884 & \Rightarrow & 8+8+8+8+4=36 & \Rightarrow & 3+6=9\\
 & \dots & & \dots &
\end{array}$$

3. Najprostiji prosti brojevi

Znamo da su prosti brojevi oni prirodni brojevi koji su djeljivi samo sami sa sobom i s jedinicom, dakle imaju točno dva različita djeljitelja. Ima ih beskonačno mnogo (Euklid). Uzmimo npr. prosti broj 2393. Postupnim brisanjem njegovih posljednjih znamenaka dobivamo brojeve 239, 23 i 2, a koji su svi opet prosti. Takve brojeve zvat ćemo ,,najprostiji" prosti brojevi. Njih nema beskonačno mnogo. Točnije takvih brojeva (sa najvećim brojem znamenaka) ima točno 27. Evo ih poredanih po veličini:

53	3 793	31 193	593 993	7 393 933
317	3 797	31 379	719 333	23 399 339
599	7 331	37 397	739 397	29 399 999
797	23 333	73 331	739 399	37 337 999
2 393	23 339	373 393	2 399 333	59 393 339
			7 393 931	73 939 133

Navodimo naš originalan konstruktivan dokaz ove tvrdnje u kojem ćemo postupno konstruirati sve navedene brojeve. Budući da se uzastopnim izostavljanjem znamenaka s desna svi brojevi na kraju svedu na svoje vodeće znamenke, a one moraju biti prosti (jednoznamenkasti) brojevi, imamo 4 mogućnosti: $2, 3, 5, 7$. Sada ćemo postupnim dodavanjem po jedne znamenke s desna konstruirati takve brojeve sa $2, 3, 4$ i više znamenaka. Kako su brojevi prosti, trebamo dodavati samo znamenke $1, 3, 7, 9$. Tako njihovim dodavanjem broju 2 dobivamo $21, 23, 27, 29$ od kojih su prosti 23 i 29. Dodavanjem broju 3 imamo $31, 33, 37, 39$ od kojih su prosti 31 i 37 itd. Time dobivamo 9 dvoznamenkastih prostih brojeva:

$$23, 29, 31, 37, 53, 59, 71, 73, 79.$$

Sada postupak ponovimo s ovim brojevima. Tako dodavanjem znamenki 1,3,7,9 broju 23 s desna dobivamo 231,233,237,239 od kojih su prosti 233 i 239, itd. Primjetimo da proširivanjem broja 53 dobivamo 531, 533, 537, 539 koji su svi složeni pa je potraga s brojem 53 završena i to je najmanji broj tog svojstva (prvi je na gornjem popisu). Na taj način dobivamo 14 troznamenklastih prostih brojeva:

$$233, 239, 293, 311, 313, 317, 373, 379, 593, 599, 719, 733, 739, 797.$$

Postupak ponavljamo s ovim brojevima. Pri tome dodavanjem $1, 3, 7, 9$ s desna brojevima 317, 599 i 797 dobijemo složene brojeve pa su ova tri broja sljedeći na našoj listi. Napomenimo da se za provjeru, da li je neki broj prost ili nije, može koristiti neka od postojećih vrlo efikasnih internetskih verzija programa (prime number checker) čime cijeli posao postaje i zabavan. Time dobivamo 16 četveroznamenkastih prostih brojeva ovog svojstva:

$$2333, 2339, 2393, 2399, 2939, 3119, 3137, 3733, 3739, 3793, 3797, 5939, 7193, 7331, 7333, 7393.$$

Ponavljajući postupak s ovim brojevima, brojevi 2393, 3793, 3797 i 7331 generiraju složene brojeve pa ih upisujemo na listu. Dobijemo 15 peteroznamenkastih prostih brojeva:

$$23333, 23339, 23399, 23993, 29399, 31193, 31379, 37337, 37339, 37397, 59393, 59399, 71933, 73331, 73939.$$

Nastavljamo dalje. Dodavanjem $1, 3, 7, 9$ s desna ovim brovima složene brojeve generiraju 23333, 23339, 31193, 31379, 37397 i 73331 pa ih upisujemo na listu. Ostali brojevi daju 12 šesteroznamenkastih prostih brojeva:

$$233993, 239933, 293999, 373379, 373393, 593933, 593993, 719333, 739391, 739393, 739397, 739399.$$

Vidimo da se, povećavanjem broja znamenaka, kolekcija brojeva smanjuje, pa nastavljamo. Dodavanjem desne znamenke $373393, 593993, 719333, 739397$ i 739399 daju složene brojeve pa ih stavljamo dalje na listu. Iz preostalih dobivamo 8 sedmeroznamenkastih prostih brojeva:

$$2339933, 2399333, 2939999, 3733799, 5939333, 7393913, 7393931, 7393933.$$

Nastavljajući postupak, brojevi $2399333, 7393931$ i 7393933 generiraju složene, pa ulaze na listu, a preostali daju 5 osmeroznamenkastih prostih brojeva:

$$23399339, 29399999, 37337999, 59393339, 73939133.$$

Dodavanjem znamenki $1, 3, 7, 9$ s desna ovim brojevima svi dobiveni brojevi su složeni pa je s ovim brojevima lista zaključena. Zanimljivo je pogledati koliko smo brojeva (kandidata) dobivali počevši s jednoznamenkastim sve do osmeroznamenkastih:

$$4 \to 9 \to 14 \to 16 \to 15 \to 12 \to 8 \to 5.$$

Dakle, vidimo da ,,najprostijih" prostih brojeva s najvećim brojem znamenaka ima točno 27. Zaista neočekivan rezultat koji samo opravdava naslov rada, *Neobični brojevi i jednakosti.*

4. Neosjetljive jednakosti

Ako u sljedećim faktorima zamijenimo mjesta njihovim znamenkama, umnožak se ne mijenja:

$$\begin{aligned}
12 \cdot 42 &= 24 \cdot 21 \\
12 \cdot 63 &= 36 \cdot 21 \\
12 \cdot 84 &= 48 \cdot 21 \\
13 \cdot 62 &= 26 \cdot 31 \\
23 \cdot 96 &= 69 \cdot 32 \\
26 \cdot 93 &= 39 \cdot 62 \\
36 \cdot 84 &= 48 \cdot 63 \\
46 \cdot 96 &= 69 \cdot 64
\end{aligned}$$

Vidimo, dakle, da ove jednakosti možemo čitati s lijeva na desno ili obrnuto. Ima još takvih, uz malo premještanje znaka množenja:

$$\begin{aligned}2\cdot 819 &= 9\cdot 182\\ 3\cdot 728 &= 8\cdot 273\\ 4\cdot 217 &= 7\cdot 124\\ 4\cdot 427 &= 7\cdot 244\\ 4\cdot 637 &= 7\cdot 364\\ 5\cdot 546 &= 6\cdot 455\end{aligned}$$

Premjestimo li znak $\cdot$ ne dirajući redoslijed znamenki, umnožak se ne mijenja:

$$\begin{aligned}1\cdot 64 &= 16\cdot 4\\ 1\cdot 95 &= 19\cdot 5\\ 2\cdot 65 &= 26\cdot 5\\ 4\cdot 98 &= 49\cdot 8\\ 6\cdot 545 &= 654\cdot 5\\ 7\cdot 424 &= 742\cdot 4\end{aligned}$$

Promijenimo li znak $+$ u $\cdot$, promijenit će se redoslijed znamenki u rezultatu:

$$\begin{array}{rcrcl@{\qquad\qquad}rcrcl} 9 & + & 9 & = & 18 & 9 & \cdot & 9 & = & 81\\ 24 & + & 3 & = & 27 & 24 & \cdot & 3 & = & 72\\ 47 & + & 2 & = & 49 & 47 & \cdot & 2 & = & 94\\ 263 & + & 2 & = & 265 & 263 & \cdot & 2 & = & 526\\ 497 & + & 2 & = & 499 & 497 & \cdot & 2 & = & 994\end{array}$$

Sljedeća jednakost potpuno je neosjetljiva na potenciranje pribrojnika u njoj:

$$\begin{aligned}1+6+7+17+18+23 &= 2+3+11+13+21+22\\ 1^2+6^2+7^2+17^2+18^2+23^2 &= 2^2+3^2+11^2+13^2+21^2+22^2\\ 1^3+6^3+7^3+17^3+18^3+23^3 &= 2^3+3^3+11^3+13^3+21^3+22^3\\ 1^4+6^4+7^4+17^4+18^4+23^4 &= 2^4+3^4+11^4+13^4+21^4+22^4\\ 1^5+6^5+7^5+17^5+18^5+23^5 &= 2^5+3^5+11^5+13^5+21^5+22^5\end{aligned}$$

Ovaj niz ne možemo nastaviti jer za šeste potencije jednakost ne vrijedi.

5. Tvrdoglava jednakost

Nije lako naći šest prirodnih brojeva a, b, c, d, e, f koji zadovoljavaju jednakost

$$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2\ ,$$

iako je očito da postoji beskonačno mnogo rješenja. Navodimo jedno od njih (Katinova jednakost),

$$123789^2+561945^2+642864^2=242868^2+761943^2+323787^2\ .$$

Ova jednakost ima niz zanimljivih svojstava.

Ako postupno, u svakom broju istovremeno brišemo po jednu znamenku s lijeva, jednakost i dalje vrijedi:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 123789^2 & + & 561945^2 & + & 642864^2 & = & 242868^2 & + & 761943^2 & + & 323787^2 \\ 23789^2 & + & 61945^2 & + & 42864^2 & = & 42868^2 & + & 61943^2 & + & 23787^2 \\ 3789^2 & + & 1945^2 & + & 2864^2 & = & 2868^2 & + & 1943^2 & + & 3787^2 \\ 789^2 & + & 945^2 & + & 864^2 & = & 868^2 & + & 943^2 & + & 787^2 \\ 89^2 & + & 45^2 & + & 64^2 & = & 68^2 & + & 43^2 & + & 87^2 \\ 9^2 & + & 5^2 & + & 4^2 & = & 8^2 & + & 3^2 & + & 7^2 \end{array}$$

Ako to isto napravimo s desna, sve je opet u redu:

$$\begin{array}{lclclclclcl} 123789^2 & + & 561945^2 & + & 642864^2 & = & 242868^2 & + & 761943^2 & + & 323787^2 \\ 12378^2 & + & 56194^2 & + & 64286^2 & = & 24286^2 & + & 76194^2 & + & 32378^2 \\ 1237^2 & + & 5619^2 & + & 6428^2 & = & 2428^2 & + & 7619^2 & + & 3237^2 \\ 123^2 & + & 561^2 & + & 642^2 & = & 242^2 & + & 761^2 & + & 323^2 \\ 12^2 & + & 56^2 & + & 64^2 & = & 24^2 & + & 76^2 & + & 32^2 \\ 1^2 & + & 5^2 & + & 6^2 & = & 2^2 & + & 7^2 & + & 3^2 \end{array}$$

I to nije sve! Ako brišemo po jednu znamenku u svakom broju istovremeno s obje strane, jednakost i dalje vrijedi:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 123789^2 & + & 561945^2 & + & 642864^2 & = & 242868^2 & + & 761943^2 & + & 323787^2 \\ 2378^2 & + & 6194^2 & + & 4286^2 & = & 4286^2 & + & 6194^2 & + & 2378^2 \\ 37^2 & + & 19^2 & + & 28^2 & = & 28^2 & + & 19^2 & + & 37^2 \end{array}$$

Tvrdoglava neka jednakost, zar ne ?!

Napomenimo da polazna jednadžba $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$ spada u Diofantske jednadžbe. Općenito jednadžba oblika $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ gdje je $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ polinom s n varijabli i cjelobrojnim koeficijentima, a za koju tražimo cjelobrojna rješenja, naziva se Diofantska jednadžba. Takve jednadžbe je promatrao još starogrčki matematičar Diofant iz Aleksandrije oko 250. godine, pa su po njemu i dobile ime. Ne postoji opći (konačni) postupak za njihovo rješavanje. Poznati su postupci za rješavanje takvih jednadžbi prvog i drugog stupnja s dvije varijable a za ostale samo u nekim specijalnim slučajevima (za polinome specifičnog oblika). Zbog toga poznavanje ovakvih neobičnih rješenja i svojstava dobiva na značaju i dodatnoj zagonetnosti. Za primjer Diofantskih jednadžbi spomenimo jednu od najpoznatijih, $a^2 + b^2 = c^2$, čija cjelobrojna pozitivna rješenja čine Pitagorine trojke (cjelobrojne stranice pravokutnog trokuta – Pitagorinog trokuta). Ako su a, b, c relativno prosti kažemo da je (a, b, c) primitivna Pitagorina trojka. Općenito, sve primitivne Pitagorine trojke dane su izrazima:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2, \quad m > n > 0,$$

gdje su m i n proizvoljni relativno prosti brojevi različite parnosti (jedan paran a drugi neparan). Tako iz vrijednosti parametara

$$(m, n) = (2,1),\ (3,2),\ (4,1),\ (4,3),\ (5,2),\ (5,4),\ (6,1),\ (6,3),\ \ldots$$

dobivamo prvih nekoliko primitivnih primitivnih trojki (članovi unutar svake trojke poredani su u rastućem redosljedu, dakle, (a, b, c) za $a < b$ odnosno (b, a, c) za $a > b$):

$$(3,4,5),\ (5,12,13),\ (8,15,17),\ (7,24,25),\ (20,21,29),\ (9,40,41),\ (12,35,37),\\ (27,36,45),\ \ldots$$

Ostale Pitagorine trojke su višekratnici primitivnih trojki.

6. Brojevne piramide

Ako jednakosti određenog tipa napišemo u nizu, dobivamo vizualni oblik koji podsjeća na piramidu. Evo nekoliko takvih konačnih piramida:

$$\begin{aligned}
1^2 &= 1\\
11^2 &= 121\\
111^2 &= 12321\\
1\,111^2 &= 1234321\\
11\,111^2 &= 123454321\\
111\,111^2 &= 12345654321\\
1\,111\,111^2 &= 1234567654321\\
11\,111\,111^2 &= 123456787654321\\
111\,111\,111^2 &= 12345678987654321
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcccl}
1\cdot 9 & + & 2 & = & 11\\
12\cdot 9 & + & 3 & = & 111\\
123\cdot 9 & + & 4 & = & 1111\\
1234\cdot 9 & + & 5 & = & 11111\\
12345\cdot 9 & + & 6 & = & 111111\\
123456\cdot 9 & + & 7 & = & 1111111\\
1234567\cdot 9 & + & 8 & = & 11111111\\
12345678\cdot 9 & + & 9 & = & 111111111\\
123456789\cdot 9 & + & 10 & = & 1111111111
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl}
1\cdot 8 & + & 1 & = & 9\\
12\cdot 8 & + & 2 & = & 98\\
123\cdot 8 & + & 3 & = & 987\\
1234\cdot 8 & + & 4 & = & 9876\\
12345\cdot 8 & + & 5 & = & 98765\\
123456\cdot 8 & + & 6 & = & 987654\\
1234567\cdot 8 & + & 7 & = & 9876543\\
12345678\cdot 8 & + & 8 & = & 98765432\\
123456789\cdot 8 & + & 9 & = & 987654321
\end{array}$$

te nekoliko beskonačnih:

$$\begin{array}{rcl}
9^2 & = & 81 \\
99^2 & = & 9801 \\
999^2 & = & 998001 \\
9999^2 & = & 99980001 \\
99999^2 & = & 9999800001 \\
999999^2 & = & 999998000001 \\
9999999^2 & = & 99999980000001 \\
\ldots & & \ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccccccccccccc}
1^2 & = & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
2^2 & = & & & & & & & 1 & + & 2 & + & 1 & & & & & & & \\
3^2 & = & & & & & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 2 & + & 1 & & & & & \\
4^2 & = & & & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 & & & \\
5^2 & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 & \\
\ldots & & & & & & & & & & \ldots & & & & & & & & & \\
n^2 & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 & \\
\ldots & & & & & & & & & & \ldots & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
1^3 & = & 1^2 \\
1^3+2^3 & = & (1+2)^2 \\
1^3+2^3+3^3 & = & (1+2+3)^2 \\
1^3+2^3+3^3+4^3 & = & (1+2+3+4)^2 \\
1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 & = & (1+2+3+4+5)^2 \\
1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3 & = & (1+2+3+4+5+6)^2 \\
\ldots & & \ldots \\
1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3 & = & (1+2+3+\ldots+(n-1)+n)^2 \\
\ldots & & \ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
1 & = & 1^3 \\
3+\ 5 & = & 2^3 \\
7+\ 9+11 & = & 3^3 \\
13+15+17+19 & = & 4^3 \\
21+23+25+27+29 & = & 5^3 \\
\ldots\ \ldots & & \ldots \\
[(n-1)n+1]+[(n-1)n+3]+\ldots+[(n-1)n+(2n-1)] & = & n^3 \\
\ldots\ \ldots & & \ldots
\end{array}$$

7. Razgovor dvaju brojeva

Evo na kraju i male priče. Sastali se brojevi $A = 142857$ i $B = 12345679$, te poveli razgovor da se bolje upoznaju.

A: Pozdrav. Ja sam 142857 i osnovni sam period razlomka 1/7,

$$\frac{1}{7} = 0.142857\,142857\,142857\ldots$$

B: Ja sam 12345679 i uživam u prirodnom poretku svojih znamenaka. To što mi nedostaje znamenka 8 nimalo mi ne smeta.

A: Pokazat ću ti što sve mogu. Pomnožiš li me sa $2, 3, 4, 5$ ili 6 dobit ćeš rezultate zapisane mojim znamenkama u cikličkom poretku,

$$\begin{aligned} 2 \cdot 142857 &= 285714 \\ 3 \cdot 142857 &= 428571 \\ 4 \cdot 142857 &= 571428 \\ 5 \cdot 142857 &= 714285 \\ 6 \cdot 142857 &= 857142 \end{aligned} \qquad \begin{array}{ccc} \swarrow & 8 & \nwarrow \\ 5 & & 2 \\ 7 & & 4 \\ \searrow & 1 & \nearrow \end{array}$$

B: A pogledaj što se meni dogodi množenjem sa višekratnicima broja 9.

$$\begin{aligned} 9 \cdot 12345679 &= 111\,111\,111 \\ 18 \cdot 12345679 &= 222\,222\,222 \\ 27 \cdot 12345679 &= 333\,333\,333 \\ 36 \cdot 12345679 &= 444\,444\,444 \\ \dots & \quad \dots \\ 81 \cdot 12345679 &= 999\,999\,999 \end{aligned}$$

A: Lijepo, ali i ja sam tu negdje, jer $7 \cdot 142857 = 999\,999$.

B: A kako ti se sviđa ovo: $78 \cdot 12345679 = 962\,962\,962$?

A: Imam ja i malo kompleksnijih osobina. Na primjer, kako ćeš me pomnožiti sa bilo kojim šesteroznamenkastim brojem? Uzmimo $142857 \cdot 295448$. Prvo podijeliš $295448 : 7 = 42206$ i ostatak 6. Sada količniku pripišeš s desne strane moj umnožak s ostatkom 6 (da je ostatak bio 4, pripisao bi umnožak sa 4), te od tako dobivenog broja oduzmeš količnik. Dakle

$$142857 \cdot 295448 = 42206\,857142 - 42206 = 42206814936 ,$$

i tako za svaki šesteroznamenkasti broj!

B: Komplicirano! Ja sam suviše jednostavan za takve stvari. Ako mi s desne strane postupno odbacuješ znamenke, naći ćeš me u brojevnim piramidama u odjeljku 6.

Literatura

[1] Stari brojevi *Matematički list*, Savez društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije, Beograd, 1969–1974.
[2] C. C. Clawson, *Mathematical mysteries: the beauty and magic of numbers*, Springer, 1996.
[3] S. Devi, *The book of numbers*, Orient Paperbacks, Delhi, 1984.
[4] Z. Jakobović, *Brojevi i brojke*, Kiklos - krug knjige, Zagreb, 2016.

Primljeno u redakciju 04.04.2017; Revidirana verzija 17.04.2017; Dostupno na internetu 24.04.2017.

Ekonomski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, Republika Hrvatska
E-mail address: jmatejas@efzg.hr, marija.kovacic121@gmail.com