MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN: 0354-6969 (p), ISSN: 1986-5228 (o)
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
Vol. XXIII (3)(2017), 195-198
DOI: 10.7251/1703195M

PRILOG UZ ČLANAK
,,NEOBIČNI BROJEVI I JEDNAKOSTI”

Josip Matejaš, Marija Kovačić

Sažetak. U ovom prilogu nastavljamo potragu za ,,najprostijim prostim brojevima” započetu u [**1**]. Potičemo i čitatelje da se uključe u potragu i tako doprinesu boljem uvidu u ovaj za sada otvoreni problem.

In this paper, we continue the search for ,,the most prime prime numbers” which we started in [1]. We encourage readers to engage in search and thus contribute to a better insight into this open problem.

1. Uvod

Pod pojmom ,,najprostiji prosti brojevi” (nppb) podrazumijevamo proste brojeve koji postupnim izostavljanjem jedne po jedne znamenke s desna ostaju i dalje prosti. Na primjer broj 373 393 je prosti broj. Izostavljanjem znamenaka s desna dobivamo brojeve 37 339, 3 733, 373, 37 i 3 koji su svi prosti. U radu [**1**, poglavlje 3] autori dokazuju da takvih brojeva ima točno 27 i sve ih eksplicitno navode. To su

53	3 793	31 193	593 993	7 393 933
317	3 797	31 379	719 333	23 399 339
599	7 331	37 397	739 397	29 399 999
797	23 333	73 331	739 399	37 337 999
2 393	23 339	373 393	2 399 333	59 393 339
			7 393 931	73 939 133

Tokom pisanja rada profesor Goran Djanković[1] sugerira da se ispita postojanje ,,n–najprostijih prostih brojeva” (n-nppb) za pojedini $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ovi brojevi dani su nešto oslabljenom definicijom: postupnim izostavljenjem $n-1$ znamenke s desna (n je fiksan) svi dobiveni brojevi su prosti. Dakle, ne izostavljaju se sve,

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11D41, 11N05, 11Z05.
Key words and phrases. Najprostiji prosti brojevi.

[1]Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija

već samo određeni broj znamenaka, tako da zadnji dobiveni broj ne mora biti jednoznamenkasti. Prirodno se javljaju sljedeća dva pitanja.

(1) Da li postoje n-npp za svaki prirodni broj n?
(2) Ako postoje, kako ih odrediti (specijalno, kako odrediti najmanji takav broj)?

Pogledajmo u nastavku ova pitanja malo detaljnije.

2. Tražimo najprostije proste brojeve

U skladu s navedenom definicijom svaki n-nppb, postupnim izostavljanjem $0, 1, 2, \ldots, n-1$ znamenke s desna, generira n prostih brojeva. Obrnuto, počevši s najmanjim tako dobivenim brojem, postupnim dodavanjem $0, 1, 2, \ldots, n-1$ znamenke dobivamo n prostih brojeva završavajući s polaznim n-nppb. To je u suštini postupak kojim dolazimo do takvih brojeva. Jasno je da su znamenke koje treba dodavati iz skupa $\{1, 3, 7, 9\}$. Posebno su zanimljivi n-nppb koji se daljim dodavanjem ili izostavljanjem znamenki više ne mogu proširiti na $(n+1)$-nppb. Takve brojeve nazvat ćemo ,,pravi n-nppb" a najmanjeg od njih označit ćemo s p_n. Tako je na primjer $p_3 = 317$ jer generira 3 prosta broja, $317 \to 31 \to 3$, a ne može se proširiti (svi brojevi 3170, 3171, 3172, ..., 3179 su složeni) i to je ujedno najmanji takav 3-nppb. Postavljamo sljedeći zadatak.

ZA ZADANI n KRENIMO U POTRAGU ZA BROJEM p_n !

Pogledajmo prvo $n = 1$. Tražimo najmanji prosti broj koji izostavljenjem zadnje znamenke ili dodavanjem bilo koje znamenke nije više prosti. Naime, izostavljanjem $n - 1 = 0$ znamenaka dobije se samo jedan broj i to je on sam. Nakon kratke potrage dobivamo da je to broj 89. Provjerimo: izostavimo 9 dobivamo složeni broj 8, dodamo jednu znamenku, svi brojevi 890, 891, 892, ..., 899 su složeni. Sljedeći takav broj je 107 itd. Kako je 89 najmanji takav broj, dobili smo $p_1 = 89$.

Za $n = 2, 3, \ldots, 8$ zadatak je riješen. Ti se brojevi nalaze među 27 nppb iz gornjeg popisa, pa ih, zajedno sa p_1, izdvajamo u sljedećim tablicama.

n	p_n
1	89
2	53
3	317
4	2 393

n	p_n
5	23 333
6	373 393
7	2 399 333
8	23 399 339

Zanimljivo je da je $p_2 < p_1$. Naime 53 generira dva prosta broja, 53 i 5, a svi brojevi 530, 531, 532, ..., 539 su složeni, dok 89 generira samo jedan prosti broj, 89.

Nastavljamo potragu za $n > 8$. Postupak traženja takvih brojeva može se provesti na isti način kao u [**1**, poglavlje 3], dodavanjem znamenki 1,3,7,9 na zadnji prosti broj koji sada više nije jednoznamenkasti. Dakle, treba početi s dvoznamenkastim, pa troznamenkastim itd. prostim brojevima i redom dodavati znamenke 1,3,7,9. Napomenimo i ovdje da se za provjeru, da li je neki broj prost ili nije, može koristiti neka od postojećih vrlo efikasnih internetskih verzija programa (prime number checker) čime cijeli posao postaje i zabavan. Pa počnimo. U skladu s uvodnim popisom nppb treba ispitati samo sljedeće dvoznamenkaste proste brojeve: 11, 13, 17, 19, 41, 43, 47, 61, 67, 83 i 97 (preostali brojevi čine vodeći par znamenki u brojevima s popisa a 89 je naveden u tabeli). Evo što se dobije.

$$11 \to 113 \ (n=2), \ 13 \to 13\,999\,133 \ (n=7), \ 17 \to 17\,333 \ (n=4)$$
$$19 \to 1\,979\,339\,333 \ (n=9) \ \text{ i } \ 1\,979\,339\,339 \ (n=9)\,.$$

Dakle broj 19 proširivanjem dovodi do dva deseteroznamenkasta 9-nppb (koja uzastopnim izostavljanjem 8 znamenki s desna, jednu po jednu, daju sve proste brojeve, zadnji je 19). Manji od njih je

$$p_9 = 1\,979\,339\,333\,.$$

Nastavljajući dalje dobivamo

$$41 \to 419 \ (n=2), \ 43 \to 4\,391\,339 \ (n=6), \ 47 \to 47\,933 \ (n=4) \text{ i } 47\,939 \ (n=4),$$
$$61 \to 6\,133\,373 \ (n=6), \quad 67 \to 6\,733\,919 \ (n=6) \text{ i } 6\,733\,997 \ (n=6),$$
$$83 \to 839 \ (n=2), \quad 97 \to 9719 \ (n=3).$$

Pokušajmo nastaviti još malo sa troznamenkastim prostim brojevima. Imamo

$$101 \to 1\,013\,993 \ (n=5) \text{ i } 1\,019\,399 \ (n=5), \quad 103 \to 103\,997\,939\,939 \ (n=10)$$
$$107 \to 107 \ (n=1), \quad \text{itd. itd.}$$

Tako smo dobili i sljedeći p_n za $n = 10$. To je dvanaesteroznamenkasti broj

$$p_{10} = 103\,997\,939\,939\,,$$

koji, na ranije opisani način, generira 10 prostih brojeva. Čitateljima prepuštamo nastavak potrage.

3. Zaključak

U prethodnom poglavlju dali smo jedan od mogućih odgovora na pitanje (2) iz Uvoda. Traženje takvih brojeva može biti zanimljiv istraživački rad za studente matematike, informatike ili druge zainteresirane čitatelje. Smatramo da bi takvo detaljnije istraživanje sigurno dalo zanimljive spoznaje.

Međutim glavno pitanje (1) ostaje neodgovoreno: da li postoje n-nppb (a time i p_n) za svaki prirodni n? Da li na primjer možemo zamisliti prosti broj kome ćemo izostavljati 1, 2, …, 99, 100 znamenki s desna a rezultat će uvijek biti prosti broj? Ako smo to postigli za $n \leqslant 10$, a prostih brojeva ima beskonačno mnogo, možda zaista postoji?! Ali, umjesto odgovora za sada ostaje veliki upitnik. Ovo pitanje ostaje i dalje otvoreno. Prirodni brojevi su poznati već tisućljećima a još uvijek skrivaju tajne. Neke od njih će ostati neotkrivene još tisućljećima. Možda ne i ova?

Literatura

[1] J. Matejaš, M. Kovačić, *Neobični brojevi i jednakosti*, MAT-KOL (Banja Luka), XXIII (2) (2017), 79-87.
[2] Stari brojevi *Matematički list*, Savez društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije, Beograd, 1969–1974.
[3] C. C. Clawson, *Mathematical mysteries: the beauty and magic of numbers*, Springer, 1996.
[4] S. Devi, *The book of numbers*, Orient Paperbacks, Delhi, 1984.
[5] Z. Jakobović, *Brojevi i brojke*, Kiklos - krug knjige, Zagreb, 2016.

Primljeno u redakciju 05.05.2017. Dostupno online 15.05.2017.

Ekonomski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, Republika Hrvatska
E-mail address: jmatejas@efzg.hr, marija.kovacic121@gmail.com