MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXIII (2)(2017), 135-139 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1702135M

JOŠ ŠEST RAZLIČITIH DOKAZA JEDNE NEJEDNAKOSTI

(Yet six different proofs of one algebraic inequality)

Dragoljub Milošević

Gornji Milanovac, Srbija
e-mail: *dramil947@gmail.com*

Sažetak. U [2] je dat jedan dokaz algebarske nejednakosti

$$\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3} \geq a^2+b^2+c^2\,,\ (a,b,c>0),$$

a u ovom radu dajemo još šest raznih dokaza te nejednakosti.

Ključne riječi: algebarska nejednakost, aritmetičko-geometrijska nejednakost, uopštenje.

Abstract. In [2] is gived one proof the algebraic inequality
$$\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3} \geq a^2+b^2+c^2,\ (a,b,c>0)$$
and in this paper we give yet six different proofs above inequality.

Key words: algebraic inequality, AM – GM inequality, generalization.

AMS Subject Classification (2010): 97 F 40
ZDM Subject Classification (2010): F 50, N 50

U [2] je dokazana sljedeća nejednakost

$$\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3} \geq a^2+b^2+c^2, \tag{1}$$

gdje su a, b, c pozitivni brojevi.

Ovdje ćemo prikazati još šest raznih dokaza nejednakosti (1), a potom i dokaz njenog uopštenja (generalizacije):

$$\frac{a^{2k+1}}{b^{2k-1}}+\frac{b^{2k+1}}{c^{2k-1}}+\frac{c^{2k+1}}{a^{2k-1}} \geq a^2+b^2+c^2, k \geq 1. \qquad (2)$$

Dokaz 1. Na osnovu poznate nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja možemo pisati

$$\frac{a^5}{b^3}+ab+b^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^5}{b^3}\cdot ab\cdot b^2}=3a^2\ ,$$

sa jednakošću samo ako $a=b$.

Analogno imamo

$$\frac{b^5}{c^3}+bc+c^2 \geq 3b^2 \text{ i } \frac{c^5}{a^3}+ca+a^2 \geq 3c^2.$$

Sabiranjem posljednje tri nejednakosti dobijamo

$$\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}+ab+bc+ca+a^2+b^2+c^2 \geq 3a^2+3b^2+3c^2,$$

tj.

$$\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3} \geq 2(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca). \qquad (3)$$

S obzirom da je tačna nejednakost $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ ekvivalentna sa

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca\ , \qquad (4)$$

iz (3) slijedi tražena nejednakost (1).

Dokaz 2. Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za četiri pozitivna broja, imamo

$$\frac{a^5}{b^3}+ab+ab+ab \geq 4\sqrt[4]{\frac{a^5}{b^3}\cdot ab\cdot ab\cdot ab} \geq 4a^2\ ,$$

$$\frac{b^5}{c^3}+bc+bc+bc \geq 4b^2$$

i

$$\frac{c^5}{a^3}+ca+ca+ca \geq 4c^2,$$

pa je

$$\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}+3(ab+bc+ca) \geq 4(a^2+b^2+c^2)\ .$$

Odavde, zbog (4), slijedi željena nejednakost (1).

Dokaz 3. U $[3]$ autor je dokazao sljedeću nejdnakost za pozitivne brojeve a, b, c, x, y, z :

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}. \tag{5}$$

Na osnovu ove nejednakosti slijedi

$$\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3} = \frac{(\frac{a^3}{b})^2}{ab}+\frac{(\frac{b^3}{c})^2}{bc}+\frac{(\frac{c^3}{a})^2}{ca} \geq \frac{(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a})^2}{ab+bc+ca}$$

$$=\frac{\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}}{ab+bc+ca}(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}). \tag{6}$$

Budući da je (v. $[2]$, str. 279; $[4]$, str. 45)

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq ab+bc+ca \text{ i } \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq a^2+b^2+c^2,$$

iz (6) neposredno proizlazi nejednakost (1).

Dokaz 4. Data nejednakost je ekvivalentna sa

$$\frac{(\frac{a^2}{b})^3}{a}+\frac{(\frac{b^2}{c})^3}{b}+\frac{(\frac{c^2}{a})^3}{c} \geq a^2+b^2+c^2. \tag{7}$$

U $[6]$ autor je dokazao sljedeću nejednakost

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}, (a, b, c, x, y, z > 0). \tag{8}$$

Primjenom ove nejednakosti dobijamo

$$\frac{(\frac{a^2}{b})^3}{a}+\frac{(\frac{b^2}{c})^3}{b}+\frac{(\frac{c^2}{a})^3}{c} \geq \frac{(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})^3}{3(a+b+c)}. \tag{9}$$

Sada, zbog ($[2]$str. 16 ; $[5]$, str. 137)

$$\frac{a^2}{\boldsymbol{b}}+\frac{\boldsymbol{b^2}}{\boldsymbol{c}}+\frac{\boldsymbol{c^2}}{\boldsymbol{a}} \geq a+b+c \text{ i } (\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2),$$

iz (9) slijedi nejednakost (7), a samim tim i nejednakost (1).

Dokaz 5. Na osnovu nejednakosti (8) je

$$\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3} = \frac{a^6}{ab^3}+\frac{b^6}{bc^3}+\frac{c^6}{ca^3} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{3(ab^3+bc^3+ca^3)}. \tag{10}$$

Ako u poznatu nejednakost $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ stavimo

$$x = a^2+bc-ac, y = b^2+ac-ab \text{ i } z = c^2+ab-bc,$$

dobijamo $(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a\,b^3+bc^3+ca^3)$, tj.

$$ab^3+bc^3+ca^3 \leq \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2. \tag{11}$$

Iz nejednakosti (10) i (11) proizlazi tražena nejednakost (1).

Dokaz 6. Ako primijenimo nejednakost (5), imamo

$$\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3} = \frac{(a^3)^2}{ab^3}+\frac{(b^3)^2}{bc^3}+\frac{(c^3)^2}{ca^3} \geq \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{ab^3+bc^3+ca^3}. \tag{12}$$

Kako je ([2], str. 111)

$$(a^3+b^3+c^3)^2 \geq \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^3,$$

iz nejednakosti (11) i (12) dobijamo nejednakost (1).

Sada prelazimo na dokaz uopštene nejednakosti (2). Koristeći ideju iz dokaza 1, imamo za $k+1$ pozitivnih brojeva :

$$\frac{a^{2k+1}}{b^{2k-1}}+ab+b^2+b^2+\cdots+b^2 \geq$$

$$(k+1)\sqrt[k+1]{\frac{a^{2k+1}}{b^{2k-1}}\cdot ab\cdot b^2\cdot b^2\cdot \ldots \cdot b^2} = (k+1)a^2,$$

$$\frac{b^{2k+1}}{c^{2k-1}}+bc+c^2+c^2+\cdots+c^2 \geq (k+1)b^2$$

I

$$\frac{c^{2k+1}}{a^{2k-1}}+ca+a^2+a^2+\cdots+a^2 \geq (k+1)c^2.$$

Poslije sabiranja ove tri nejednakosti dobijamo

$$\frac{a^{2k+1}}{b^{2k-1}}+\frac{b^{2k+1}}{c^{2k-1}}+\frac{c^{2k+1}}{a^{2k-1}}+ab+bc+ca+(k-1)(a^2+b^2+c^2) \geq$$

$$(k+1)(a^2+b^2+c^2),$$

tj.

$$\frac{a^{2k+1}}{b^{2k-1}}+\frac{b^{2k+1}}{c^{2k-1}}+\frac{c^{2k+1}}{a^{2k-1}} \geq 2(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca). \tag{13}$$

Konačno, iz nejednakosti (13) i (4) slijedi nejednakost (2).

Napomena 1. Jednakost u (2) vrijedi samo ako $a = b = c$ i $k = 1$.

Napomena 2. Specijalno, za $k = 2$ iz nejednakosti (2) implicira nejednakost (1).

LITERATURA

[1] Arslanagić, Š.: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Cvetkovski, Z.: *Inequalities (Theorems, Techniques and Selected Problems*), Springer - Verlag, Berlin/Heidelberg, 2012.

[3] Milošević, D.: *Jedna nejednakost i njene primene*, Tasngenta (beograd); 55/3 (2008/09), 8 – 10.

[4] Milošević, D.: *O jednoj algebarskoj nejednakosti*, MAT-KOL (Banja Luka), XXIII (1) (2017), 47 – 47.

[5] Milošević, D.: *Prilog za članak „Neke zanimljive algebarske nejednakosti“,* MAT-KOL(Banja Luka), XXII (2) (2016), 135 – 139.

[6] Milošević, D.: *Tragom jedne algebarske nejednakosti*, Tangenta (Beograd), 86/2 (2016/17),12 -15.

Primljeno u redakciju 15.04.2017; Dostupno na internetu 08.05.2017.