MAT-KOL (Banja Luka)
XXIII (2)(2017), 89-134
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1702089D

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5828 (o)

Конструкција правилних конвексних 4-политопа и њихових дводимензиналних пројекција

Ратко Динић

Јована Дучића х-36, Теслић, Босна и Херцеговина
e-mail: *ratkodinic@yahoo.com*

Увод

У овом се раду бавимо конструкцијама вишедимензионалних објеката. Под конструкцијом се уопште подразумева низ правила на основу којих се од задатих елемената добија објекат са задатим својствима. Овде се ради о геометријским конструкцијама које подразумевају одређивање задатог објекта положајем у задатом геометријском простору. Ове конструкције изводимо у реалном Еуклидовом простору $\mathbf{R}^n$ (или $\mathbf{E}^n$); у даљем тексту се овај простор означава и са n-простор. Геометријске конструкције су се по Еуклиду изводиле у 2-простору (равни) и подразумевале су графичко предочавање равних фигура које се изводи шестаром и лењиром. Овај се захтев и данас подразумева, иако конструкција подразумева низ правила. Положај тражене фигуре се успоставља у односу на неке утврђене фигуре у задатом простору. То може бити и координатни систем простора у којем се изводи конструкција. На тај начин се конструкција преноси у подручје аналитичке геометрије. Користићемо и тај метод. У овом раду се говори о конструкцијама фигура у просторима три или четири димензије. Графичко предочавање ових фигура је једино могуће конструкцијама њихових пројекција на раван или 3-простор. Овде ће то, ипак, бити пројекције на раван. За овакав начин предочавања користиће се рачунарски програми и рачунарска графика која се у овом раду показала као врло ефикасан метод. Основни програм је урадио сам аутор.

Основна фигура од које се полази у свим конструкцијама је 4-коцка или у Шлефлијевој ознаци политоп $\{4,3,3\}$. Друга фигура у редоследу конструкција је 4-политоп $\{3,4,3\}$. Овде је тај политоп изведен ауторском конструкцијом која је описана и доказана, и представља централно место у раду. Од овог политопа добијен је Госетовом конструкцијом 4-политоп $\{3,3,5\}$; ова конструкција је, такође, детаљно описана и доказана. Од политопа $\{3,3,5\}$ се инверзијом у односу на сферу

(4-сферу) добија политоп $\{5,3,3\}$. Све конструкције су илустроване детаљним графичким пројекцијама, што читаоцу олакшава прихватање фигура 4-простора.

1. Опште о политопима

У жељи да текст о конструкцијама правилних 4-политопа буде довољно потпун тј. да буде задовољавајуће јасан и читаоцу који се овом приликом први пут среће са политопима простора димензије веће од 3, даћемо неке приступе дефинисању ових објеката.

Дефиниција 1.
1^o Свака тачка је 0-политоп;
2^o Свака дуж је 1-политоп;
3^o Конвексни n-политоп Еуклидовог простора $\mathbf{R}^n$ је унија $N_{n-1} > n$ (n-1)-политопа таквих да је сваки (n-2)-политоп који одређује неки од (n-1)-политопа заједнички за тачно два таква (n-1)-политопа. Коначна конвексна област n-простора ограничена скупом ових N_{n-1} (n-1)-политопа се, такође, зове n-политоп.

Пример 1. Сваки полигон је 2-политоп од $N_{2-1} > 2$ дужи при чему је сваки крај дужи (0-политоп) заједнички за тачно две дужи.

Пример 2. Сваки конвексни полиедар је 3-политоп сачињен од $N_{3-1} > 3$ полигона при чему је свака страница (1-политоп) ових полигона заједничка за тачно два таква полигона.

Пример 3. Сваки 4-политоп је област ограничена са $N_{4-1} > 4$ полиедара при чему је свака страна било ког од ових полиедара заједничка за тачно два таква полиедра.

На сличан начин могу се добити 5-политопи итд. n-политопи. Задате тачке које одређују n-политоп зову се *темена*, задате дужи се зову *ивице*, задати полигони *стране*, задати полиедри *ћелије* итд. Задати k-политопи ($k < n$) се, такође, зову ћелије. Неки аутори и ћелије зову стране, а неки их зову фацети.

Ова дефиниција је индуктивна и аналогна је познатим дефиницијама полигона и полиедра, па је погодна за прихватање појма политопа по аналогији.

Дефиниција 2. Скуп тачака $a^0, a^1, \ldots, a^p$ Еуклидовог простора $\mathbf{R}^n$ је линеарно независан ако из једнакости $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i a^i = 0$ и $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 0$ следи $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$.

Ово је, у ствари, линеарна независност вектора положаја ових тачака у простору $\mathbf{R}^n$.

Дефиниција 3. Нека су $a^0, a^1, \ldots, a^p$ независне тачке простора $\mathbf{R}^n$. Скуп свих тачака $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ које задовољавају услов

$$x=\sum_{i=0}^{p}\lambda_i a^i \;,\; \lambda_i>0\,,\; i=0,1,\cdots,p\,;\; \sum_{i=0}^{p}\lambda_i=1$$

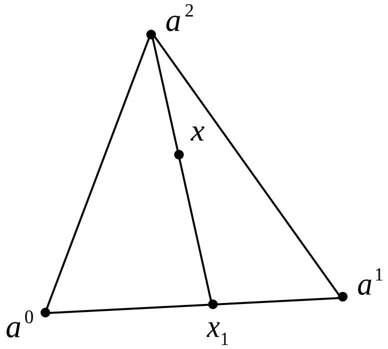
зове се Еуклидов отворени p-симплекс или кратко p-симплекс.

Пример 4. Свака тачка дужи a^0a^1 дели ту дуж у размери $\alpha:(1-\alpha),\; 0<\alpha<1$ тј. важи $(x-a^0):(a^1-x)=\alpha:(1-\alpha)\Rightarrow(x-a^0)(1-\alpha)=\alpha(a^1-x)\Rightarrow$

$$x-\alpha x-a^0+\alpha a^0=\alpha a^1-\alpha x\Rightarrow x=a^0-\alpha a^0+\alpha a^1\Rightarrow x=\alpha a^1+(1-\alpha)a^0,$$

узимајући $\lambda_0=\alpha$ и $\lambda_1=1-\alpha$, следи $\lambda_0+\lambda_1=1$.

Пример 5. За сваку тачку x троугла $a^0a^1a^2$ (2-сомплекса) постоји тачка x_1 дужи a^0a^1 таква да је x тачка дужи a^2x_1 (Сл. 1). На основу примера 4. важи



Сл. 1.

$$x_1=\alpha a^1+(1-\alpha)a^0 \text{ и } x=\beta a^2+(1-\beta)x_1.$$

Из ових једнакости следи

$$x=\beta a^2+(1-\beta)(\alpha a^1+(1-\alpha)a^0)\Rightarrow x=\beta a^2+(1-\beta)\alpha a^1+(1-\beta)(1-\alpha)a^0\Rightarrow$$

$$x=\beta a^2+(\alpha-\alpha\beta)a^1+(1-\alpha-\beta+\alpha\beta)a^0.$$

Стављајући

$$\lambda_0=1-\alpha-\beta+\alpha\beta,\quad \lambda_1=\alpha-\alpha\beta,\; \lambda_2=\beta$$

следи

$$x=\sum_{i=0}^{2}\lambda_i a^i \text{ и } \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1-\alpha-\beta+\alpha\beta+\alpha-\alpha\beta+\beta=1.$$

Дакле, свака тачка троугла $a^0a^1a^2$ задовољава услове дефиниције 2-симплекса. На сличан начин се може показати да тачке тетраедра $a^0a^1a^2a^3$ задовољавају услове дефиниције 3-симплекса.

Ова дефиниција може бити од користи у одређивању неких унутрашњих тачака ћелија правилних политопа значајних за њихову конструкцију.

Ако се у дефиницији 3. услов $\lambda_i>0$ замени са $\lambda_i\geq 0$ добије се *затворени* симплекс.

Теорема 1. Отворени и затворени симплекси су конвексни подскупови простора $\mathbf{R}^n$.

Доказ . Нека су $a=\sum_{i=0}^{p}\lambda_i a^i$, $\sum_{i=0}^{p}\lambda_i=1$ и $b=\sum_{i=0}^{p}\mu_i a^i$, $\sum_{i=0}^{p}\mu_i=1$ две произвољне тачке p-симплекса. Произвољна тачка $x\neq a, x\neq b$ дужи ab, као што је речено, има облик $x=\alpha b+(1-\alpha)a$, $0<\alpha<1$. Из ових претпоставки следи $x=\sum_{i=0}^{p}(\alpha\mu_i+(1-\alpha)\lambda_i)a^i$. Како је $1-\alpha>0$, то је онда $\alpha\mu_i+(1-\alpha)\lambda_i>0$. Лако се тада показује да уз наведене претпоставке важи

$$\sum_{i=0}^{p}(\alpha\mu_i+(1-\alpha)\lambda_i)=\alpha\sum_{i=0}^{p}\mu_i+(1-\alpha)\sum_{i=0}^{p}\lambda_i=\alpha+(1-\alpha)=1.$$

Дакле, тачка x припада p-симплексу. □

За доказ конвексности затвореног симплекса треба дефинисати конвексни омотач скупа, а затим доказати да је затворени симплекс конвексни омотач својих темена. Како се у овом тексту не бавимо општом теоријом политопа, то ћемо конвексност политопа узимати интуитивно уз извесна образложења. (Детаљније о конвексности видети у [2]).

Дефиниција 4. Коначан скуп $K=\{s_p\}$ отворених симплекса који испуњавају услов: два различита симплекса немају заједничких тачака, зове се *симплицијални геометријски комплекс.* Ако за сваки симплекс који припада комплексу важи да и свака његова ћелија припада комплексу, онда је комплекс *потпун*.

Дефиниција 5. Унија свих симплекса једног комплекса зове се *тело* комплекса. Ако је комплекс потпун, онда се његово тело зове *политоп* (полиедар).

Овакав приступ дефинисању политопа заснован је на координатном систему простора $\mathbf{R}^n$, па је као такав аналитички.

Ова дефиниција политопа није погодна за разматрање политопа у овом тексту, па се неће користити (наведена је због проширења појма симплекса). Ипак, симплекси овако дефинисани биће од користи.

Следећа дефиниција политопа је, такође, аналитичка и користи се у многим математичким теоријама (на пример, у Линеарном програмирању).

Дефиниција 6. Еуклидов политоп Π_n је ограничен скуп тачака чије Декартове координате задовољавају $N_{n-1}>n$ линеарних неједначина

$$b_{k1}x_1+b_{k2}x_2+\cdots+b_{kn}x_n\leq b_{k0}\quad (k=1,2,\cdots,N_{n-1})$$

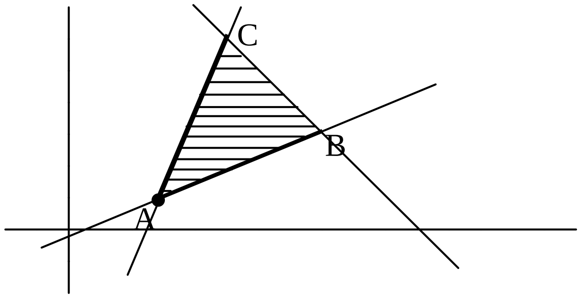
чији скуп решења није празан и да међу неједначинама система нема еквивалентних.

Ако се једна неједначина система замени одговарајућом једначином (која је тада једначина хиперравни или $(n-1)$-простора), а остале неједначине система остану непромењене добије се $(n-1)$-политоп Π_{n-1} за који кажемо да је *ћелија* политопа Π_n. Ако се две неједначине замене одговарајућим је-дначинама добије се $(n-2)$-политоп Π_{n-2} заједнички за тачно два политопа Π_{n-1} којима је то једина заједничка ћелија. Отуд је ова дефиниција еквивалентна дефиницији 1.

Пример 6. Систем неједначина

$$2x-5y\le 1$$
$$-5x+2y\le -13$$
$$x+y\le 11$$

одређује троугао ABC који је 2-политоп (Сл. 2.).



Сл. 2.

Ако се прва неједначина замени једначином $2x-5y=1$ добије се дуж AB која је 1-политоп и ћелија (страница) троугла ABC. Ако се и друга неједначина замени једначином $-5x+2y=-13$ добије се тачка A која је 0-политоп и заједничка је за два 1-политопа тј. дужи AB и AC.

2. Правилност политопа

Пре него што наведемо дефиницију правилног политопа, подсетимо се дефиниција правилног полигона и правилног полиедра.

Правилан полигон се дефинише као полигон чије су све странице једнаке и сви углови једнаки. Правилан полиедар се дефинише као полиедар чије су све стране подударни правилни полигони и сви рогљеви правилни или полиедар чије су све стране правилни полигони са истим бројем страница, а сви рогљеви имају исти број ивичних углова, тада подударност страна следи из дефиниције, а правилност рогљева из правилности страна.

У разматрању особина правилних полиедара рогљеви нису подесни. (Видети у [3] доказ теореме 5.). У случају политопа представљу још неподесније фигуре. Уместо рогљева биће погодније увести темену фигуру.

Дефиниција 7. Ако средишта свих ивица које полазе из једног темена политопа Π_n леже у једној хиперравни, тада су ова средишта темена $(n-1)$- политопа који се зове *темена фигура.*

На пример, ако има n таквих ивица (темена фигура 3-коцке је троугао, јер је $n=3$), или ако сва темена политопа леже на сфери и све ивице су једнаке.

Дефиниција 8. Политоп Π_n је правилан ако и само ако су све његове ћелије правилне и код сваког темена је правилна темена фигура.

Из ове дефиниције следи да су све ћелије подударне и све темене фигуре подударне. (Видети [5], §2·1).

Темене фигуре су погодне и за означавање правилних политопа ознакама које се зову Шлефлијеве ознаке и које ћемо користити у овом раду.

За правилан полигон који има p страница уводи се ознака$\{p\}$. За правилан полиедар ознака је $\{p,q\}$, где је $\{p\}$ страна, а $\{q\}$ темена фигура. Код ових политопа број q означава број страна које окружују једно теме тј. те стране одређују рогаљ са q ивица; у том случају темена темене фигуре леже на ивицама овог рогља. Тако је на пример $\{3,3\}$ правилан тетраедар, $\{4,3\}$ коцка, $\{3,4\}$ правилни октаедар, $\{3,5\}$ правилни икосаедар, $\{5,3\}$ правилни додекаедар.

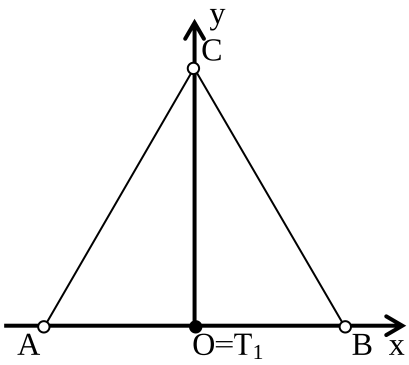
За правилне 4-политопе ознаке се добијају додавањем још једног броја r тако да је за њих ознака $\{p,q,r\}$, при чему је $\{p,q\}$ ћелија 3-политоп, $\{q,r\}$ темена фигура која је такође 3-политоп.

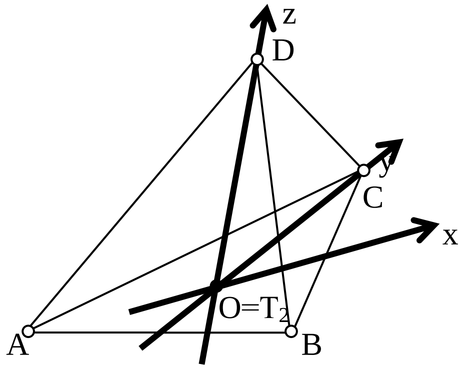
3. Правилни политопи α_n, β_n, γ_n

Најједноставнији правилни политопи који постоје у свим n-просторима су: правилни симплекси, правилни крст политопи и хиперкоцке.

На основу дефиниције 3. симплекс се може схватити као унија свих дужи n-простора којима је један крај било која утврђена тачка $n-$просто ра која не припада хиперравни $(n-1)-$симплекса, а други било која тачка тог $(n-1)-$симплекса. Унија дужи које спајају задату тачку са тачкама $(n-2)-$ћелије тог $(n-1)-$симплекса је $(n-1)-$ћелија $n-$симплекса итд. Дужи које спајају задату тачку са теменима $(n-1)$-симплекса су ивице $n-$симплекса. Ако су све ивице симплекса једнаке, онда је симплекс правилан.

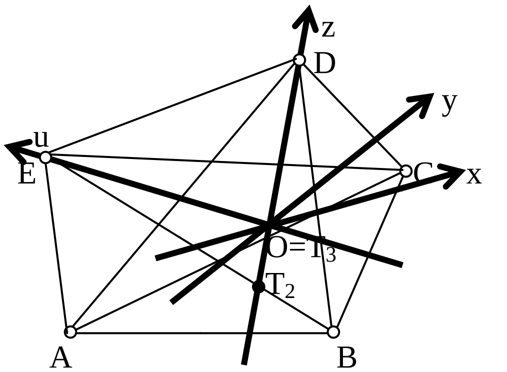
Правилан $n-$симплекс се може конструисати на различите начине. Један начин би био да се правилни $(n-1)-$симплекс постави тежиштем (центром) у координатни почетак тако да лежи у хиперравни одређеној са $n-1$ вектора система, тада се у правцу $n-$тог вектора система (у једном или другом смеру) може одредити тачка једнако удаљена од свих темена $(n-1)-$симплекса. Спајањем те тачке са тачкама $(n-1)-$симплекса доби-ја се $n-$симплекс. (Видети Сл. 3_1, 3_2, 3_3).





Сл. 3_1
1-симолекс AB и 2-симплекс ABC

Сл. 3_2
2-симплекс ABC и 3-симплекс ABCD



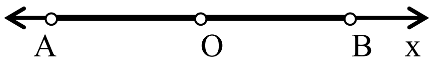
Сл.3_3: 3-симплекс ABCD и 4-симплекс ABCD

Правилни симплекси се обично означавају са α_n. Тако је α_0 тачка, α_1 дуж, $\alpha_2 = \{3\}$, $\alpha_3 = \{3{,}3\}$, $\alpha_4 = \{3{,}3{,}3\}$ итд.

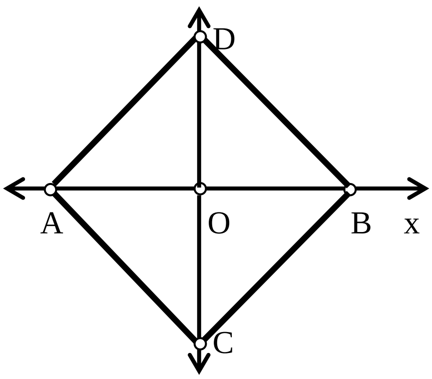
Дефиниција 9. Нека је Π_{n-1} политоп хиперравни $n-$простора и нека има „препознатљив" центар у координатном систему тог $n-$простора. Нека су, даље, задате две тачке у различитим смеровима $n-$тог вектора система на једнаком растојању од координатног почетка система. Спајањем тих тачака са тачкама политопа Π_{n-1} добија се политоп $n-$простора који се зове *дипирамида.* Политоп Π_{n-1} се зове *основа* дипирамиде. Задате тачке се зову *врхови* дипирамиде.

Дефиниција 10. Ако су темена политопа Π_n постављена по два на свакој оси кординатног система $n-$простора у различитим смеровима и на једнаком растојању од координатног почетка, онда се такав политоп зове правилан *крст* политоп и обележава се са β_n.

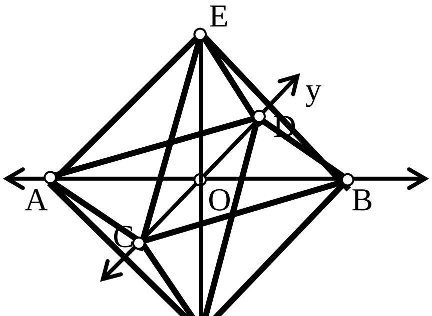
Јасно је да је ивица политопа β_n једнака растојању темена од координатног почетка помноженом са $\sqrt{2}$ и да има центар у координатном почетку. На основу дефиниција 9. и 10. β_n је дипирамида чија је основа β_{n-1}. Овај се



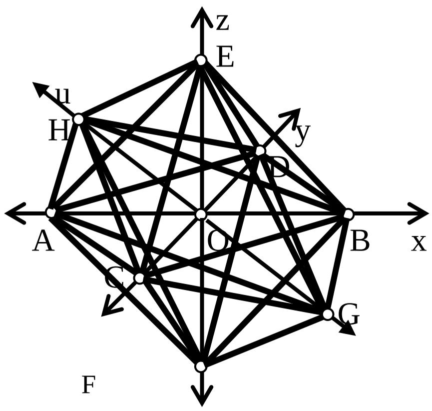
Сл.4_1
β_1 дуж AB



Сл.4_2 : β_2 квадрат ACBD



Сл.4_3
β_3 октаедар ACBDEF



Сл.4_4
политоп β_4 ACBDEFGH

закључак може користити у конструкцији β_n политопа. Тако је β_1 дуж, β_2 дипрамида чија је основа дуж, а то је квадрат, β_3 је дипирамида чија је основа квадрат, а то је октаедар $\{3,4\}$, β_4 је дипирамида чија је основа октаедар, итд. (Сл. 4_1, 4_2, 4_3, 4_4).

На основу претходног се може закључити да за политоп β_n ивице $\sqrt{2}$, његова темена представљају пермутације са понављањем чланова n-торки $(0,0,\cdots,1)$ и $(0,0,\cdots,-1)$ у координатном систему $n-$простора. Број темена се из овог закључка може лако одредити

$$\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}+\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}=2\cdot\frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!}=2n\,.$$

На пример β_3 је октаедар чија су темена $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(-1,0,0),\quad(0,-1,0)$, $(0,0,-1)$, а има их 6. β_4 има 8 темена и њихове координате су

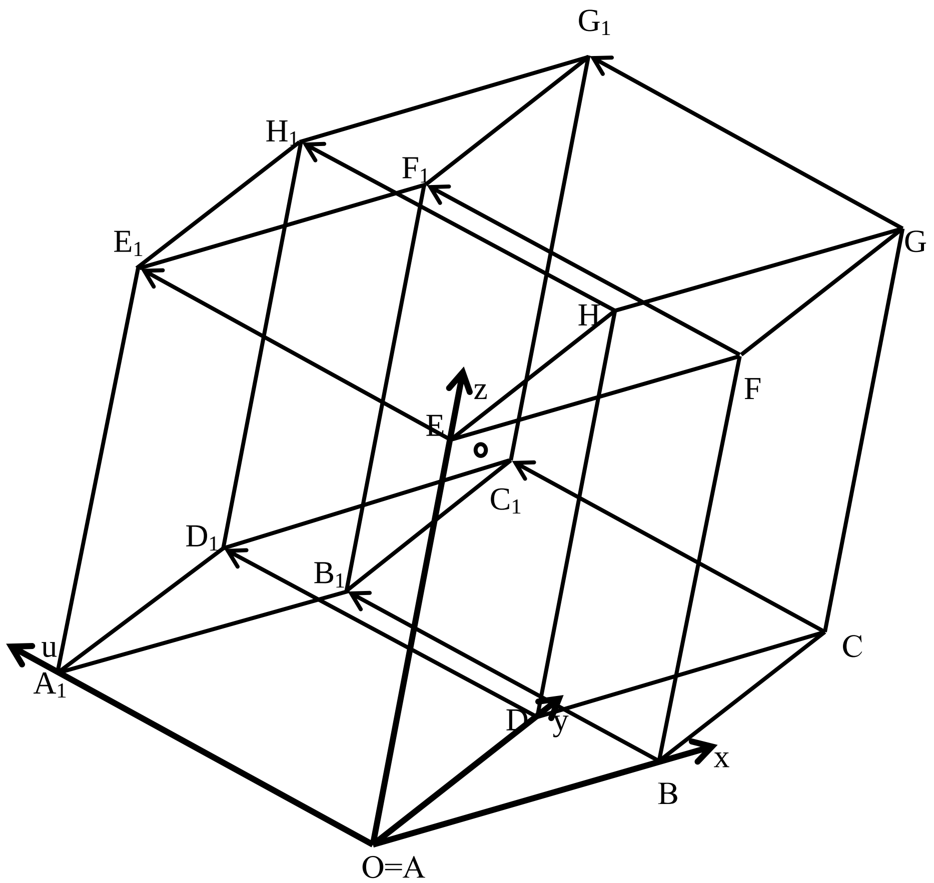
$$(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(-1,0,0,0),(0,-1,0,0),(0,0,-1,0),(0,0,0,-1)\,.$$

Број темена, ивица и осталих ћелија биће од значаја за остале политопе у 4-простору којима се бавимо, па ћемо ове бројеве одредити за β_3 и β_4. β_3 је правилни отаедар који има 6 темена, 12 ивица и 8 троугаоних страна. Ово се врло лако утврђује. β_4, на основу претходног, има 8 темена. Једно теме 4-дипирамиде се спаја са 6 темена основе β_3, па таквих ивица има 6+6=12. Поред ових ивице од β_4 су и 12 ивица од β_3; укупно 24 ивице. Свака ивица основе дипирамиде са једним њеним врхом одређује троугаону страну, а како таквих ивица има 12, то је онда укупан број троугаоних страна 24. Овом броју треба додати и 8 страна основе, па је укупно 32 троугаоне стране. Свака страна основе дипирамиде одређује са врхом тетраедарску ћелију; укупно је онда 2·8 = 16 тетраедарских ћелија. Уобичајене ознаке за темена, ивице, ћелије политопа су $N_0,N_1,N_2,N_3,\cdots$. Ове ознаке ћемо и убудуће користити. Дакле, за β_4 је $N_0=8,N_1=24,N_2=32,N_3=16.$ Користићемо и Ојлерову формулу примењену на $n-$поитопе, коју ћемо сматрати опште-познатим тврђењем $N_0-N_1+N_2-\cdots+(-1)^{n-1}=1-(-1)^n$. За 4-политопе је тада $N_0-N_1+N_2-N_3=0$. За β_4 је лако утврдити да важи 8-24+32-16 = 0.

За наш проблем најзначајнија фигура је хиперкоцка или 4-коцка или γ_4, па ћемо навести једну њену конструкцију која ће убудуће бити најпогоднија.

Дефиниција 11. 1^0 Дуж чији су крајеви тачке $(0,0,\cdots,0)$ и $(1,0,\cdots,0)$ је јединична 1-коцка у координатном систему $n-$простора. 2^0 Транслацијом $(n-1)-$ коцке у позитивном смеру $n-$тог вектора система дужине 1 добија се још једна $(n-1)-$коцка. Спајањем свих одговарајућих тачака ових двеју коцака дужима добија се $n-$коцка или γ_n.

Ова дефиниција је индуктивна тј. транслацијом дужи се добија квадрат или 2-коцка, транслацијом квадрата се добија 3-коцка (обична коцка), транслацијом 3-коцке се добија 4-коцка итд. (Сл.5.) 4-коцка или γ_4 има Шлефлијеву ознаку $\{4,3,3\}$. Из дефиниције, такође индукцијом, следи да су координате темена јединичне $n-$ коцке све варијације са понављањем n-те класе од елемената 0 и 1. Број темена једнак је броју ових варијација тј. 2^n.



Сл.5

Размотримо посебно ћелије 4-коцке. На основу претходног 4-коцка има $2^4 = 16$ темена. Узимајући општепознатим тврђење да 3-коцка има 8 темена, 12 ивица и 6 страна, можемо одредити бројеве ћелија 4-коцке. Како 3-коцка има 8 темена, то онда 4-коцка има 8 ивица које спајају одговарајућа темена ове 3-коцке и њене слике добијене наведеном транслацијом и како 3-коцка има 12 ивица, то је онда укупан број ивица 4-коцке 8+12+12 = 32. Сваке две одговарајуће стране ових двеју 3-коцака одређују 4 квадратне стране 4-коцке, а како има 6 оваквих парова, то би онда требало да оваквих страна 4-коцке има $6\cdot 4$. Међутим, свака ивица 3-коцке је заједничка за две стране, па је и свака од ових квадратних страна 4-коцке урачуната два пута, дакле, оваквих страна има два пута мање тј. 12. Свака од 3-коцака има по 6 страна, па је онда укупан број квадратних страна (2-ћелија) 4-коцке 12+6+6 = 24.

Сваке две одговарајуће стране полазне 3-коцке и њене слике одређују једну 3-коцку и како оваквих парова има 6, то онда уз полазну 3-коцку и њену слику 4-коцка има 6+2 = 8 3-коцака (3-ћелија). Према томе, $N_0 = 16$, $N_1 = 32$, $N_2 = 24$, $N_3 = 8$. Лако се проверава да је и у овом случају задовољена Ој-лерова формула: 16-32+24-8 = 0.

4. Инверзија правилних политопа

Из геометрије 2-простора (равни) познато је да се трансформација инверзија у односу на круг $K(O,r)$ дефинише као пресликавање које свакој тачки $P \neq O$ равни круга $K(O,r)$ придружује тачку P_1 тако да тачке O, P, P_1 леже на једној правој и да важи $OP \cdot OP_1 = r^2$. Права кроз P нормална на OP се зове полара пола P_1 и обрнуто права кроз P_1 нормална на OP је по-лара пола P. На сличан начин се дефинише инверзија у односу на сферу (хиперсферу), само што треба појам равни заменити $n-$простором. У том случају полара је хиперраван.

У геометрији правилних политопа се обично посматрају три сфере (хиперсфере): уписана, описана, и сфера средина. Сфера средина је сфера која садржи средишта ивица политопа.

Ако се у средиштима ивица правилног политопа конструишу тангенте на сферу (хиперсферу) средина нормалне на ивице тог политопа, онда се те тангенте секу у тачкама које су темена другог правилног политопа за који кажемо да је *инверзан* првом. Темена ових политопа нису инверзне тачке већ су темена једног полови хиперравни $(n-1)-$ћелија другог и обрнуто. Инверзне тачке су темена једног и одговарајући центри $(n-1)-$сфера описаних око $(n-1)-$ћелија другог. Према томе, политоп одређен средиштима $(n-1)-$ћелија једног правилног политопа је њему инверзан правилни политоп. Оба закључка биће коришћена у овом раду.

Инверзни политопи имају обрнут редослед ћелија и темених фигура тј. за $\{p,q,r\}$ инверзан је $\{r,q,p\}$. На основу Шлефлијевих ознака правилних политопа чије смо конструкције до сада описали $\alpha_4 = \{3,3,3\}$, $\beta_4 = \{3,3,4\}$, $\gamma_4 = \{4,3,3\}$ закључујемо да су β_4 и γ_4 инверзни политопи, док је α_4 сам себи инверзан, у ствари једном α_4 инверзан је други, такође, α_4.

Поред ових правилних 4-политопа постоје још три правилна конвексна 4-политопа: $\{3,4,3\}$, $\{3,3,5\}$ и $\{5,3,3\}$. Такође, постоји још десет правилних 4-политопа који нису конвексни. То су звезда политопи. Ми се њима овом приликом нећемо бавити.

5. О појму конструкције

Под конструкцијом се у општем случају подразумева низ правила по којима се од задатих објеката добија тражени објекат са задатим особинама. Овај општи приступ ћемо сузити и прилагодити политопима.

Дефиниција 12. Под конструкцијом политопа подразумева се одређивање положаја његових темена и ивица у минималном $n-$простору којем припада, а на основу задатих елемената.

Под положајем темена подразумева се везаност за неки утврђени објекат простора. На пример за Декартов правоугли координатни систем тог простора. Ми ћемо конструкције поменутих политопа изводити (неке смо већ изводили) у Декартовом координатном систему. Ивице се могу одредити на основу њихових дужина у односу на задату јединичну дуж водећи рачу-на како се заснива растојање у одговарајућем $n-$ простору.

Дефиниција 13. Под конструкцијом пројекције задатог политопа подразумева се одређивање продора свих правих које су у одређеном међусобном односу и које садрже темена тог политопа кроз неки одређени потпростор (хиперраван) $n-$ простора у којем се тај политоп налази.

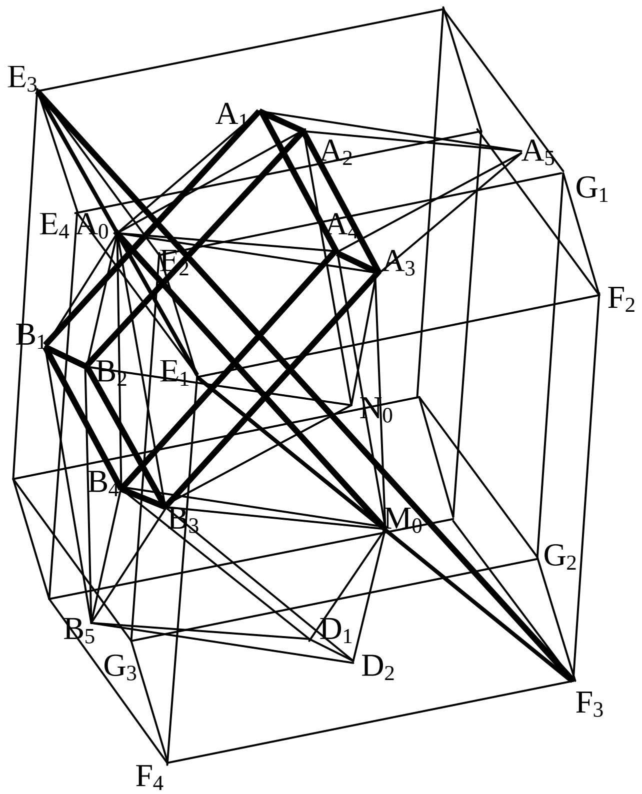
Како пројекције ивица неће имати исте дужине са ивицама оригинала, то ће дужи пројекције које представљају ивице бити одређене према теме-нима оригинала подразумевајући да се пројекцијом успоставља 1-1 пресликавање. Ми ћемо користити паралелну пројекцију која испуњава овај услов. Било би добро кад би то пресликавање преводило различита темена у различите тачке. Ово се врло тешко постиже; ипак могуће је ако се пројe-кцијска хиперраван погодно изабере у односу на поројекцијски зрак. За конвексне 3-политопе (полиедре) може се доказати тврђење: Постоји раван на коју се може пројектовати ковексан полиедар тако да се два или више темена не пројектују у једну тачку и да се ниједна страна не пројектује у дуж. Претпоставићемо да овакво тврђење важи и за политопе $n-$ простора при чему је $n > 3$. Из ових напомена је јасно да се пројекције сложенијих политопа тешко могу извести класичним техничким средствима. Ове захтеве је у неким случајевима могуће испунити рачунарским програмима о којима ћемо говорити у овом тексту.

6. Конструкција политопа {3,4,3}

Ако неки политоп има „препознатљив“ центар (центар описане или центар уписане сфере или сфере средина), онда ћемо убудуће ту тачку звати центар или средиште политопа.

Теорема 2. (основна) Средишта 2-ћелија (убудуће квадрата) 4-коцке су темена правилног политопа $\{3,4,3\}$.

Доказ. Нека је задата 4-коцка $E_1E_2E_3E_4F_2F_3\cdots$ (Сл. 6). Како су четири ивице 4-коцке које имају заједничко теме међусобно нормалне, то су онда и равни свих квадрата одређених са по две од ових ивица међусобно нормалне. Таквих квадрата тј. квадрата са заједничким теменом има $\binom{4}{2} = 6$. Уочимо такве квадрате са заједничким теменом E_1. Наспрамна темена заједничком темену у два таква квадрата којима је заједничко теме је дина заједничка тачка су дијаметрално супротне тачке ове 4-коцке.



Сл. 6.

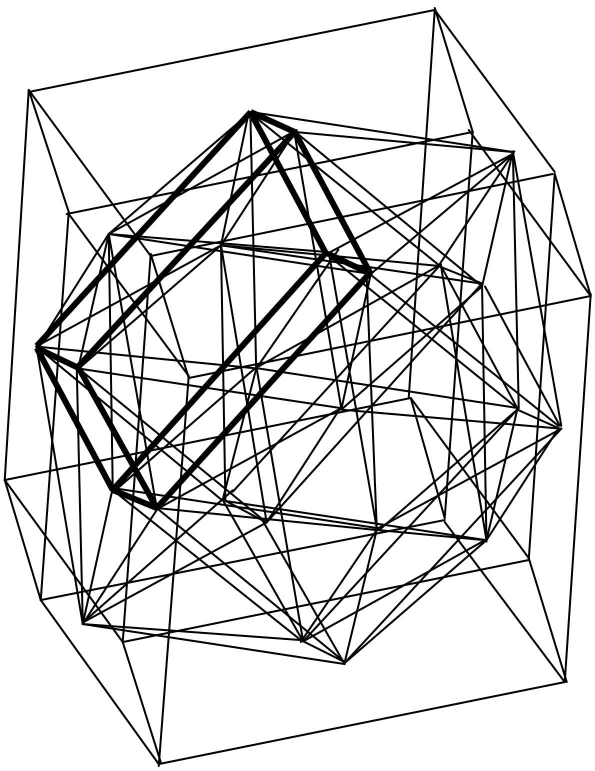
Нека су то квадрати $E_1E_2E_3E_4$ и $E_1F_2F_3F_4$; наспрамна темена темену E_1 у овим квадратима су редом тачке E_3иF_3. Дуж E_3F_3 је главна дијагонала 4-коцке и пречник 4-сфере описане око 4-коцке. Средишта квадрата $E_1E_2E_3E_4$ и $E_1F_2F_3F_4$ тачке A_0 и M_0 одређују средњу линију троугла $E_3E_1F_3$, па је дуж A_0M_0 једнака половини дужи E_3F_3. Како је полупречник 4-сфере описане око 4-коцке једнак њеној ивици, то је онда дуж A_0M_0 једнака ивици коцке.

Познато је, такође, да је дијагонала правилног октаедра уписаног у 3-коцку једнака ивици коцке. Према томе, тачке A_0 и M_0 могу бити темена правилног октаедра уписаног у 3-коцку која припада овој 4-коцки. Остала четири квадрата који садрже теме E_1 имају по једну заједничку страницу са сваким од ова два квадрата. Растојања средишта два квадрата 3-коцке који имају заједничку страницу једнако је половини њихове дијагонале. Како је и ивица правилног октаедра уписаног у 3-коцку једнака половини дијагонале стране, то су онда средишта ова четири квадрата темена правилног октаедра. То је на Сл. 6. октаедар $A_0A_2A_3M_0B_3B_4$. Дакле, ако постоји правилан 4-политоп коме су ове тачке темена, онда његова 3-ћелија мора бити правилан октаедар. Поступак можемо наставити даље окружујући квадрат $E_1E_2E_3E_4$ квадратима који са њим имају само заједничко теме. Уочимо такав квадрат $E_2G_3G_2G_1$. Средиште тога квадрата тачка N_0 је теме другог октаедра. На исти начин као у претходном случају добијају се још четири темена овог октаедра A_2, A_3, B_3 и B_2, па је и правилни октаедар $A_0A_2A_3N_0B_3B_2$ могућа 3-ћелија правилног 4-политопа.

Из ове конструкције је јасно да ова два октаедра имају заједничку троугаону страну $A_0A_3B_3$. Ако би постојао још један октаедар који садржи страну $A_0A_3B_3$, онда би његово теме наспрамно темену A_0 морало да припада квадрату који са квадратом $E_1E_2E_3E_4$ има само заједничко теме E_2, што је немогуће јер према претходном постоји само један такав квадрат.

Према томе, заједничка страна два октаедра $A_0A_2A_3M_0B_3B_4$ и $A_0A_2A_3N_0B_3B_2$ припада само њима. Настављајући овај поступак за темена E_3 и E_4 добијају се још два октаедра са заједничком страном.

Квадрат $E_1E_2E_3E_4$ је заједничка страна двеју 3-коцака. Наспрамни квадрати ових коцака квадрату $E_1E_2E_3E_4$ имају средишта на растојању од A_0 једнаком ивици коцке; на Сл. 6. то су тачке B_5 и A_5. Средишта осталих страна ове две коцке према познатом тврђењу из геометрије 3-простора представљају темена два правилна октаедра. То су октаедри $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_0A_1A_2A_3A_4A_5$ (Сл. 6.). Из конструкције је јасно да октаедри $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ и $A_0A_2A_3N_0B_3B_2$ имају заједничку страну $A_0A_2A_3$,а октаедри $A_0B_1B_2B_3B_4B_5$ и $A_0A_4A_3M_0B_3B_4$ имају заједничку страну $A_0B_3B_4$. Такође, октаедри $A_0A_2A_3N_0B_3B_2$ и $A_0B_1B_2B_3B_4B_5$ имају заједничку страну $A_0B_3B_2$, а октаедри $A_0A_4A_3M_0B_3B_4$ и $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ имају заједничку страну $A_0A_3A_4$. На овај начин је теме A_0 окружено са шест правилних октаедара тако да је свака страна ових октаедара којој је теме A_0 заједничка за тачно два таква октаедра. Настављајући овај поступак за средишта осталих квадрата, а искључујући већ добијене октаедре, добија се скуп октаедара такав да је страна сваког октаедра заједничка за тачно два од њих, па такав скуп октаедара огра-ничава један део 4-простора.

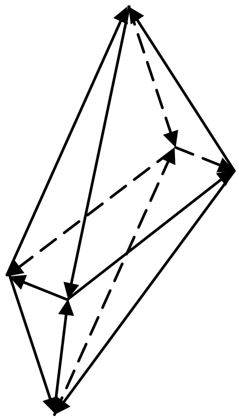


Сл. 7.: $\{3,4,3\}$ уписан у 4-коцку $\{4,3,3\}$

Дакле, овако добијени елементи представљају политоп чије су 3-ћелије правилни октаедри, а 2-ћелије једнакостранични троуглови. Како је темена фигура правилног октаедра квадрат, и како шест повезаних октаедара окружују теме A_0, то су онда и странице темених фигура повезане тако да је страница сваког квадрата заједничка за тачно два квадрата, а тако добијена фигура може бити само 3-коцка. На Сл. 6 то је коцка $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$. Према томе, ћелије добијеног 4-политопа су правилни октаедри, а темене фигуре 3-коцке, па је на основу дефиниције 8. политоп правилан. На основу Шлефлијеве ознаке за ћелију $\{3,4\}$и за темену фигуру $\{4,3\}$ следи Шлефлијева ознака за овај политоп $\{3,4,3\}$. Крај доказа. □

Како 4-коцка има 24 2-ћелије (квадрата), то онда $\{3,4,3\}$ има 24 темена. Свако теме је заједничко за 6 3-ћелија (октаедара), то би онда ћелија било 24·6, а како 6 таквих тачака одређују октаедар, то је онда укупан број 3-ћелија 24. Како сваки октаедар има 8 страна, а укупан број ћелија политопа $\{3,4,3\}$ је 24, то би онда укупан број страна био 8·24, међутим, свака страна је заједничка за тачно две ћелије, то је онда број страна два пута мањи, па је укупан број 2-ћелија (страна) једнак 96. Како код сваког темена политопа $\{3,4,3\}$ постоје два октаедра којима је то теме једина заједничка тачка, а сваки од њих има 4 ивице којима је то заједнички крај, а остали октаедри повезују ова два тј. одређени су са две ивице једног и две ивице другог, па међу њима нема нових ивица. Према томе, за свако теме постоји 8 ивица којима је то један крај. Свака ивица повезује два темена, па је укупан број ивица $\frac{8\cdot 24}{2}=96$. Коначно, $N_0=24$, $N_1=96$, $N_2=96$, $N_3=24$. Лако се проверава да је Ојлерова формула задовољена: 24-96+96-24 = 0.

7. Повезано индексирање и одстрањивање делова политопа

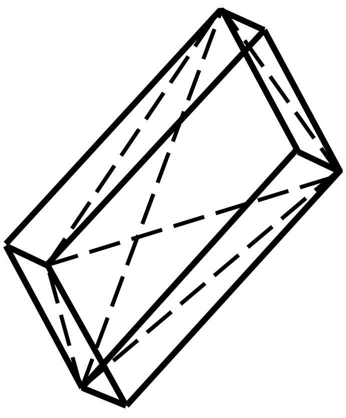


Сл. 8.

Ивице октаедра код једног темена се могу усмерити од тог темена или према том темену. Ако су ивице код сваког темена оријентисане тако да од две ивице које припадају истој страни једна буде оријентисана од темена, а друга према темену, а тада су наспрамне ивице, које су међусобно нормалне, оријентисане обе или од темена или према темену, онда се таква оријентација ивица октаедра зове *повезано индексирање* октаедра. (Сл. 7.). Свака страна октаедра је тада оријентисана или позитивно или негативно, гле-дано из спољашности октаедра на видљиве стране.

Политоп $\{3,4,3\}$ има 24 ћелије и све су октаедри. Свака страна октаедра је заједничка за тачно два октаедра. Ако смо ивице једног октаедра оријен-тисали на преткодни начин, онда заједничка страна имплицира оријентисање ивица другог задржавајући оријентацију првог. Заједничка страна је за један октаедар позитивно, а за други негативно оријентисана. Овакав поступак оријентисања се може наставити до последњег од 24 октаедара политопа $\{3,4,3\}$. Овакво оријентисање ивица политопа $\{3,4,3\}$ зове се *повезано индексирање* политопа $\{3,4,3\}$.

У добијању полуправилних полиедара се често користе одстрањивања делова правилних полиедара. Та одстрањивања могу бити изведена на више начина. (Видети [3], стр. 42). Код политопа се та одстрањивања могу извести на сличан начин. Један начин таквог одстрањивања делова правилног политопа је да се одстрани свака пирамида чија је основа темена фигура, а врх одговарајуће теме политопа; тај поступак се зове *зарубљивање.* Зарубљивањем политопа $\{3,4,3\}$ добија се политоп у ознаци $\left\{\begin{matrix}3\\4,3\end{matrix}\right\}$ чије су ћелије 24 коцке (темене фигуре од $\{3,4,3\}$) и 24 кубоктаедара (остаци од октаедара). За наш проблем ова фигура неће бити од посебног значаја, већ једна 4-фигура која настаје деформацијом темене фигуре од $\{3,4,3\}$. Темена фигура политопа $\{3,4,3\}$ се може са шест дијагонала својих страна разложити на је-дан правилни тетраедар чије су ивице те дијагонале и на четири пирамиде чије су основе стране тетраедра, а врх основи најближе теме коцке. (Сл.8.). На слици су ивице тетраедра представљене испрекиданом линијом.



Сл. 9.

8. „Деформисани“ квадрат и тело остатка октаедра

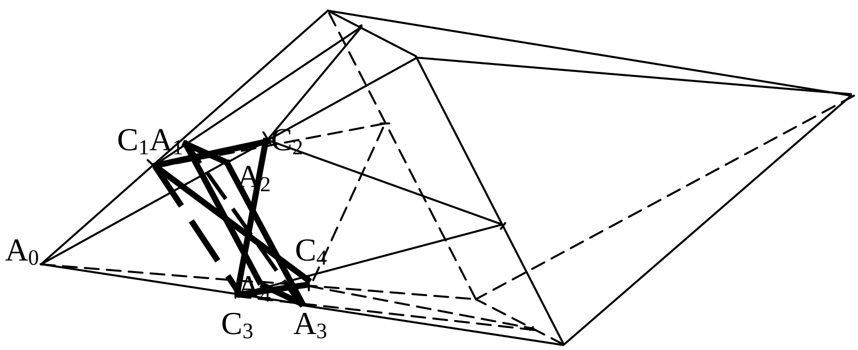
Дефиниција 14. Ако се ивице правилног октаедра поделе у размери $a:b$ у смеру добијеном повезаним индексирањем, онда подеоне тачке код сваког темена октаедра одређују замену за темену фигуру коју ћемо звати *„деформисани“*

квадрат. Дужи које спајају несуседна темена „деформисаног“ квадрата зваћемо дијагонале.

Напомена: Ако је $a:b=1$, онда је то темена фигура октаедра. Деформација се може објаснити на следећи начин. Квадрат се развуче у ромб, а затим се раван квадрата савије по једној дијагонали. На тај начин се добије просторни полигон. Убудуће ћемо реч деформисан писати без наводника.

Теорема 3. Ако се у дефиницији 14. изабере размера $\frac{\sqrt{5}+1}{2}:1$ (златни пресек), онда се добије деформисани квадрат чија је једна дијагонала једнака страници.

Доказ. Нека је ивица правилног октаедра једнака 1. Ако се ова јединична дуж подели у размери $\frac{\sqrt{5}+1}{2}:1$, онда је већи део $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, а мањи $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Страница a_1 деформисаног квадрата припада страни октаедра и страница је троугла чије су две странице $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, а угао који заклапају је угао стране октаедра тј. 60^0.



Сл. 10$_1$.

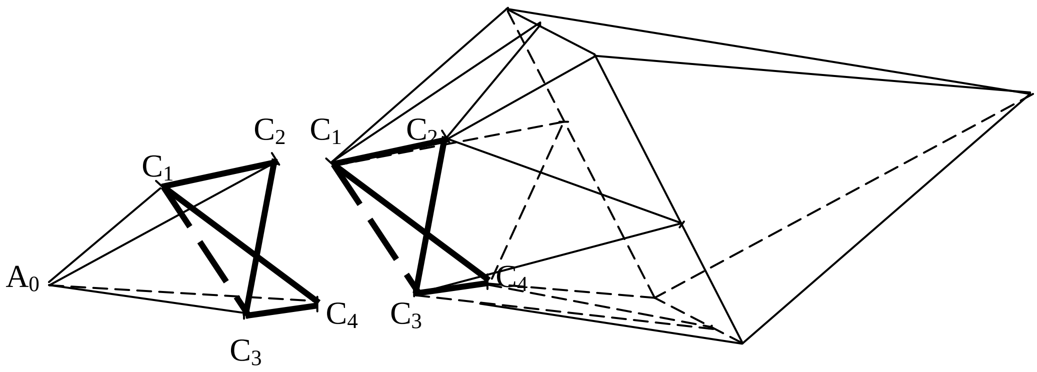
На Сл. 10$_1$. то је на пример троугао $A_0C_2C_3$. Косинусном теоремом се добија:

$$a_1^2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\cos 60^0=\frac{28-12\sqrt{5}}{4}.$$

$$a_1=\sqrt{\frac{14-6\sqrt{5}}{4}\cdot 2}=\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Мања дијагонала деформисаног квадрата је хипотенуза правоуглог троугла (на Сл. 10$_1$ и 10$_2$ то је троугао $A_0C_1C_2$), чије су катете $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, јер су наспрамне ивице нормалне, па је

$$d_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{2} = \left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

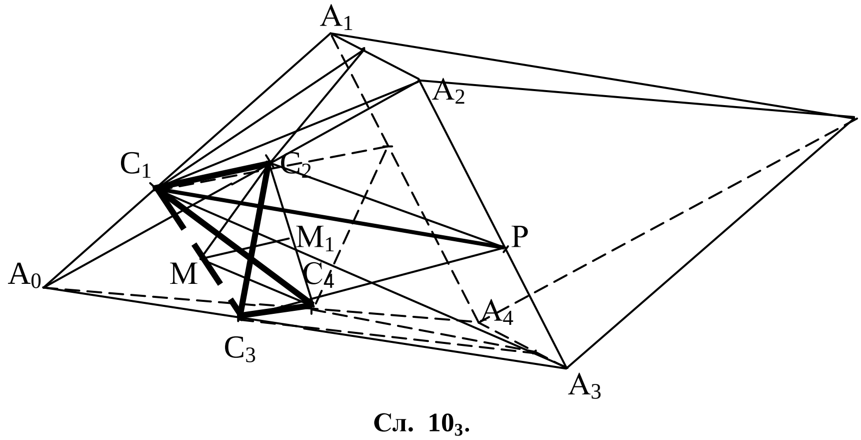


Сл. 10_2.

Дакле, $a_1 = d_1$. Крај доказа. □

Теорема 4. Ако се од правилног октаедра одстране све пирамиде чије су основе једнакостранични троуглови који чине деформисани квадрат, од октаедра остаје тело које је правилни икосаедар.

Доказ. Ако се од правилног октаедра одстране све пирамиде чије су основе јенакостранични троуглови који чине деформисани квадрат, а то су троуглови чије су две странице странице деформисаног квадрата, а трећа мања дијагонала, онда је тело остатка октаедра ограничено и тим троугловима. На Сл. 9_1 и 9_2 то су код темена A_0 пирамиде $A_0C_1C_2C_3$ и $A_0C_1C_4C_3$. Како октаедар има шест темена, то ће од октаедра бити одстрањено 12 таквих пирамида, а тело остатка биће ограничено и њиховим основама тј. са 12 једнакостраничних троуглова. Овим одстрањивањем од сваке стране октаедра остаје једнакостранични троугао подударан претходним троугловима. Како страна октаедра има 8, то ће и ових 8 троуглова бити стране тела остатка. Према томе, тело остатка правилног октаедра је ограничено са 20 једнакостраничних троуглова. Јасно је да су сви ивични углови рогљева тела остатка једнаки (60^0), а уз мало рачуна се може показати да су и сви диедри рогљева једнаки.



Сл. 10_3.

Нека је је $C_1C_2C_3C_4$ деформисани квадрат октаедра на Сл. 10_3. Троуглови $C_1C_3C_2$ и $C_1C_3C_4$ су и стране тела остатка октаедра. Нека је тачка M подножје нормале из C_2 на C_1C_3. Тада је M подножје нормале и из C_4 на C_1C_3. Угао диедра одређеног овим странама је угао $C_2MC_4 = \varphi$. У троуглу C_2C_4M страница наспрам угла C_2MC_4 је C_2C_4. Тачке C_2 и C_4 се налазе на норма-лним ивицама октаедра A_0A_2 и A_0A_4 редом на растојању $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ од тачке A_0. Тада је $\left|C_2C_4\right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{2}$. Нека је M_1 подножје нормале из M на C_2C_4. Та-да је C_2MM_1 једнако $\frac{\varphi}{2}$, а троугао C_2MM_1 правоугли са правим углом код M_1, па је

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left|C_2C_4\right|}{\left|C_2M\right|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\ .$$

Према томе φ је угао диедра правилног икосаедра. (Видети [3], стр. 13.). Треба доказати да и стране тела остатка којима заједничка страница није дијагонала деформисаног квадрата одређују диедар чији је угао φ. У том случају уочимо троугао $A_2A_3C_1$. (Сл. 10_3.) Из троугла $A_0A_2C_1$ се косинусном теремом добија

$$\left|A_2C_1\right|^2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\cos 60^0 = 3-\sqrt{5}\ .$$

Тада је $\left|A_2C_1\right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{2}$. A_3C_1 је хипотенуза правоуглог троугла $A_0A_3C_1$, па је $\left|A_3C_1\right| = \sqrt{1^2+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{3}$. Тада за угао $C_1A_2A_3 = \psi$ троугла $A_2A_3C_1$ важи

$$\left|A_3C_1\right|^2 = \left|A_2A_3\right|^2 + \left|A_2C_1\right|^2 - 2\cdot\left|A_2A_3\right|\cdot\left|A_2C_1\right|\cdot\cos\psi\ .$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{3}\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\psi\ .$$

Из ове једначине следи $\cos\psi = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Тачка P ивице A_2A_3 добијена је поделом од A_2 према A_3 тј. теме остатка тела октаедра. C_2C_3P је страна суседна страни $C_2C_3C_1$. Из троугла A_2C_1P следи

$$\left|C_1P\right|^2 = \left|A_2C_1\right|^2 + \left|A_2P\right|^2 - 2\cdot\left|A_2C_1\right|\cdot\left|A_2P\right|\cdot\cos\psi\ .$$ Даље је

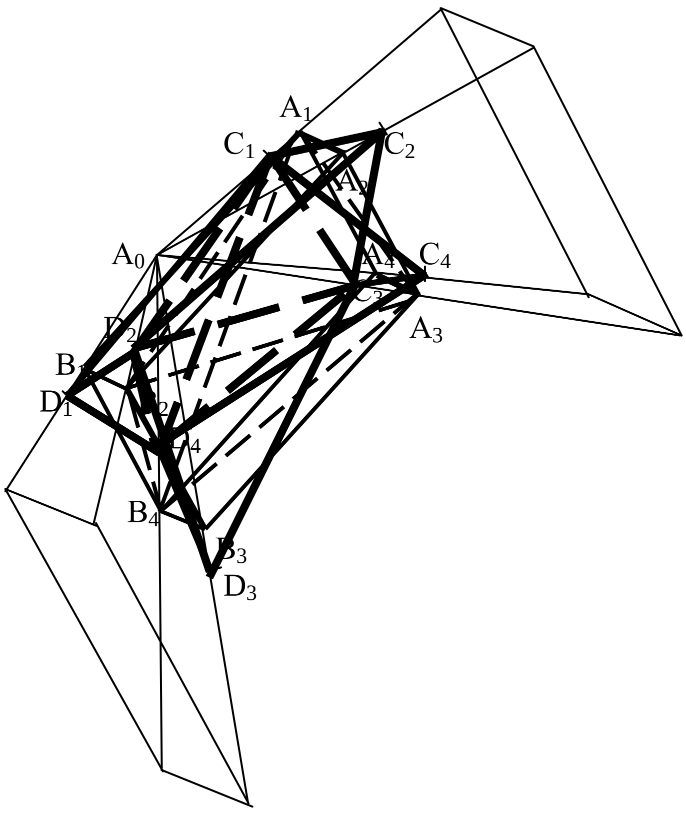
$$\left|C_1P\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\left|C_1P\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\left(2+1-1\right) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\cdot 2 \Rightarrow \left|C_1P\right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{2}\ .$$

Дакле, растојање између слободних темена троугаоних страна C_2C_3P и $C_2C_3C_1$ је исто као и у првом случају. Одређивање угла диедра је исто као и у првом случају и даје исти резултат. Према томе, тело остатка октаедра је правилни икосаедар. Крај доказа. □

9. „Деформисана" коцка политопа {3,4,3}

Теорема 5. Нека су ивице политопа $\{3,4,3\}$ повезано индексиране и нека су код сваког темена одстрањене пирамиде октаедара на основу теореме 4. Тада је тело остатка једним делом сачињено од 4-фигура које су уније од по пет правилних тетраедара.



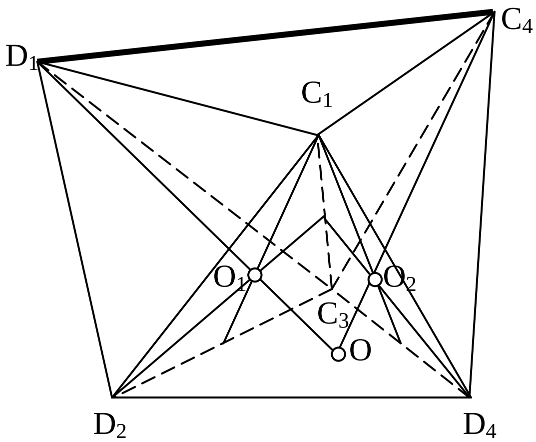
Сл. 11.

Доказ. Нека су ивице политопа $\{3,4,3\}$ повезано индексиране и нека су код сваког темена одстрањене пирамиде октаедара на основу теореме 4. Код једног темена политопа $\{3,4,3\}$ постоје две групе од по четири ивице при чему су ивице у једној групи међусобно нормалне. У једној од тих група се налазе ивице на којима су тачке које одређују дијагонале деформисаних квадрата једнаке страници. Сваке две ивице одређују једну дијагоналу, а како парова ивица има $\binom{4}{2}=6$, онда има и 6 дијагонала. Из сваке тачке на ивици полазе три дијагонале, јер ако се једна изабере, онда остају још три које се могу спојити са изабраном тачком. Како су три ивице међусобно нормалне, то онда не леже у истој равни, па ни наведене дијагонале не леже у истој равни. Дакле, ових 6 дијагонала одређују правилан тетраедар.

На Сл. 10. то је тетраедар $C_1C_3D_4D_2$. Ивице су му представљене подебљаним испрекиданим линијама. На ивицама из друге групе које су на други начин оријентисане повезаним индексирањем налазе се још 4 тачке. Сваку ивицу политопа $\{3,4,3\}$ окружују три октаедра, па и сваку од ивица друге групе. Заједничке стране од по два таква октаедра садрже изабрану ивицу. Таквих страна, такође, има три. У свакој од тих страна постоји једна тачка из прве групе која је на растојању од тачке на изабраној ивици једнаком страници деформисаног квадрата. Дакле, свака тачка из друге групе заједно са три тачке из прве групе (страном већ одређеног тетраедра) одређује правилан тетраедар подударан тетраедру одређеном дијагоналама дефор-мисаних квадрата. Оваквих тетраедара има четири и повезани су са тетрае-дром дијагонала (убудуће централним тетраедром) једном страном.

Докажимо да је унија ових пет тетраедара 4-фигура тј. да ових 8 тачака не леже у истом 3-простору.

Претпоставимо супротно тј. нека свих 8 тачака припадају истом 3-простору. Нека је централни тетраедар (тетраедар чије су ивице дијагонале деформисаних квадрата) $C_1D_2D_4C_3$ (Сл. 12.) и нека су $C_1D_2D_4C_3$ и $C_1D_3D_4C_4$ тетраедри који редом имају заједничке стране са централни тетраедром $C_1D_2C_3$ и $C_1D_4C_3$. Нормале из темена C_4 и D_1 ова два тетраедра на заједничке



Сл. 12.

стране са централним тетраедром пролазе кроз центре (тежишта) O_1 и O_2 страна $C_1D_2C_3$ и $C_1D_4C_3$ и секу се у центру (тежишту) O централног тетраедра $C_1D_2D_4C_3$, јер су су сва три тетраедра у истом 3-простору. Тада су дужи O_1D_1 и O_2C_4 висине правилних тетраедара једнаких ивица, па су њи-хове дужине $|O_1D_1| = |O_2C_4| = a\sqrt{\frac{2}{3}}$,

где је a дужина ивице. (Видети [3], стр. 131). Дужи OO_1 и OO_2 су полупречници уписаних сфера у правилни тетраедар чија је дужина

$\frac{1}{4}a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Тада је $|OD_1| = |OC_4| = a\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{5}{4}a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Угао који заклапају ове нормале је суплементан углу φ диедра правилног тетраедра и за тај угао важи $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Троугао OC_1D_4 је једнакокраки са основицом C_1D_4 и углом наспрам основице 180^0-φ. У теореми 3. претпостављено је да је ивица октаедра 1, и да је тада ивица тетраедра једнака $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{2}$ (видети теорему 3.), то је онда

$$\frac{|D_1C_4|}{2} = |OC_4|\cdot\sin\frac{180^0-\varphi}{2} \Rightarrow |D_1C_4| = 2\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sin\left(90^0-\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$|D_1C_4| = \left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi}{2} = \left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{5\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{6}.$$

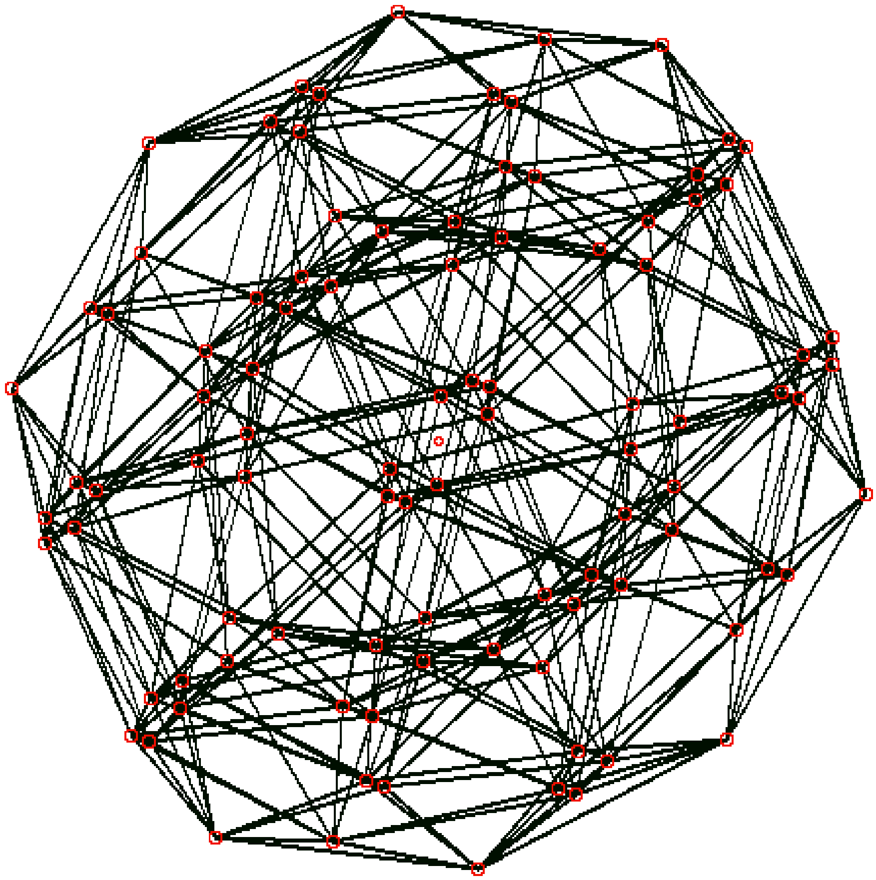
Међутим, тачке D_1 и C_4 леже на нормалним ивицама политопа $\{3,4,3\}$ на растојању $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ од темена A_0, па је $|D_1C_4| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{2}$. Лако се показује да ове две вредности нису једнаке, па тачке D_1 и C_4 не припадају 3-простору тачака прве групе. Из ових закључака следи да је фигура добијена описа-ним поступком четвородимензионална фигура сатављена од 5 правилних тетраедара. Ову фигуру можемо звати „деформисана“ коцка или замена за темену фигуру. Крај доказа. □

10. Политоп П{3,4,3}

Теорема 6. Нека су ивице политопа $\{3,4,3\}$ подељене по златном пресеку у складу са повезаним индексирањем и нека су код сваког темена одстрањене све пирамиде према теореми 4. Тада је тело остатка 4-политоп чије су ћелије правилни икосаедри и правилни тетраедри.

Доказ. На основу теорема 4. и 5. одстрањивањем пирамида добија се 4-фигура сачињена од правилних икосаедара (остаци од октаедара) и правилних тетраедара на које су разложене деформисане коцке (замене за темене фигуре). Докажимо да је свака страна (троугаона) икосаедара или тетраедара заједничка за тачно две од ових фигура.

Како је свака страна октедара, који је ћелија од $\{3,4,3\}$, заједничка за тачно два октаедра, то је онда и свака страна икосаедара, добијена од стране октаедра, заједничка за тачно два икосаедра. Остале стране икосаедара су основе одстрањених пирамида. Таквих страна има 12 за свако теме поли-топа $\{3,4,3\}$, јер темена фигура политопа $\{3,4,3\}$ има 6 квадратних страна којима одговарају 6 деформисаних квадрата деформисане коцке који су сачињени од по два једнакостранична троугла. Свака таква страна је заједничка за један икосаедар и један тетраедар деформисане коцке. На основу доказа теореме 5. свака страна централног тетраедра деформисане коцке припада још само једном тетраедру. Према томе, свака страна икосаедара или тетраедара је заједничка или за два икосаедра или за два тетраедра или за један икосаедар и један тетраедар. Из овог закључка следи да унија свих ових правилних икосаедара и тетраедара ограничава један део 4-простора, па је добијена 4-фигура један 4-политоп. 3-ћелије овог политопа су правилни икосаедри и правилни тетраедри, а 2-ћелије су једнакостранични троуглови. Све 3-ћелије овог политопа су правилне, али међусобно нису подударне. Крај доказа. □



Сл. 13.: П $\{3,4,3\}$

Како политоп $\{3,4,3\}$ има 96 ивица, а на свакој од њих се налази по једно теме, то онда добијени политоп има 96 темена. $\{3,4,3\}$ има 24 октаедарске ћелије, а од сваке се добија по једна икосаедарска ћелија, па добијени поли-топ има 24 икосаедарске ћелије. Деформисану коцку чине 5 тетраедарских ћелија, а ових фигура има колико и темена од $\{3,4,3\}$, то онда тетраедар-ских ћелија има $5 \cdot 24 = 120$. Укупан број 3-ћелија је онда $24+120 = 144$. Како икосаедар има 20 троугаоних страна, а тетраедар 4, то би онда укупан број труогаоних ћелија био $24 \cdot 20+4 \cdot 120 = 960$, међутим, свака троугаона страна је заједничка за две ћелије, па је укупан број 2-ћелија овог политопа 480. Речено је да сваку ивицу политопа $\{3,4,3\}$ окружују три октаедра, па је свако теме добијеног политопа заједничко за три икосаедра од којих свака два имају заједничку страну чије две ивице садрже заједничко теме; према томе, 6 ивица страна ових икосаедара добијених од страна октаедара садрже заједничко теме. Поред ових ивица постоји још по једна ивица сваког од ова три икосаедра одређена дијагоналом деформисаног квадрата које са-држе заједничко теме. Дакле, из једног темена добијеног политопа полази 9 ивица. Укупан број ивица је тада $(9\cdot96):2 = 432$. Тако смо добили $N_0 = 96$, $N_1 = 432$, $N_2 = 480$, $N_3 = 144$. Лако се проверава Ојлерова формула 96-432+480-144 = 0.

Како из једног темена овог политопа полази 9 ивица, то онда темена фигура има 9 темена, а како не постоји правилан полиедар са 9 темена, то онда темене фигуре нису правилне. Ивице темене фигуре су средње линије троугаоних страна које су једнакостранични троуглови, па су међусобно једнаке. На основу симетрија политопа $\{3,4,3\}$ могу се извести симетрије добијеног политопа, а из тога подударност темених фигура. (Видети [5], Поглавље VII). Аналогно полуправилним полиедрима (видети [3], стр. 41-43) овако добијени 4-политоп може да се зове полуправилни $\{3,4,3\}$, означићемо га са $\Pi\{3,4,3\}$.

11. Госетова конструкција политопа {3,3,5}

У неким претходним конструкцијама смо тражене објекте положајем по-стављали у Декартов правоугли координатни систем, док за неке то није експлицитно урађено. На пример, конструкције α_4, β_4, γ_4 су изведене у координатном систему, док су конструкције политопа $\{3,4,3\}$ и $\Pi\{3,4,3\}$ изведене од 4-коцке за коју није прецизиран положај у координатном систему тј. те конструкције можемо сматрати синтетичким. Конструкције преостала два правилна 4-политопа и њихових пројекција на раван извешћемо у Декартовом правоуглом координатном систему. Предочавање ових политопа могуће је извести и синтетички помоћу њихових пресека са посебним рав-нима или њихових пројекција на посебну раван. (Видети [5], поглавље XIII).

Како се конструкције свих ових политопа, осим α_4, и β_4, изводе одређеним редоследом полазећи од γ_4 (4-коцке), то ћемо као полазну фигуру узети јединичну 4-коцку конструисану у координатном систему на основу дефиниције 11. у одељку 3. Темена тако конструисане коцке су све варијације са понављањем четврте класе од елемената 0 и 1. То можемо записати и на следећи начин $(0^k,1^{4-k})$, k = 0,1,2,3,4; где 0^k значи да у тој уређеној четворки има k нула. Нека су $x_i, i = 1,2,3,4$, координатне осе. Једначине 3-простора који садрже ћелије (3-коцке) од 4-коцке су $x_i = 0$ или $x_i = 1$, $i = 1,2,3.4$. Неки парови ових 3-простора одређују раван 2-ћелије (квадратне стране) 4-коцке. $(x_i = 0, x_k = 0), i = 1,\cdots,4; k = i+1,\cdots,4.$ Таквих парова има $\binom{4}{2} = 6$, јер су то комбинације без понављања. $(x_i = 0, x_k = 1)$, $(x_i = 1, x_k = 0)$, $(x_i = 1, x_k = 1), i = 1,\cdots,4; k = i+1,\cdots,4.$ Дакле, још три групе са по 6 парова. Укупно парова 24. Толико има и квадратних страна 4-коцке. Средишта квадрата се налазе у пресеку симетрала страница, а како су то јединични квадрати, то су онда две координате средишта једнаке $\frac{1}{2}$. Друге две координате су одређене паровима 3-простора који садрже раван ква-дратне стране тј. те координате су 0 или 1. Према томе, средишта квадра-тних страна 4-коцке су уређене четворке скупова $\left\{0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$, $\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$ и $\left\{1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$. Те уређене четворке се сада могу схватити као пермутације са понављањем. У првом скупу има два елемента и сваки се понавља два пута. Дакле, први скуп одређује $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ тачака. Други има три елемента, при чему се један елемент понавља два пута, па је на овај начин одређеено $\frac{4!}{1!\cdot 1\cdot 2!}=12$ тачака. Трећа група је слична првој, па она одређује 6 тачака. Коначно, на овај начин је одређено 24 средишта квадратних страна 4-коцке у координатном систему. На основу теореме 2. одељак 6. ове тачке су темена политопа $\{3,4,3\}$ (видети Сл. 7.).

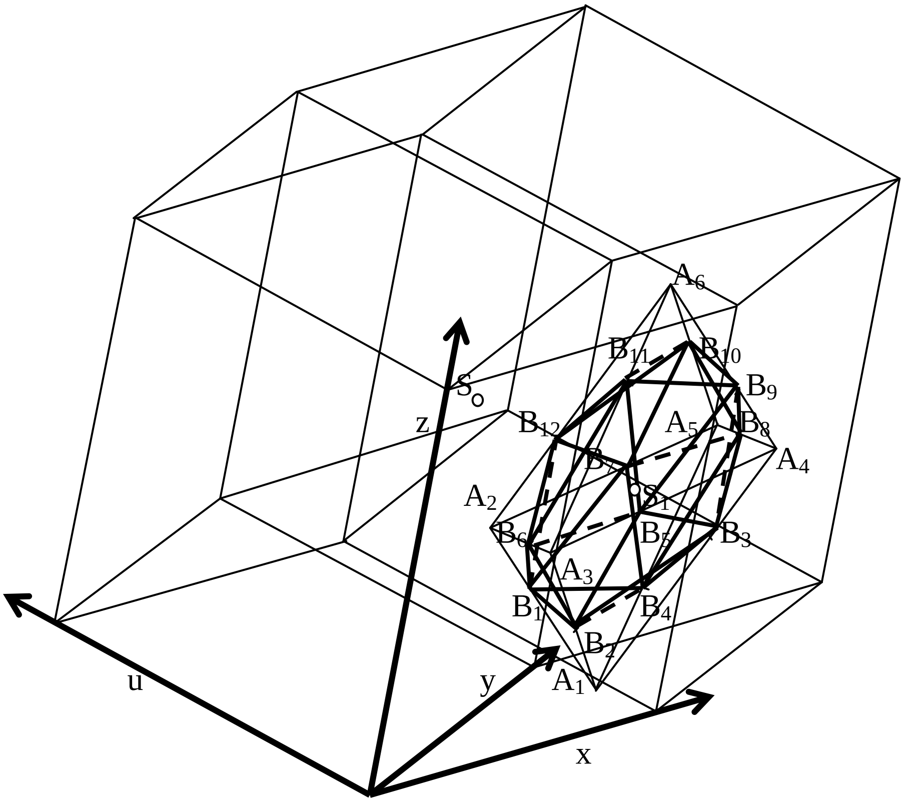
Да бисмо одредили координате темена политопа $\Pi\{3,4,3\}$(конструисали овај политоп) потребно је извршити повезано индексирање ивица политопа $\{3,4,3\}$, а затим поделом ивица по златном пресеку одредити темена политопа $\Pi\{3,4,3\}$. Ово се може урадити на два начина. Први начин би био да се постепено изводи повезано индексирање уз помоћ графичке пројекције и упоредо са тим одређују темена овог политопа. Овај се поступак у даљем току знатно компликује због слабе видљивости која је условљена великим бројем дужи и тачака. Други начин би био да се поступак повери рачунарском програму. Ми се овом приликом опредељујемо за други начин, док ћемо први начин провести за једну ћелију.

Посматрајмо 3-коцку јединичне 4-коцке одређену координатним осама x,y,z (Сл. 14.). Тада је четврта координата у том 3-простору 0. Октаедарска ћелија политопа $\{3,4,3\}$ у том простору има темена:

$$A_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right),\ A_2\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),\ A_3\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right),\ A_4\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),$$

$$A_5\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},0\right),\ A_6\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right).$$

Треба напоменути да је сада ивица октаедра тј. ивица политопа $\{3,4,3\}$ дужине $\frac{\sqrt{2}}{2}$, јер је ивица коцке 1. Повезано индексирање почињемо са ивицом A_1A_2 коју оријентишемо од A_1 према A_2. Ознака A_1-A_2. Тачку B_1 икосаедарске ћелије политопа $\Pi\{3,4,3\}$ добићемо поделом дужи A_1A_2 од A_1 према A_2 у размери $\frac{\sqrt{5}+1}{2}:1$.



Сл. 14.

$$x_1=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot 0}{1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{3+\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{4},\ y_1=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

$$z_1=\frac{0+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2\left(3+\sqrt{5}\right)}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{2\cdot 4}=\frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\cdot 4}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$u_1=0.$ Према томе је $B_1\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{4},0\right)$.

На основу правила повезаног индексирања ивица A_1A_4 биће оријентисана од A_1 према A_4, јер су ивице A_1A_2 и A_1A_4 нормалне, што се лако проверава. Наиме, $\overrightarrow{A_1A_2}=\left\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right\}$, $\overrightarrow{A_1A_4}=\left\{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right\}$, $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}=-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}+0=0$. За тачку B_3 тада важи

$$x_3=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot 1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{4}=\frac{6-2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

$$y_3=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{2},\ z_3=\frac{0+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.\ u_3=0.$$

Према томе,

$$B_3\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{4},0\right).$$

Ивица A_1A_3 биће оријентисана од A_3 према A_1, па за тачку B_2 важи

$$x_2=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{2},\ y_2=\frac{0+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$z_2=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot 0}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{3-\sqrt{5}}{4},\quad u_2=0.$$

Дакле, $B_2\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{4},\frac{3-\sqrt{5}}{4},0\right)$.

Ивица A_1A_5 оријентисана је од A_5 према A_1 тј. важи A_5-A_1, па је

$$x_4=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{2},\ y_4=\frac{1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2\left(3+\sqrt{5}\right)}=\frac{5-\sqrt{5}}{4},$$

$$z_4=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot 0}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{3+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\ u_4=0.\ B_4\left(\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{5}}{4},\frac{3-\sqrt{5}}{4},0\right).$$

Како је A_1-A_4 и тачке A_1, A_3 и A_4 леже у истој страни октаедра, то је онда A_4-A_3, па су координате за тачку B_5 следће

$$x_5=\frac{1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{5-\sqrt{5}}{4},\ y_5=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot 0}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{3-\sqrt{5}}{4},$$

$$z_5=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{2},\ u_5=0,\quad B_5\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4},\frac{3-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},0\right).$$

На сличан начин се одређују и остала темена ове икосаедарске ћелије политопа П $\{3,4,3\}$.

$$B_6\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4},\frac{3-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},0\right),\ B_7\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4},\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{1}{2},0\right),\ B_8\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4},\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{1}{2},0\right),$$

$$B_9\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{5}}{4},0\right),\ B_{10}\left(\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{5}}{4},\frac{\sqrt{5}+1}{4},0\right),\ B_{11}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{4},\frac{\sqrt{5}+1}{4},0\right),$$

$$B_{12}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{5}}{4},0\right).$$

Темена ове икосаедарске ћелије могу се сврстати у четири групе:

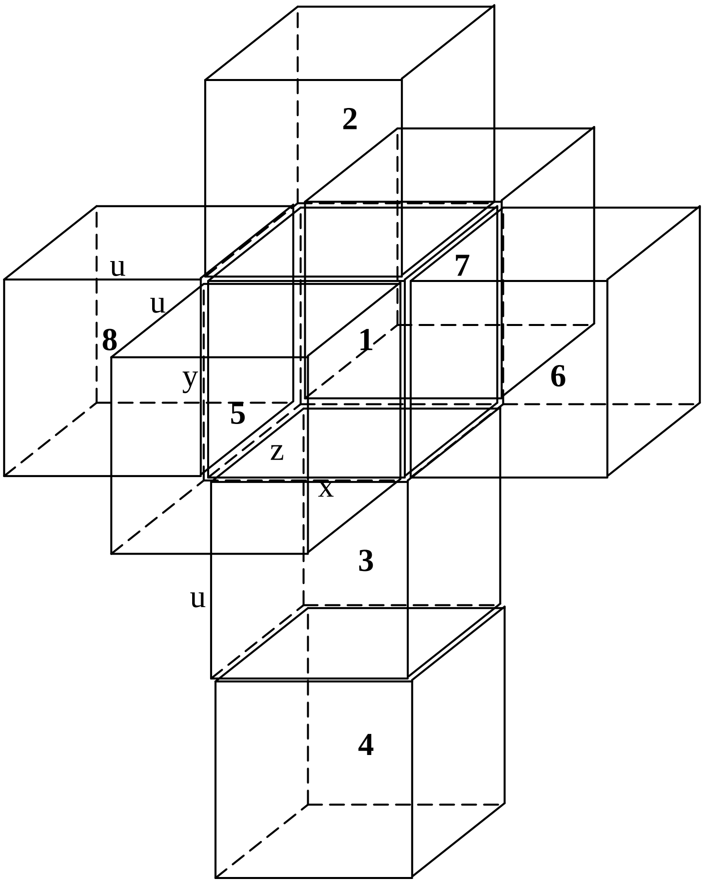
в) $B_5\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4},\frac{3-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},0\right),\ B_{12}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{5}}{4},0\right),\ B_4\left(\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{5}}{4},\frac{3-\sqrt{5}}{4},0\right)$

а) $B_6\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4},\frac{3-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},0\right);\ B_1\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{4},0\right),\ B_2\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{4},\frac{3-\sqrt{5}}{4},0\right);$

б) $B_7\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4},\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{1}{2},0\right),\ B_3\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{4},0\right),\ B_{11}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{4},\frac{\sqrt{5}+1}{4},0\right);$

г) $B_8\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4},\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{1}{2},0\right),\ B_9\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{5}}{4},0\right),\ B_{10}\left(\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{5}}{4},\frac{\sqrt{5}+1}{4},0\right).$

Из конструкције је јасно да је четврта координата сваке тачке 0. За остале три координате се уочава да се тачке B_{12} и B_4 добијају цикличним померањем прве три координате темена B_5 редом. На исти начин се од темена B_6 добијају темена B_1 и B_2, а од B_7 темена B_3 и B_{11}, и од темена B_8 темена B_9 и B_{10}. Дакле, сва темена ове икосаедарске ћелије се могу добити од B_5, B_6, B_7 и B_8. Ова икосаедарска ћелија политопа П $\{3,4,3\}$ уписана је у октаедарску ћелију политопа $\{3,4,3\}$, а ова у 3-коцку ћелију 4-коцке. Ћелија 4-коцке има 8 и две од њих могу имати само заједничку страну, а тада октаедарске ћелије политопа $\{3,4,3\}$ могу имати само заједничку тачку, док икосаедарске ћелије политопа П $\{3,4,3\}$ тада немају заједничких тачака. Према томе, овако дибијених икосаедарских ћелија политопа П $\{3,4,3\}$ има 8, и како сва-ка од њих има 12 темена, то је онда добијено $8\cdot 12$ = 96 темена овог политопа. Како је већ речено П $\{3,4,3\}$ има укупно 96 темена, то би се онда овим поступком добила сва темена овог политопа. Координате темена осталих икосаедарских ћелија се могу добити од темена ове икосаедарске ћелије. Да бисмо то показали размотримо мрежу 4-коцке (видети [5], стр. 237).



Сл. 15.

Тачке 3-коцке **1** (Сл. 15.) имају u-координату 0 и у тој коцки је добијена прва икосаедарска ћелија. Коцка **3** има y – координату 0, док је u-координата због симетрије једнака одговарајућој y-координати коцке **1**. Према томе, коцке **3** и **1** имају исте бројеве за координате само што су код коцке **1** то прва, друга и трећа, а код коцке **3** прва, друга и четврта. Слично је и код коцака **2** и **4** само је код њих четврта односно друга координата 1. Дакле, ове четири коцке имају исте бројеве за координате само што им је друга односно четврта координата редом 0 и 1. Према томе, икосаедри који се налазе у коцкама **2**, **3** и **4** добијају се цикличним померањем координата различитих од 0 и 1 тачака B_5, B_6, B_7 и B_8, при чему су друга односно четврта координата 0 или 1. Полазећи од једног добијеног икосаедра и прелазећи на остале ћелије политопа $\{3,4,3\}$ и водећи рачуна о преношењу повезаног индексирања добијају се темена осталих икосаедарских ћелија политопа $\Pi\{3,4,3\}$. Упоређивањем тога резултата са теменима B_5, B_6, B_7 и B_8 може се закључити да се за икосаедре у коцкама **5**, **6**, **7**, **8** координате добијају кад се за прву односно трећу координату узме 0 или 1, затим у тачкама B_5, B_6, B_7 и B_8 координате различите од 0 и од 1 и од $\frac{1}{2}$ замене места, и на крају изврши циклично померање координата различитих од 0 и 1. На тај начин се сва темена политопа $\Pi\{3,4,3\}$ могу добити од темена B_5, B_6, B_7 и B_8. (Видети и [5], стр. 156-157, имајући на уму да су тамо координате полазне 4-коцке задате нешто другачије.).

Теорема 7. Око политопа $\Pi\{3,4,3\}$ се може описати сфера.

Доказ. Центар 4-коцке $\{4,3,3\}$ је уједно и центар политопа $\{3,4,3\}$, јер су његова темена центри 2-ћелија (равних страна) 4-коцке. То је тачка $S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Речено је да су координате темена политопа $\{3,4,3\}$ (видети стр. 29) све пермутације са понављањем скупова $\left\{0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$, $\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$ и $\left\{1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$. Растојања тих темена од тачке S су:

за прву групу $\rho_1=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

за другу групу $\rho_2=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

за трећу групу $\rho_3=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Дакле, сва темена политопа $\{3,4,3\}$ су удаљена од тачке S за вредност $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Према томе, око политопа $\{3,4,3\}$ се може описати 4-сфера са центром S и полупречником $R_0^{343}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Приметимо да је полупречник ове сфере једнак ивици политопа.

У претходном закључку је речено да се темена политопа $\Pi\{3,4,3\}$ могу добити од темена B_5, B_6, B_7, B_8, па је онда довољно показати да су њихова растојања од тачке S једнака.

$$|SB_5|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{14-6\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}+4}{16}}=$$
$$=\sqrt{\frac{24-8\sqrt{5}}{16}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$|SB_6|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$|SB_7|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$|SB_8|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-3}{4}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$|SB_5|=|SB_6|=|SB_7|=|SB_8|=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Дакле, темена B_5, B_6, B_7, B_8, а на основу претходног, су и сва остала темена политопа $\Pi\{3,4,3\}$ једнако удаљена од тачке S, па је 4-сфера чији је центар тачка S, а полупречник $R_0^{\Pi 343}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, описана око политопа $\Pi\{3,4,3\}$. Крај доказа. □

Теорема 8. За сваку икосаедарску ћелију политопа $\Pi\{3,4,3\}$ постоји тачка у 4-простору која је у спољашњој области политопа и на растојању од сваког темена те ћелије једнаком ивици овог политопа.

Доказ. Посматрајмо икосаедарску ћелију $B_1B_2\cdots B_5B_6B_7B_8\cdots B_{12}$ политопа $\Pi\{3,4,3\}$ добијену од октаедарске ћелије $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ политопа $\{3,4,3\}$. (Сл. 14). Центар овог октаедра је центар јединичне 3-коцке одређене осама x, y, z, а то је тачка $S_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$. Докажимо да је S_1 центар и икосаедра. Тачка S_1 је и центар уписане сфере у октаедар, па се налази у унутрашњој области одређеној и равнима икосаедарских страна које леже у странама октаедра.Тачка S_1 је на растојању од темена октаедра једнаком половини дијагонале октеадра, а то је $\dfrac{1}{2}$, јер је ивица октаедра $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Растојање темена октаедра до ивице диедра икосаедарских страна које не припадају странама октаедра је висина правоуглог троугла, чије су катете $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, која одговатра хипотенузи и једнака њеној половини. Дакле, растојање темена од ивице диедра (дијагонале деформисаног квадрата) је $\frac{1}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}$, а то је једнако $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ што је мање од $\frac{1}{2}$. Према томе, теме октаедра и тачка S_1 су са различитих страна ивице диедра одређеног поменутим странама икосаедра. Из тога следи да тачка S_1 лежи у унутрашњости диедра икосаедра, а самим тим и у унутрашњости икосаедра. Одредимо растојања темена икосаедра од тачке S_1.

$$\left|S_1B_5\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+(0-0)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{14-6\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}+4}{16}}=$$

$$=\sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{16}}=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,.$$

$$\left|SB_6\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+(0-0)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,.$$

На исти начин се показује да су и остала темена на растојању $\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Према томе, тачка S_1 је центар, а $\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ је полупречник описане сфере око икосаедра $B_1B_2B_3\cdots$. Ивица икосаедра је $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, полупречник сфере око икосаедра је

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)^2\left(5+\sqrt{5}\right)}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\left(14-6\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{70+14\sqrt{5}-30\sqrt{5}-30}{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{40-16\sqrt{5}}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8\left(5-2\sqrt{5}\right)}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,.$$

Овај резултат је сагласан претходно добијеном резултату. Вектор $\overrightarrow{SS_1}=\left\{0,0,0,-\frac{1}{2}\right\}$ је нормалан на сваки вектор 3-простора који са-држи икосаедарску ћелију $B_1B_2B_3\cdots$, јер сваки вектор овог простора има четврту координату 0, а вектор $\overrightarrow{SS_1}$ има прве три координате 0, па ће њихов скаларни производ бити 0. Према томе, вектор $\overrightarrow{SS_1}$ је нормалан на 3-простор који садржи икосаедарску ћелију. Ако постоји тачка са наведеним својством, онда она мора да се налази на правој SS_1 и да су та тачка и тачка S са различитих страна 3-простора икосаедарске ћелије. Претпоставимо да је то тачка C_1 за коју важи $|C_1B_5| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Тада важи $|S_1C_1| = \sqrt{|C_1B_5|^2 - |S_1B_5|}$. На основу претходног резултата следи:

$$|S_1C_1| = \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{14-6\sqrt{5}}{4} - \frac{5-2\sqrt{5}}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9-4\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{2^2 - 4\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2}{4}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}-2}{2}.$$

Како је $|SS_1| = \frac{1}{2}$, а распоред је $S - S_1 - C_1$, то је онда

$$|SC_1| = |SS_1| + |S_1C_1| = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}-2}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Дакле, тачка C_1 лежи на сфери описаној око политопа $\Pi\{3,4,3\}$ и да је $|C_1B_i| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. B_i, $i = 1,2,\cdots 12$, су темена икосаедарске ћелије.

Координате тачке C_1 се могу одредити на следећи начин.

Како је $|SS_1| + |S_1C_1| = |SC_1|$ и како је $|SS_1| = \frac{1}{2}$, $|S_1C_1| = \frac{\sqrt{5}-2}{2}$, $|SC_1| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, то онда тачка S_1 дели дуж SC_1 у размери $\lambda = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{5}-2}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}-2$, па за координате тачака S, S_1, C_1 важи

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \left(\sqrt{5}+2\right)x}{1+\sqrt{5}+2} \Rightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \left(\sqrt{5}+2\right)x \Rightarrow x = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}}{2+\sqrt{5}} = \frac{\frac{2+\sqrt{5}}{2}}{2+\sqrt{5}} = \frac{1}{2}.$$

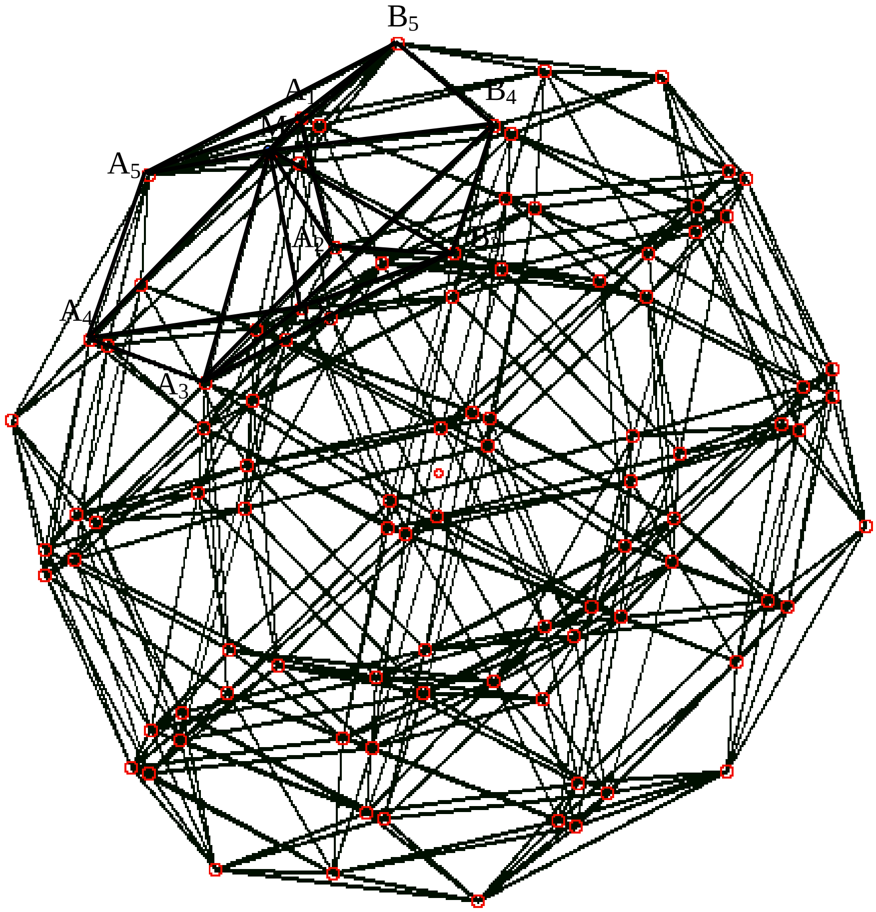
Остале координате тачке C_1 су $y = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}}{2+\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$,

$$u = \frac{0\cdot\left(3+\sqrt{5}\right) - \frac{1}{2}}{2+\sqrt{5}} = \frac{-1}{2\left(2+\sqrt{5}\right)} = \frac{-1\left(\sqrt{5}-2\right)}{2(5-4)} = \frac{2-\sqrt{5}}{2} < 0.$$

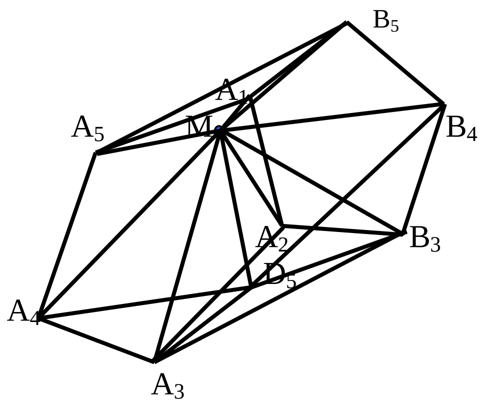
Према томе, тачка C_1 има координате $C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{5}}{2}\right)$. На исти начин се могу одредити остале тачке C_i, $i = 2,\cdots,24$ које испуњавају наведени ус-лов за сваку икосаедарску ћелију политопа $\Pi\{3,4,3\}$. Крај доказа. □

Теорема 9. Темена политопа $\Pi\{3,4,3\}$ и све тачке C_i, $i = 1,2,\cdots,24$ које испуњавају услов теореме 8. представљају темена правилног 4-политопа.

Доказ. Скуп тачака састављен од темена политопа $\Pi\{3,4,3\}$ и тачака C_i, $i=1,\cdots,24$ има 96+24 = 120 тачака. Свака тачка C_i са троугаоним странама одговара-јућег икосаедра одређује 20 нових правилних тетраедара. Укупан број нових тетредара је $20 \cdot 24 = 480$. -



Сл. 16_1.

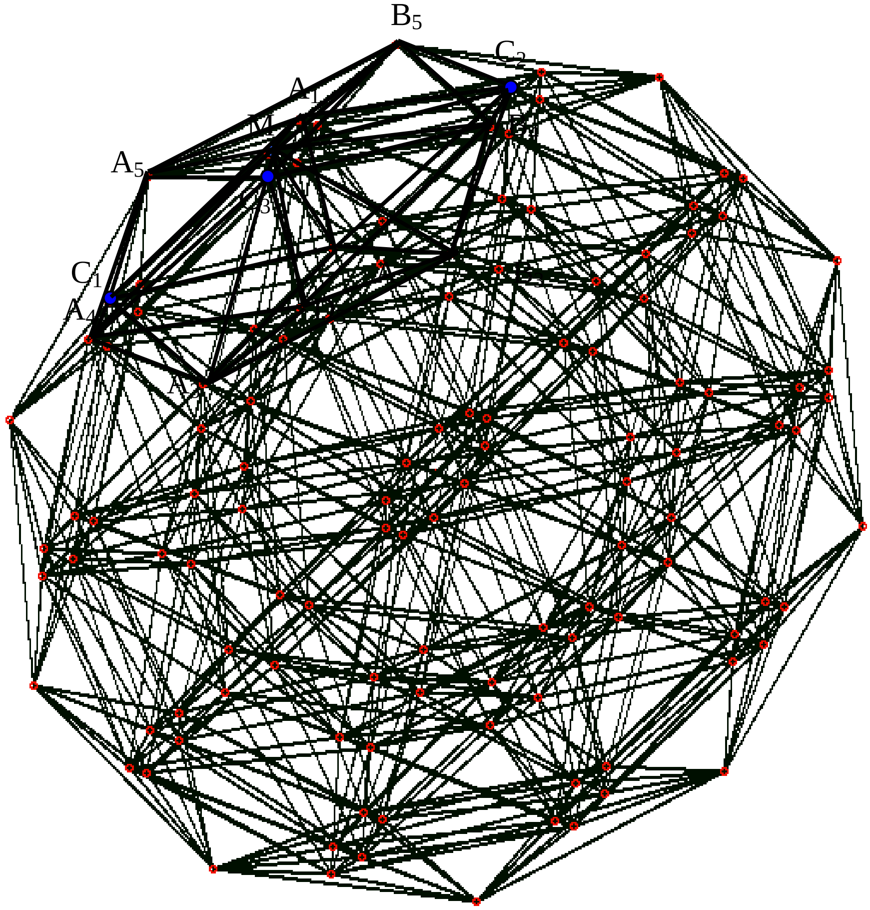


Сл. 16_2.

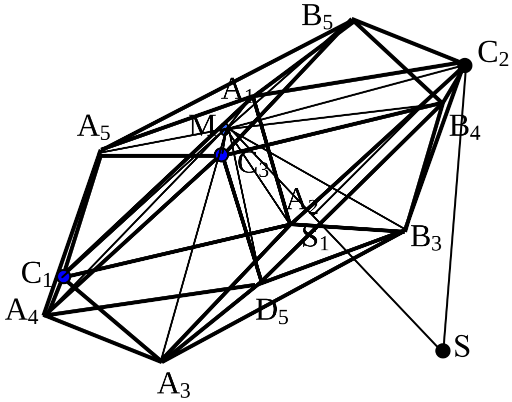
Свака страна икосаедарске ћелије политопа политопа $\Pi\{3,4,3\}$. Нека је једна троугаона страна заједничка за две икоса-едарске ћелије. Тада она са одговарајућим тачкама C_i овим икосаедрима одређује два од нових тетраедара којима је она заједничка страна. Нека је страна икосаедарске ћелије заједничка са тетраедарском ћелијом политопа $\Pi\{3,4,3\}$. Тада је та страна заједничка само једном од нових тетраедара који је одређен том страном и одговарајућом тачком C_i икосаедарској ћелији политопа $\Pi\{3,4,3\}$. Свака ивица икосаедарске ћелије са одговарајућом тачком C_i одређује једну троугаону страну. Како је свака ивица икосаедра заједничка за тачно две стране икосаедра, то је онда поменута страна заједничка за тачно два од нових тетраедара. Већ је показано да је свака страна тетраедарских ћелија политопа $\Pi\{3,4,3\}$ заједничка за тачно два тетраедра. Према томе, све ћелије добијене од темена политопа $\Pi\{3,4,3\}$ и тачака C_i су правилни тетраедри и свака њихова страна је заједничка за тачно два тетраедра. Дакле, на овај начин је добијен 4-политоп чије су ћелије правилни те-траедри.

Докажимо да су темене фигуре добијеног 4-политопа правилни полиедри. За темена C_i важи да је свако спојено ивицом са једним правилним икосаедром и да су то једине ивице које полазе из таквог темена. Средишта тих ивица су темена полиедра сличног поменутом икосаедру, па је онда и тај полиедар правилни икосаедар. Дакле, темене фигуре код темена C_i су правилни икосаедри.

Да бисмо доказали да су темене фигуре код осталих темена добијеног политопа правилни икосаедри размотримо најпре темене фигуре политопа $\Pi\{3,4,3\}$. Нека је M било које теме политопа $\Pi\{3,4,3\}$ (Сл. 16_1.). Тада тачка M припада трима икосаедрима од којих свака два имају заједничку страну (видети одељак 10. стр. 28) којима је M заједничко теме. Свако теме икосаедра је ивицом спојено са пет његових темена која су темена правилног петоугла. Заједничка страна два икосаедра има две странице којима је један крај тачка M, а трећа је једна од страница петоуглова добијених од темена једног и другог икосаедра. Према томе, свака два од три петоугла, одређених тачком M и овим трима икосаедрима, имају заједничку страни-цу и не леже у истој равни, јер су то основе правилних петостраних пира-мида које имају само једну заједничку бочну страну. На Сл. 16_1. и 16_2. су то петоуглови $A_1A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_2B_3B_4B_5$ и $A_4A_5B_5B_4D_5$. Ако је A_1A_2 заједничка страница петоуглова $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $A_1A_2B_3B_4B_5$, онда заједничка ивица петоуглова $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $A_4A_5B_5B_4D_5$ може бити A_4A_5, а петоуглова $A_1A_2B_3B_4B_5$ и $A_4A_5B_5B_4D_5$ B_4B_5 или су то редом ивице A_3A_4 и B_3B_4. То за-виси од положаја тачака A_1 и A_2 према тачки M и крајевима ивице политопа $\{3,4,3\}$ која садржи тачку M. Нека су крајеви те ивице тачке P и Q. Ако тачка M дели дуж PQ у размери $\frac{\sqrt{5}+1}{2}:1$, а тачка A_1 дели одговарајућу ивицу политопа $\{3,4,3\}$ из P у размери $1:\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ тј. $|PA_1|<|PM|$, онда су странице A_1A_5 и A_1B_5 дијагонале деформисаних квадрата. Тада је и A_5B_5 дијагонала деформисаног квадрата. Како су дијагонале деформисаних квадрата једнаке ивици политопа, то је онда и дуж A_5B_5 страница петоугла, а троугао $A_1A_5B_5$ је једнакостранични.



Сл. 17$_1$.



Сл. 17$_2$.

Ако ово није испуњено, онда важи други случај. Симетријом петоуглова $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $A_1A_2B_3B_4B_5$ у односу на симетралну раван ивице A_1A_2 следи да је и троугао $A_2A_3B_3$ једнакостранични. На исти начин се закључује да су и троуглови $A_3A_4D_5$ и $B_3B_4D_5$ једнакостранични, па је онда и троугао $A_3B_3D_5$ једнакостранични.

Дужи A_3D_5, B_3D_5 и A_3B_3 нису странице ових петоуглова, али су ивице политопа $\Pi\{3,4,3\}$. На овај начин је добијен полиедар који има 9 темена, јер из темена М полази 9 ивица политопа $\Pi\{3,4,3\}$, и који је ограничен са три правилна петоугла и пет једнакостраничних троуглова. Темена фигура политопа $\Pi\{3,4,3\}$ је полиедар чија су темена средишта ових 9 ивица, а онда је то по-лиедар сличан добијеном полиедру. Према томе, темена фигура политопа $\Pi\{3,4,3\}$је полиедар ограничен са три правилна петоугла и пет једнакостраничних троуглова.

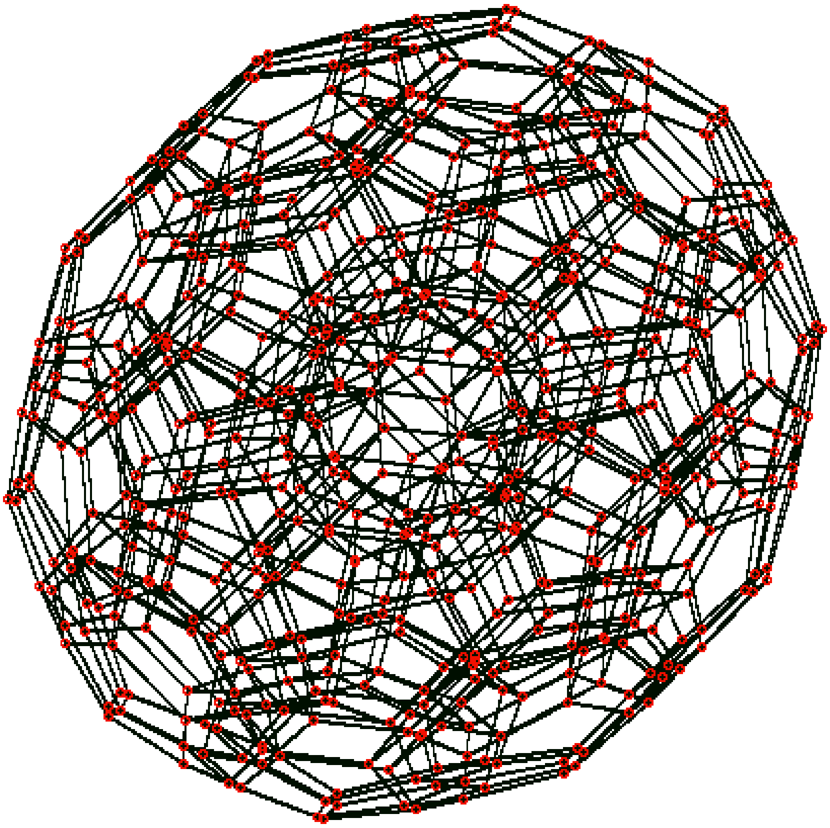
Нека је политоп $\Pi\{3,4,3\}$ допуњен са 24 нова темена C_i. Нека су, даље, C_1, C_2, C_3 тачке из скупа $\{C_i, i=1,\cdots,24\}$ које одговарају икосаедрима који садрже тачку М (Сл. 17_1 и 17_2). Тада из тачке М полази 12 ивица које спајају 12 темена новог политопа са тачком М. Свака од тачкака C_1, C_2 и C_3 са одговарајућим петоуглом полиедра $A_1\cdots A_5B_3B_4B_5$ D_5 одређује пет једнако-страничних троуглова; укупно 15 једнакостраничних троуглова. Узимајући и пет троуглова одређених теменима ова три петоугла, укупан број тро-углова одређених са 12 тачака $A_1, \cdots, A_5$, B_3, B_4, B_5, D_5, C_1, C_2, C_3 је 20. Страница сваког троугла је заједничка за тачно два троугла, јер су 15 тро-углова бочне стране петостраних пирамида које имају различите врхове, а основе могу имати само заједничку ивицу. За четири од осталих пет троуглова је показано да су једнаким ивицама повезани са петоугловима, а пети троугао је повезан са три троугла. Према томе, ових 12 темена одређују полиедар чије су стране 20 једнакостраничних троуглова. Нека је S среди-ште 4-сфере описане око добијеног политопа тј. и око политопа $\Pi\{3,4,3\}$ и нека је на пр. C_2 једно од 12 темена добијеног политопа. Нека је, даље, S_1 подножје нормале из C_2 на полупречник SM 4-сфере (Сл. 17_2). Означимо са x дужину дужи S_1M, а са y дужину дужи S_1C_2. Тада је $|MC_2| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ивица добијеног политопа, а $|SM| = |SC_2| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ полупречник описане 4-сфере. Из правоуглих троуглова MS_1C_2 и SS_1C_2 следи $x^2+y^2=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$ и $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x\right)^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$. Решавањем овог система добија се $x=\frac{\sqrt{5}-2}{2}$ и $y=\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Дакле, дуж S_1C_2 је има дужину једнаку полупречнику описане сфере око икосаедра ивице $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. На основу доказа теореме 8. следи да су и остале тачке полиедра удаљене од тачке S_1 за дужину полупречника сфере описане око икосаедра ивице $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Према томе, полиедар $A_1\cdots A_5B_3B_4B_5D_5C_1C_2C_3$ је правилни икосаедар. Темена фигура која одговара темену М је полиедар сличан овом, па је и он правилан икосаедар. Како је М произвољно теме, то је онда свака темена фигура добијеног 4-политопа правилни икосаедар $\{3,5\}$. Како су ћелије (већ речено) правилни тетраедри, то је онда добијени 4-политоп правилан чија је Шлефлијева ознака $\{3,3,5\}$. Крај доказа теореме 9. □

Подсетимо да политоп $\Pi\{3,4,3\}$ има 96 темена, 432 ивице, 480 троугаоних страна и, 24 икосаедарске и 120 тетраедарских ћелија.

На основу проведеног доказа теореме 9. политоп $\{3,3,5\}$ има 96+24 = 120 темена, $24\cdot 20+120 = 600$ тетраедарских ћелија. Из сваког темена полази 12 ивица и како се на тај начин свака ивица рачуна два пута, то је онда њихов број $\frac{120\cdot 12}{2}=720$. На основу Ојлерове формуле је $120-720+N_2-600\ =0$, па је N_2 = 1200. Дакле, $N_0 = 120$, $N_1 = 720$, $N_2 = 1200$, $N_3 = 600$.

12. Политоп {5,3,3}

Како је је политоп $\{3,3,5\}$ правилан, то онда на основу инверзије прави-лних политопа постоји њему инверзан (видети одељак 4. стр. 15.). Иверзан политоп политопу $\{3,3,5\}$ је политоп $\{5,3,3\}$. Темена политопа $\{5,3,3\}$ су центри (тежишта) тетраедарских ћелија политопа $\{3,3,5\}$. Ћелије овог политопа су правилни додекаедри, равне стране (2-ћелије) правилни петоуглови.



Сл. 18.

На основу инверзије ова два политопа следи да политоп $\{5,3,3\}$ има $N_0 = 600$ темена, $N_1 = 1200$ ивица, $N_2 = 720$ петоугаоних страна и $N_3 = 120$ додекаедарских ћелија (Сл. 18.).

13. Пројекције политопа и њихове конструкције

У физичком свету који нас окружује често постављамо, на изглед, једноставно питање: Какав је свет који нас окружује? Колико димензија има? На ова питања би се могло одговорити питањем: Како доживљавамо и представљамо објекте који нас окружују? Удаљене просторне објекте најчешће представљамо равним фигурама, али и неке објекте из ближе околине представљамо равним фигурама. За неке просторне објекте правимо тродимензионалне моделе који су погоднији за уочавање значајних карактери-стика посматраних објеката. Први начин би се могао окарактерисати као пројекција, док би други представљао трансформацију сличности, али и као пројекција (на пример пројекција на сферу). У овом кратком разма-трању, очигледно, мислимо на просторе од две или три димензије које можемо визуелно да доживимо. За објекте у просторима димензија већих од три израда модела у тим просторима није могућа. За визуелно представљање таквих објеката преостају само пројекције и пресеци са хиперравнима тог простора. Ми се овом приликом бавимо само пројекцијама.

Дефиниција 15. Под пројекцијом фигуре F $n-$простора на хиперраван подразумева се скуп свих продора правих које су у неком посебном међусобном односу (све су паралелне или се све секу у истој тачки), при чему свака од изабраних правих садржи бар једну тачку фигуре F, кроз неку хиперраван ($k-$простор, $k<n$). Скуп свих тачака продора зове се *пројекција* фигуре F на $k-$простор, а $k-$простор *пројекцијска хиперраван*.

Може се дати још општија дефиниција ако се појам права замени са $(n-k)-$простором. Политопи су фигуре које имају најједноставније пројекције. Наиме, за њих је довољно одредити пројекције њихових темена и утврдити које су дужи одређене теменима ивице. У овом раду, односно у рачунарском програму, користимо пројекције 4-политопа на 3-простор (хиперраван) и на 2-простор (раван). При чему је крајњи циљ пројекција на раван. Да би се схватио начин на који рачунарски програм одређује пројекци-је, наводимо једначине основних фигура 4-простора у Декартовом правоу-глом систему.

Једначина 3-простора (хиперравни) је $Ax+By+Cz+Du+E=0$, где је $\{A,B,C,D\}$ вектор хиперравни. Параметарски облик једначине 1-простора (праве) је $x=at+x_0, y=bt+y_0, z=ct+z_0, u=dt+u_0$, где је $\{a,b,c,d\}$ вектор праве, а (x_0,y_0,z_0,u_0) тачка кроз коју права пролази. Ово је аналогно аналитичкој геометрији у 3-простору. Растојање између тачака $P(x_1,y_1,z_1,u_1)$ и $Q(x_2,y_2,z_2,u_2)$ је

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+(u_2-u_1)^2}\ .$$

Аутор овог текста је урадио рачунарски програм који задовољавајуће испуњава услов да се два или више темена не пројектују у исту тачку. У следећем делу текста укратко ћемо описати израду и учинак рачунарског програма.

14. Израда и функционисање рачунарског програма

Овај програм конструише политопе $\{4,3,3\}$ (4-коцка), $\{3,4,3\}$, $\{3,3,5\}$ и $\{5,3,3\}$ и њихове пројекције, при чему је полазна фигура $\{4,3,3\}$.

4-коцка се конструише тј. њена темена у четвородимензионалном координатном систему $Oxyzu$ се одређују као све варијације са понављањем од елемената 0 и a, где је a дужина ивице коцке у пикселима. Ова дуж је полазна; ивице осталих политопа се одређују на описани начин од ове дужи. Ово се у програму реализује са четири програмска циклуса чије променљиве узимају вредности 0 и a. Затим се 4-коцка пројектује на једну хиперрван која је погодно изабрана својим вектором и уз погодно изабран зрак паралелног пројектовања својим вектором. У овом програму се пројекција из ове хиперравни опет пројектује, али сада на раван уз погодно изабран зрак. Ово друго пројектовање се могло и изоставити, али се показало као најпо-годнији начин. Слика на екрану се добија ако се изаберу било које две од четири координате темена подешавајући координате слике на екрану према резолуцији и организацији екрана.

Координате темена коцке се чувају у једном низу, а пројекције темена у другом тако да одговарајућа темена и темена пројекције имају исте индексе. Ово омогућава да се на основу ивице коцке одреде и споје темена пројекције која одређују ивицу.

Речено је да се пројектовање врши паралелном пројекцијом која чува размеру дужи, па у следећим конструкцијама не морамо да вршимо посебно пројектовање добијене фигуре, већ на исти начин добити и пројекцију нове фигуре од пројекције претходне.

Темена политопа $\{3,4,3\}$ се одређују као средишта дијагонала равних страна 4-коцке (квадрата) тако што се узимају парови темена 4-коцке чије је растојање $a\sqrt{2}$ и испитује да ли је та тачка већ једном одређена, па ако јесте, онда се не узима у обзир. У исто време се одређује и одговарајуће теме пројекције. На тај начин су и темена политопа $\{3,4,3\}$ и темена пројекције смештени у два нова низа.

Повезано индексирање је најсложенији сегмент у програму. У овом про-граму тај сегмент није изведен потпуно аутоматски, већ уз делимичну интервенцију програмера. Извесним програмерским досеткама се овај проблем могао решити, али се програмер одлучио за поступак који ћемо укратко описати. Прво се формира низ парова темена која одређују ивицу. Ово се одређује на основу дужине ивице политопа $\{3,4,3\}$ која је $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ти парови су у низу записани као рационални бројеви. На пример, 5, 14 значи да је у питању ивица одређена теменом под редним броје 5 и теменом под редним бројем 14.

Повезано индексирање почиње паром 1,2 , при чему то значи да је та ивица оријентисана од темена 1 према темену 2. За остале ивице које полазе из темена 1 оријентација се врши на следећи начин. Програм одређује векторе задате теменом 1 и теменима осталих ивица и испитује који је од њих нормалан на вектор одређен теменима 1 и 2, па ако је тај вектор нормалан , онда је оријентација од темена 1 према том другом темену и тада одговарајући рационални број остаје непромењен, а ако није онда је орије-нтација према темену 1, на пр. 1,5 прелази у 5,1. Теме 2 се везује за теме 1, па је лако извршити усмерење ивица које полазе из темена 2. За остала те-мена била је потребна интервенција програмера. Програм се извршавао делимично с тим што је издавао парове који су већ индексирани. Програмер је тада редом за свако теме активирао циклус за ново теме које је повезано са неким (најнижег индекса) већ повезаним. То је програмер уносио у програм као наредбу. На тај начин су све ивице политопа $\{3,4,3\}$ оријентисане наредбама у програму.

Темена $\Pi\{3,4,3\}$ су одређена поделом ивица политопа $\{3,4,3\}$ у размери $\frac{\sqrt{5}+1}{2}:1$ у одговарајућем смеру с тим што су темена и усмерење ивица од-ређени из формираног низа претварањем целобројног и рационалног дела у целе бројеве (индексе низа темена). Координате темена политопа $\Pi\{3,4,3\}$ су смештене у један (дводимензионални) низ, а пројекција у други и тако сачуване у програму. Критеријум за ивице је дужина ивице $\frac{3-\sqrt{5}}{2}a$. 24 нова темена за политоп $\{3,3,5\}$ се добијају помоћу размере која је већ опи-сана.

Темена политопа $\{5,3,3\}$ су одређена као тежишта тетраедара политопа $\{3,3,5\}$. Та конструкција је решена са четири циклуса који одређују темена по једног тетраедра којем се тада одређује тежиште на сличан начин као и тежиште троугла у Oxy систему тј. за координате тежишта тетраедра важи $x_T = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$ итд. Критеријум за ивице је растојање између тежи-шта две суседне тетраедарске ћелије политопа $\{3,3,5\}$. Ово растојање тј. ивица политопа $\{5,3,3\}$ одређено је на основу темена

$$B_1\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{4},0\right), B_2\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{4},\frac{3-\sqrt{5}}{4},0\right), B_3\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{4},0\right),$$

$$B_4\left(\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{5}}{4},\frac{3-\sqrt{5}}{4},0\right) \text{ и } C_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{2-\sqrt{5}}{2}\right).$$

На основу претходног (Сл. 14.) троуглови $B_1B_2B_4$ и $B_2B_3B_4$ су суседни (заједничка ивица B_2B_4), па су и тетраедри $B_1B_2B_4C_1$ и $B_2B_3B_4C_1$ суседни (заједничка страна $B_2B_4C_1$), а онда је растојање између њихових тежишта једнако ивици политопа $\{5,3,3\}$.

Тежиште тетраедра $B_1B_2B_4C_1$ је

$$x_1 = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{4} = \frac{9-\sqrt{5}}{16},\; y_1 = \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{5-\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{2},$$

$$z_1 = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{3-\sqrt{5}}{4}+\frac{3-\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{2}}{4} = \frac{7-\sqrt{5}}{16},\ u_1 = \frac{0+0+0+\frac{2-\sqrt{5}}{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{5}}{8}.$$

$$T_1\left(\frac{9-\sqrt{5}}{16},\frac{1}{2},\frac{7-\sqrt{5}}{16},\frac{2-\sqrt{5}}{8}\right)$$

$$.\,T_1\left(\frac{9-\sqrt{5}}{16},\frac{1}{2},\frac{7-\sqrt{5}}{16},\frac{2-\sqrt{5}}{8}\right).$$

$$z_1 = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{3-\sqrt{5}}{4}+\frac{3-\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{2}}{4} = \frac{7-\sqrt{5}}{16},\ u_1 = \frac{0+0+0+\frac{2-\sqrt{5}}{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{5}}{8}.$$

$$T_1\left(\frac{9-\sqrt{5}}{16},\frac{1}{2},\frac{7-\sqrt{5}}{16},\frac{2-\sqrt{5}}{8}\right).$$

$$x_2 = \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5+1}}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{4} = \frac{7+\sqrt{5}}{16},\ y_2 = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5-\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{2},$$

$$z_2 = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{3-\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{2}}{4} = \frac{7-\sqrt{5}}{16},\ u_2 = \frac{0+0+0+\frac{2-\sqrt{5}}{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{5}}{8}.$$

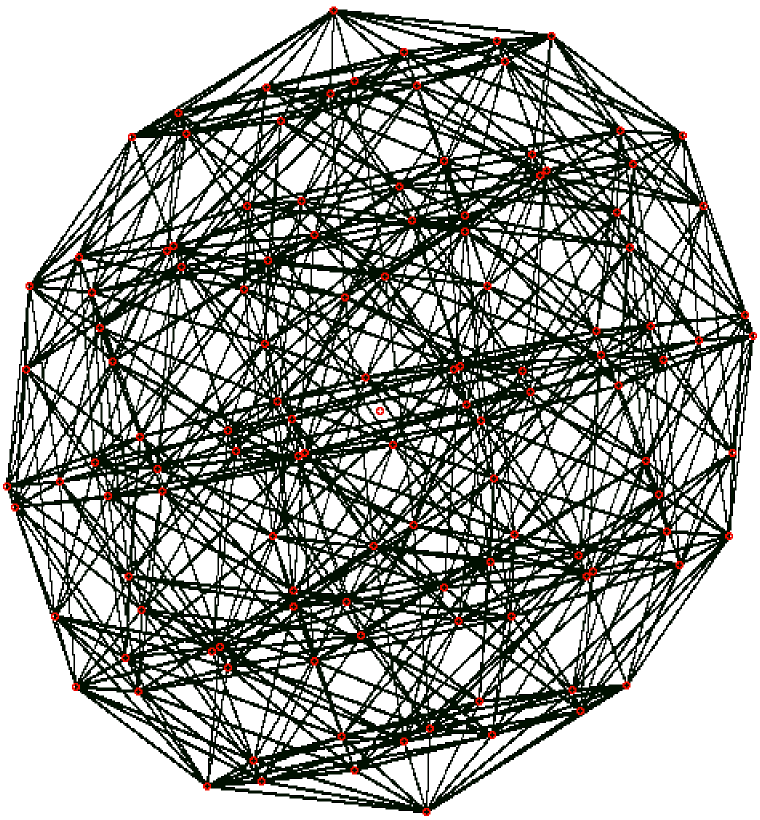
$$T_2\left(\frac{7+\sqrt{5}}{16},\frac{1}{2},\frac{7-\sqrt{5}}{16},\frac{2-\sqrt{5}}{8}\right).$$

$$|T_1T_2| = \sqrt{\left(\frac{7+\sqrt{5}}{16}-\frac{9-\sqrt{5}}{16}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7-\sqrt{5}}{16}-\frac{7-\sqrt{5}}{16}\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{5}}{8}-\frac{2-\sqrt{5}}{2}\right)^2} =$$

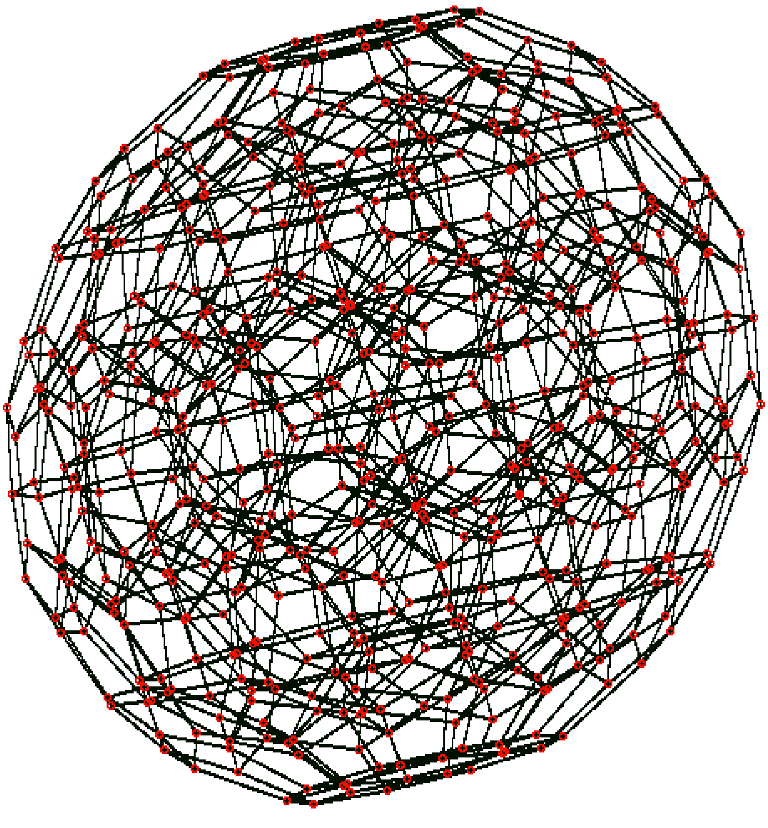
$$\sqrt{\left(\frac{-2+\sqrt{5}}{16}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{8}.$$

Добијена вредност $\frac{\sqrt{5}-1}{8}$ је дужина ивице политопа $\{5,3,3\}$ако је 4-коцка јединична, иначе је $\frac{\sqrt{5}-1}{8}a$ кад је дужина ивице 4-коцке a. Ова вредност је критеријум за повезивање темена пројекције политопа $\{5,3,3\}$.

На Сл. 19. и 20. приказане су пројекције политопа $\{3,3,5\}$ и $\{5,33\}$ за не-ке друге пројекцијске хиперравни и равни.



Сл 19.



Сл. 20.

15. Историјски осврт

На крају овог текста поменућемо укратко значајније математичаре и њихова дела у којима су уведени појмови вишедимензионалних простора и неких објеката у тим просторима.

Зачетници идеје о вишедимензионалним просторима и вишедимензио-налној геометрији су Артур Кели (1821-1895), Бернард Риман (1826-1866) и Лудвиг Шлефли (1814-1895). Шлефли се посебно бавио аналогним облицима полиедрима у вишедимензионалним просторима. Он те облике зове полишеми (у овом тексту политопи).

Шлефли је рођен у Грасвилу у Швајцарској. Школовао се у Берну, где је провео скоро читав радни век. У току школовања није добио задовољавајуће математичко образовање. После школовања предавао је друге области у школи у Туну и самостално учио математику. Озбиљније је почео да се бави математиком кад га је његов земљак Јакоб Штајнер упутио на дела Јакобија и Дирихлеа. Након тога постављен је за асистента на математици на универзитету у Берну где је остао до краја живота. Шлефли је истраживао у разним областима математике, али овом приликом усмеравамо нашу пажњу на дело „Теорија многоструке непрекидности" у којем он уводи и описује објекте који се обрађују у овом тексту. На овом делу Шлефли је радио око 1853 године. Ниједан швајцарски издавач није хтео да објави овај рад. Једино је један фрагмент овог дела објављен 1855 године у Француској и један 1858 у Енглеској. Међутим, ово објављивање није привукло пажњу математичара. У периоду од 1881 до 1900 године више математичара је дошло до сличних закључака Шлефлијевим, тако да је ово дело објављено у Швајцарској 1901 године (шест година после његове смрти).

Из овог периода поменућемо још неке од математичара који су дали допринос проучавању политопа. То су Форчхамер, Рудел, Хопе, Шлегел, Пухта, Сезаро, Корјел и Госет кога ћемо посебно поменути с обзиром да се овај текст бави и његовом конструкцијом политопа $\{3,3,5\}$.

Таролд Госет је рођен у 1869 године у Темс Дитону у Америци. Госет је по образовању био правник, а математиком се бавио из хобија. Наиме, после школовања започео је рад као адвокат, али у првим годинама свога рада није имао довољно клијената, па је почео рекреативно да се бави математиком, поготово вишедимензионалним објектима, покушавајући да сазна које правилне фигуре могу да постоје у $n-$просторима. После пребројавања правилних политопа, наставио је пребројавање „полуправилних". Он своје резултате записује у есеју „О правилним и полуправилним фигурама у простору од n димензија". Овај есеј Госет шаље издавачу Глејшеру 1897 године. Глејшер то показује математичару Барнсајду. Барнсајд никад није оценио овај рад и у писму Глејшеру из 1899 године каже да никад није имао времена да прочита више од половине овога рада. Ипак неке идеје из овог Госетовог рада појавиле су се у Барнсајдовом даљем раду. Глејшер се задовољио да објави Госетов рад у кратким цртама 1899 године. Овај објављени приказ остао је незапажен док га нису поново открили Елт и Коксетер. Госет одустаје од даљег бављења математиком и посвећује се праву. Написао је више књига о испитивању права својине. Умро је 1962 године.

Од значајнијих личности које су се бавиле правилним политопима поме-нимо Петера Хендрика Шутеа (1846-1913) холандског математичара који је био професор математике у Хронингену и Алишу Бул Стот (1860-1940) ко-ја је била ћерка познатог математичара логичара Џорџа Була. Њих двоје су најпре независно дошли до истих резултата о пресецима правилних поли-топа, а онда су заједно дошли до врло значајних резултата о пресецима правилних политопа. Алиша није стекла математичко образовање у школи, већ је самостално изучавала математику, јер је њен отац Џорџ Бул умро кад је она имала само четири године. Њена математичка (геометријска) интуи-ција, вероватно генетска, била је изузетна. Њена визуелизација и Шутеова математичка строгост су се изузетно допуњавале. Шуте је у овој области објавио рад „Политопи“ 1905 године. Алиша је правила тродимензионалне моделе пројекција 4-политопа.

Моделе тродимензионалних пројекција правилних политопа правио је и Пол Донкиен који је почео да проучава политопе у жељи да се ослободи потресних и изазовних пророчанских снова које је сањао око своје тридесете године живота. Те његове снове описао је у својој књизи „Експеримент са временом“ писац Дан. Иначе, Дан, као и Велс у књизи „Временска машина“, представљају четврту димензију као време и упадају у озбиљно погрешно схватање Теорије релативности.

Поменимо и Џон Фландерса Питрија (1907-1972) сина чувеног египтолога Вилијама Фландерса Питрија. Џон Питри је још као ученик показао изузетне математичке способности. Имао је способност да одговори на питања о врло компликованим четвородимензионалним фигурама уз одређену „визуелизацију“. За нашу тему значајне су његове конструкције дводимензионалних пројекција политопа $\{3,3,5\}$ и $\{5,3,3\}$ које је извео на папиру уз помоћ уобичајеног геометријског прибора. Ове се пројекције могу видети у [5].

Овај кратки историјски преглед ћемо завршити са Харолдом Скот Мекдоналд Коксетером, без чијег дела је у ово наше време немогуће расправљати о правилним политопима. Харолд Скот Мекдоналд Коксетер (9.2.1907.- 31.3.2003.) био је Британац по рођењу, али је у свету познат као канадски геометричар. Коксетер се сматра једним од највећих геометричара двадесетог века. Рођен је у Лондону, али је највећи део свог живота про-вео у Канади. У својој младости је компоновао музику и био већ са десет година вешт пијанист. Сматрао је да су математика и музика тесно повезане. На ту тему објавио је 1962 године чланак „Математика и музика“ у канадском музичком часопису. Иначе, његово представљање политопа графовима подсећа на нотни систем. Провео је 60 година на универзитету у Торонту и објавио 12 књига. У матеметичком свету најпознатији је његов рад на правилним политопима и вишедимензионалној геометрији, Био је поборник класичног приступа геометрији тј. синтетичкој методи, али је користио и аналитичку геометрију.

Коксетерова књига „Правилни политопи“ представља полазну основу за будућа истраживања геометрије вишедимензионалних простора. У књизи су сакупљена сва значајнија знања у овој области од њихових почетака у деветнаестом веку па до друге половине двадесетог века. Резултати, већине математичара који су ову област стварали, су систематизовани и допуњени његовим резултатима, тако да представљају потпун систем знања. По томе представља материјал раван Еуклидовим „Елементима“. Он каже да би та књига могла бити схваћена као наставак „Елемената“. Коксетеров рад би се могао упоредити и са Кошијевом систематизацијом Математичке реалне и комплексне анализе. Ова књига није написана као уџбеник тј. није подеље-на наставне јединице, али је написана нешто једноставнијим математичким и метаматеметичким језиком у којем постоји методички приступ од једно-ставнијих према сложенијим појмовима. Нови појмови се најпре уводе по аналогији према већ познатим појмовима, а онда се дају строжије формула-ције. Илустрације (слике) су задовољавајуће, али су могле бити детаљније како би се читалац лакше упутио у „визуелизацију“ објеката из виших простора. Ова књига представља главни извор за нашу тему „Конструкција правилних конвексних 4-политопа и њихових дводимензионалних пројекција“. На крају поменимо још нека Коксетерова дела: Нееуклидска геометрија, Пројективна геометрија, Правилни комплексни политопи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Владимир Телебак: *Нумеричке карактеристике 4-политопа*, МАТ-КОЛ (Бања Лука), XV(1)(2009), 67-107

[2] Душан Аднађевић: *Топологија*, Научна књига, Београд, 1980

[3] Ратко Динић: *Правилни и полуправилни полиедри*, Народна библиотека „Данило Киш“, Теслић, 2008

[4] Ратко Динић: *Полуправилни полиедри друге врсте*, МАТ-КОЛ (Бања Лука), Посебна издања, Број 12 (2009).

[5] H. S. M. Coxeter: *Regular Polytopes* (2nd edition), The MacMilan Company, New York 1963.

Примљено у редакцију 15.04.2017; Тевидирана верзија 01.05.2017;
Доступно на интернету 08.05.2017.