MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXIII (3)(2017), 199-215 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1703199S

Neodređeni oblici pomoću GSP-a i znanstvenog kalkulatora

Petar Svirčević

Zagreb, Hrvatska
e-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr

Sažetak. U ovome članku ćemo se baviti zadacima, kako naslutiti vrijednosti od sedam *neodređenih oblika*, ali tako da najprije damo svojstva funkcija, do kojih se može doći primjenom matematičke analize. Zatim ćemo numeričkim izračunom potvrditi dane tvrdnje. Grafove funkcija ćemo napravili pomoću programa *GSP* (*The Geometer's Sketchpad*), jer je to jednostavni edukativni program dinamičke geometrije. Numerički izračun će biti izveden pomoću *znanstvenog kalkulatora* (*scientific calculator*), koji je instaliran s *Windowsima*. Naglasimo, da se ponekad uzastopnim primjenama *l'Hospitalovog pravila* ne može doći do cilja, pa je onda u praksi (fizika, kemija, biologija, ekonometrija, ...) pogodna ova numerička metoda. Ako bi htjeti izbjeći ovu metodu, tada treba provesti kompliciraniju teorijsku analizu.

Ključne riječi. Neodređeni oblici, The Geometer's Sketchpad, znanstveni kalkulator.

The Indeterminate Forms Using GSP and The Scientific Calculator

Abstract. In this article, we will deal with assignments to summon the values of seven *indeterminate forms*, but first we give function properties, which can be obtained by applying mathematical analysis. Then we will validate the given statements by numerical calculation. The graph function is done using *GSP* program (*The Geometer's Sketchpad*), as it is a simple educational dynamic geometry program. Numerical calculations will be performed using a *scientific calculator*, which is installed with *Windows*. Let's emphasize that sometimes the consecutive applications of the *l'Hospitals policy* cannot reach the goal, so then this numerical method is appropriate in practice (physics, chemistry, biology, econometrics, ...). If you would like to avoid this method, then complicated theoretical analysis should be carried out.

Keywords. The indeterminate forms, the geometer's sketchpad, the scientific calculator.

Napomena 1. Svakako, da se umjesto *GSP*-a mogu primjeniti i drugi programi (npr.: *Matlab, Maple* V, *Mathematica*,...) za provjeru danih tvrdnji, koje se odnose na neodređene oblike. Pretpostavka za čitanje članka je poznavanje uglavnom elementarne matematičke analize. Nadalje recimo, da ćemo u ovome članku primijenili oznaku $\langle\ \rangle$ za otvoreni interval a ( ) za koordinate točke.

Kolokvijalnost i nedefiniranost u matematici

Kolokvijalnost je zastupljena u gotovo svim naukama pa tako i u matematici. Taj način izražavanja je češći u „nižoj“ matematici nego u „višoj“, a to su uglavnom mnemotehnički razlozi. Tako npr. kod uvođenja trigonometrije vezane za pravokutni trokut se kaže, da je sinus šiljatog kuta jednak omjeru tome kutu nasuprotne katete i hipotenuze, a trebalo je reći, da je sinus mjere šiljatog kuta u stupnjevima (ili radijanima ili gradima) jednak omjeru duljine nasuprotne katete i duljine hipotenuze. Nadanje, vezano za navedeni pojam dajemo još samo jedan primjer. Naime, često kažemo da je $y=kx+l$ pravac, a trebalo bi reći, da je to jednadžba pravca, jer je pravac zapravo osnovna tvorevina *euklidske geometrije* koja se ne definira. Tom kostatacijom nemogućnosti definicije pravca *Hilbert* je revidirao *Euklida*. Naime, ako bi pokušali definirati pravac pomoću ravne beskonačno duge crta (ili na neki drugi način), tada bi takva definicija generirala cirkulus viciozus. Dodajmo, da isti status imaju točka i ravnina, dakle i te tvorevine ne definiramo, već ih ad hoc prihvaćamo kao jasne.

Sada ćemo navesti tri primjera, kada tri smislene definicije formalno proširujemo u svrhu većih operativnih mogućnosti. Tako radeći s potencijama, znajući što predstavlja baza a što eksponent potencije, dodajemo još, da je po definiciji $a^0=1$ ako je $a\neq 0$. To je napravljeno zbog toga, da se formalno mogu izvoditi osnovne operacije s potencijama uz još neke dodatke. Nadalje, navest ćemo, da je broj permutacija konačnog broja elemenata dan s vezom $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n,$ gdje je $n\in\mathbb{N}$. No, nama bi iz praktičnih razloga trebao i oblik $0!$, ali da ima vrijednost 1, pa onda definiramo da je $0!=1$. Svakako, da taj oblik ne možemo interpretirati u smislu permuturanja elemenata, ali ako ga uvažimo, tada imamao zgodan zapis da je npr. $e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$ Međutim, u starijoj literaturi, kada ovaj oblik nije još bio definiran (npr. [3]), tada je navedeni red zapisan u obliku $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$ I konačno, zanamo značenje i zapis binomnog koeficijenta, koji glasi $\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$, a ima svojstva $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ i $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, gdje je $n,k\in\mathbb{N}$ i $n>k$. Međutim, da bi imali funkcionalnu i

„estetsku“ primjenu morali smo još definirati da je $\binom{n}{0}=1$, pa čak definiramo i $\binom{0}{0}=1$ da bi Pascalov trokut imao „vrh“, jer je $(a\pm b)^0=\binom{0}{0}=1$ ako je $a\pm b\neq 0.$ Primijenimo li izneseno npr. na identitet $(a\pm b)^{10}\equiv a^{10}\pm 10a^9b+45a^8b^2\pm\ldots+b^{10}$, tada dobivamo oblik, koji se lako pamti

$$(a\pm b)^{10}\equiv\binom{10}{0}a^{10}b^0\pm\binom{10}{1}a^9b^1+\ldots+\binom{10}{10}a^0b^{10}.$$

No, bio bi problem, da trebamo ispisati razvoj ovog oblika i pomoću Pascalovog trokuta, čiji su elementi prikazani u razvijenom obliku, a ne pomoću binomnih koeficijenata, dakle morali bi ispisati 11 redi toga „trokuta“. I na kraju vidimo, da je korisno nekiput definicije proširiti.

Neodređeni oblici

Neprekinutosti i granične vrijednosti funkcije spadaju u temeljne pojmove matematičke analize, i zato o tome govoriti sažeto je isto kao „hodati po užetu“. Svakako, da u tome području kolokvijanlo izražavanje može generirati velike zabune. Mi ćemo ipak sada pokušati iznijeti najbitnije činjenice vezane za neke neodređene oblike. Tih neodređenih oblika ima sedam i to su:

$$\infty-\infty,\,0\cdot\infty,\,0/0,\infty/\infty,\,0^0,\,\infty^0,\,1^\infty.$$

Neka su dane funkcije $f:D_f\to K_f$ i $g:D_g\to K_g$, gdje je $x_0\in D_f\cap D_g$. Nadalje, neka je su one neprekinute za x_0 i neka je $f(x_0)=g(x_0)=0,$ onda kažemo da funkcija $\frac{f(x)}{g(x)}$ ima neodređeni oblik $\frac{0}{0}$. Pretpostavljamo, da je x_0 jedini za koji je $g(x_0)=0.$ Nađemo li $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, ako taj limes postoji, tada ćemo reći da smo „odredili vrijednost“ toga neodređenog oblika, odnosno kvocijentne funkcije $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. Svakako, da je $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, jer su te funkcije neprekinute za $x=x_0,$ pa iz toga slijedi da je i funkcija $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ za $x=x_0$ definirana i neprekinuta.

Jasno je, da bi mogli analogne diskusije napraviti i za ostale neodređene oblike. No, moramo biti oprezni kod zapisa ovih oblika, jer bi mogli doći do paradoksa. Naime, kada bi jednostavno eksplicite pisali da je

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0}=...=2 \text{ i } \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{0}{0}=...=3,$$

tada bi na osnovu svojstva znaka '=' mogli zaključiti da je $2=3$, a to je paradoks. Naime, prisjetimo se, da je binarni predikat „ = “ (jednakost) *relacija ekvivalencije* (nećemo davati strogu definiciju), zato jer je: *refleksivna*, dakle $a=a$; *simetrična*, dakle $(a=b)\Rightarrow(b=a)$ i *tranzitivna*, dakle $((a=b)\,\&\,(b=c))\Rightarrow(a=c)$. Na osnovi iznesenog zgodno je onda neodređeni oblik stavljati u zagradu, da samo imamo na umu o kojem se neodređenom obliku radi, ali nećemo primijenjivati svojstvo tranzitivnosti jednakosti na te oblike, a to znači da nećemo time dolaziti do paradoksa. Dakle, prijašnje primjere ćemo onda pisati u obliku

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=...=2 \text{ i } \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=...=3.$$

No, ako se radi o graničnoj vrijednosti iste funkcije za istu apscisu, tada možemo formalno pisati da je $(\infty-\infty)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ kao u Z1. Svakako, da moramo biti oprezni i s graničnim vrijednostima $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ i $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, jer eksplicitni zapisi $\frac{1}{0}=\infty$ i $\frac{1}{\infty}=0$ također mogu dovesti do paradoksa. Napomenimo još, da je $\lim_{x\to\infty}0^x=0$ i $\lim_{x\to\infty}0^{-x}=\infty$.

Analizirajući funkcije neki put moramo razlikovati: $+0$ od -0, $2+0$ od $2-0$,… Tako npr. dobivamo da je

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}=...=+\infty \text{ i } \lim_{x\to -1+0}\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}=...=-\infty,$$

dakle beskonačno mali pomak lijevo ili desno bitno mijenja vrijednost funkcije, premda se tu ne pojavljuju neodređeni oblici. U strogoj analizi mi bi umjesto -1 ± 0 uzimali $-1\pm\Delta x$. Dakle, drugi limes smo računali ovako:

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1+0}\frac{(2x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to -1+0}\frac{2x+1}{x+1}=$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{2x+1}{x+1}=\left(\frac{-2+0+1}{-1+0+1}\right)=\left(\frac{-1}{-1+0-1}\right)=\left(\frac{-1}{+0}\right)=-\infty.$$

Da nismo razlikovali lijevo i desno približavanje broju $x=-1$, tada bi izravnim uvrštavanjem tog broja dobili samo jednu graničnu vrijednost. Naime, kada bi nacrtali pomoću GSP-a graf funkcije $f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$, tada bi vidjeli da je za $x=-1$ funkcija razlomljena, tj. pravac $x+1=0$ je vertikalna asimptota za obje grane grafa te funkcije. Prema tome ovom plauzibilnom metodom postupak traženja granične vrijednosti funkcije se ubrzava.

Sada idemo na rješavanje zadataka i primijenu izrečenog o neodređenim oblicima.

Zadatak 1.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+5x+8} - \sqrt{x^2+x+2}) = (\infty-\infty) = \pm 2. \tag{1}$$

Rješenje Z1. Matematička analiza. Prikaz funkcije $f(x)$ je dan na Sl.1. Nabrojat ćemo neka njezina svojstva. Domena te funkcije je $\mathbb{D}=\mathbb{R}$, a kodomena je $\mathbb{K}=\langle -2,2\rangle$. Možemo pokazati, da je nad čitavom domenom $f'(x)>0$, pa jednadžba $f'(x)=0$ nema realnih rješenja, dakle ne postoje lokalni ekstremi. Slika sugerira, da je $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm 2$, a to znači da imamo dvije asimptote paralelne sa osi x, čije su im jednadžbe $as_{1,2}\ ...\ y\mp 2=0$. I konačno, točke $S_x(-3/2,0)$ i $S_y(0,\sqrt{2})$ su sjecišta krivulje s koordinatnim osima. Sada ćemo postupcima matematičke analize dokazati (1).

Ako racionaliziramo brojnik funkcije (nazivnik je 1), tj. riješavamo se korijena, tada slijedi

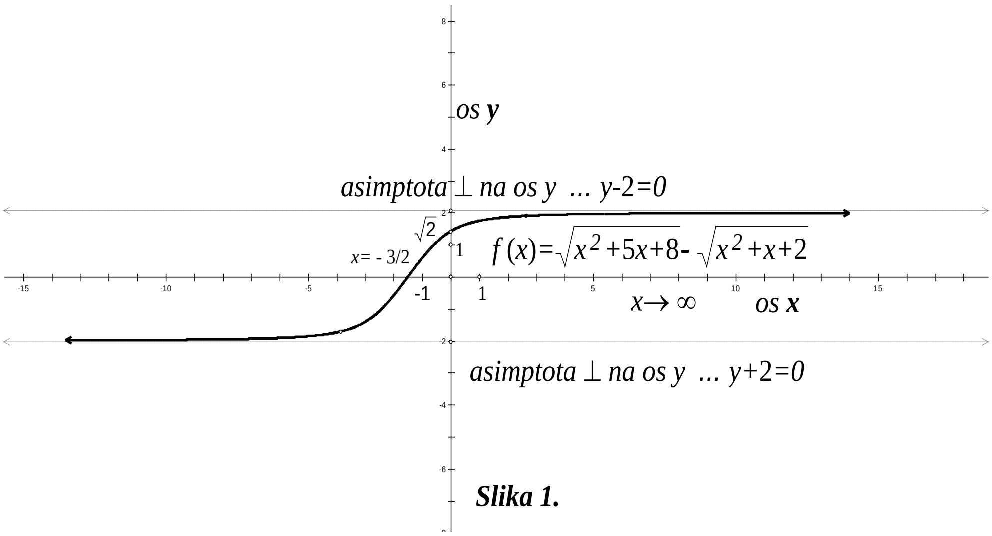
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = ... = (\infty-\infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x+6}{\sqrt{x^2+5x+8}+\sqrt{x^2+x+2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+6/x}{\sqrt{1+5/x+8/x^2}+\sqrt{1+1/x+2/x^2}} = \frac{4}{1+1} = 2.$$

No, to smo mogli dobiti i primjenom *l'Hospitalovog pravila* nakon racionalizacije brojnika. Ako pogledamo izneseno, tada iz dobivenih rezultata slijedi formalni identitet $\infty-\infty=\dfrac{\infty}{\infty}=2$, koji je vezan za zadanu funkciju i za točno određenu vrijednost iz njezine domene. Svakako, postoje i druge funkcije za koje vrijedi taj formalni identitet. Da bi dobili i drugi limes, onda možemo postupati ovako:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+5x+8} - \sqrt{x^2+x+2}) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-5x+8} - \sqrt{x^2-x+2}) = ... = -2,$$

dakle zamijenili smo x sa $-x$.



Slika 1.

Numerički izračun. Ako sada uzmemo da je x_0 veliki broj, tada ćemo dobiti da je $f(x_0) = 1.999...9a...(a \neq 9)$, a to znači da je (1) vjerojatno točno. Pokažimo, da pretpostavka ima smisla, ako doslovno ukucamo u kalkulator sve veći i veći *x* računajući $f(x)$, pa tako dobivamo:

$$f(10^1) = 1.986\ldots, f(10^2) = 1.99983\ldots, f(10^3) = 1.\underbrace{9\ldots9}_{5\,dec.}8\ldots, f(10^6) = 1.\underbrace{9\ldots9}_{11\,dec.}8\ldots,$$
$$f(10^9) = 1.\underbrace{9\ldots9}_{17\,dec.}8\ldots \to 2.$$

Dakle, „čistim“ računanjem razumno je očekivati, da je (1) točno, a sve se lijepo „vidi“ na Sl.1. Slično dobivamo:

$$f(-10^1) = -1.9758\ ...,\ f(-10^2) = -1.99981\ ...,$$

$$f(-10^3) = -1.\underbrace{9\ldots9}_{5\,dec.}8\ldots, f(-10^6) = -1.\underbrace{9\ldots9}_{11\,dec.}8\ldots, f(-10^9) = -1.\underbrace{9\ldots9}_{17\,dec.}8\ldots \to -2.$$

□

Z***adatak 2.***

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = (\infty\cdot 0) = 2. \tag{2}$$

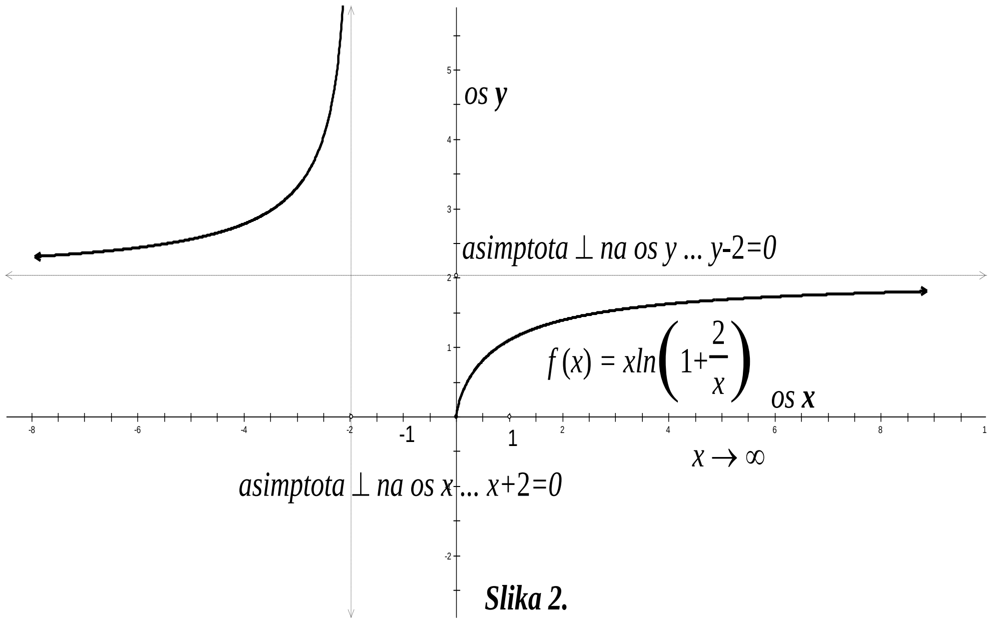
Rješenje Z2. Matematička analiza. Graf funkcije $f(x)$ je prikazan na Sl.2., a sve to možemo opravdati analizom dane funkcije. Možemo pokazati, da je domena te funkcije $\mathbb{D} = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$, a kodomena je $\mathbb{K} = \langle 0, 2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$. Nad čitavom domenom funkcija raste, dakle $f'(x) > 0$, prema tome lokalni ekstremi ne postoje. Postoje dvije asimptote: $as \perp$ $na\, os\, y\ \ldots y-2=0$; $as \perp$ $na\, os\, x\ \ldots x+2=0$. Dokažimo (2):

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=$$

$$=\lim_{x/2\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{x/2}\right)^2=(0^0)=(t=x/2)=\lim_{t\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^2=\ln e^2=2.$$

Možemo pokazati da je i

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\ldots=2.$$



Slika 2.

Numerički izračun. Ako uzmemo, da je x_0 veliki broj, tada ćemo dobiti da je $f(x_0)=1.99\ldots9a\ldots(a\neq 9)$, a to znači da je (2) vjerojatno točno. Na Sl.2. „vidimo" kako desna grana krivulje raste prema vrijednosti 2, kada $x\to\infty$. Npr.

$$f(10^3)=1.9980026626\ \ldots,\ f(10^6)=1.\underbrace{9\ldots9}_{5}8\ldots,\ f(10^9)=1.\underbrace{9\ldots9}_{8}8\ldots,$$

$$f(10^{12})=1.\underbrace{9\ldots9}_{11}8\ldots,\ldots\to 2.$$

No, ako bi uzeli, da je $x=10^{1\,000\,000}$, tada bi pomoću kalkulatora dobili upozorenje, da unos nije valjan, jer je za njega $x=10^{1\,000\,000}=\infty$ a $ln\left(1+\frac{2}{10^{1\,000\,000}}\right)=0,$ dakle trebalo bi izračunati besmisleni produkt $\infty \cdot 0$. Prema tome, zaključujemo, da je (2) točno.

□

Zadatak 3

$$\lim_{x\to 2\pm 0} f(x) = \lim_{x\to 2\pm 0} \frac{2^{x-2}+x-3}{x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = ln\,2+1. \tag{3}$$

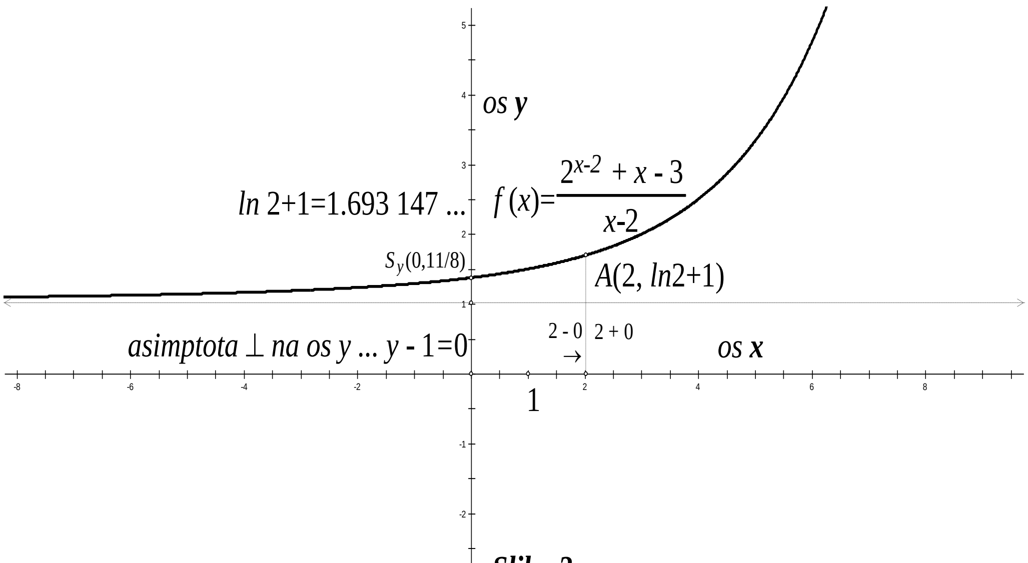
Rješenje Z3. Matematička analiza. Ako primijenimo *l'Hospitalovo pravilo*, tada je

$$\lim_{x\to 2\pm 0} f(x) = \lim_{x\to 2\pm 0} \frac{(2^{x-2}+x-3)'}{(x-2)'} = \lim_{x\to 2\pm 0} \frac{2^{x-2}ln\,2+1}{1} = ln\,2+1.$$

Dobili smo, da su lijevi i desni limesi međusobno jednaki i konačni s obzirom na $x_0 = 2$, a to znači da je funkcija za tu vrijednost neprekinuta. Graf funkcije $f(x)$ je dan na Sl. 3. Vidimo, da je domena te funkcije $\mathbb{D}=\mathbb{R}$ a kodomena je $\mathbb{K}=\langle 1,\infty\rangle$. Nad čitavom domenom funkcija raste, dakle $f'(x)>0$, pa lokalni ekstremi ne postoje. Bez *l'Hospitalovg pravila* je

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2^{x-2}+x-3}{x-2} = = \lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)\,2^{-x+2}}\right)=1,$$

a to znači da je asimptota paralelna sa osi **x** dana jednadžbom $y-1=0$. Vidljivo je, da je $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.



Slika 3.

Numerički izračun. Budući je $\lim\limits_{x \to 2 \pm 0} f(x) = (0/0)$, to znači da se broju $x_0 = 2$ moramo približavati s lijeve strane, pa onda s desne strane (ili obratno). Ako te vrijednosti budu konvergirale broju

$$ln2 + 1 = 1.693147\,180\,559\,945\ldots(\textit{vrijednost prvih}\,15\,\textit{decimala}),$$

tada ćemo na grafu „vidjeli", da je funkcija neprekinuta za $x_0 = 2$.

Dakle, ako idemo s lijeve strane prema broju 2, tada dobivamo:

$$f(1.999) = 1.\underbrace{69}_{2}\,2\ldots,$$

$$f(1.\underbrace{99\ldots9}_{6}) = 1.\underbrace{69314}_{5\,dec.\,tocno}\,6\ldots,\; f(1.\underbrace{99\ldots9}_{9}) = 1.\underbrace{6931471}_{7\,dec.\,tocno}\,6\ldots,\; f(1.\underbrace{99\ldots9}_{12}) = 1.\underbrace{693147\,180\,559}_{12\;dec.\,tocno}\,7\ldots,$$

a to znači $f(1.\underbrace{9\ldots9}_{\infty}) = ln2 + 1.$ Idemo sada s desne strane broju 2:

$$f(2.001) = 1.\underbrace{693}_{3}\,3\ldots,$$

$$f(2.\underbrace{0\ldots01}_{6}) = 1.\underbrace{693147}_{6\,dec.\,tocno}\,4\ldots,\; f(2.\underbrace{0\ldots01}_{9}) = 1.\underbrace{693147\,180}_{9\,dec.\,tocno}\,8\ldots,\; f(2.\underbrace{0\ldots01}_{12}) = 1.\underbrace{693147\,180\,5}_{10\;dec.\,tocno}\,6\ldots,$$

i to znači $f(2.\underbrace{0\ldots01}_{\infty}) = ln2 + 1.$ Dakle, i numerički smo „dokazali" da vrijedi (3).

Napomenimo i to, da ako pokušamo izračunati $f(2) = \dfrac{2^{2-2} + 2 - 3}{2-2} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$, tada računalo „kaže": *„Rezultat nije definiran"*; zato smo se broju 2 približavali s obje strane, i time potvrdili neprekinutost funkcije $f(x)$ za tu vrijednost apscise.

□

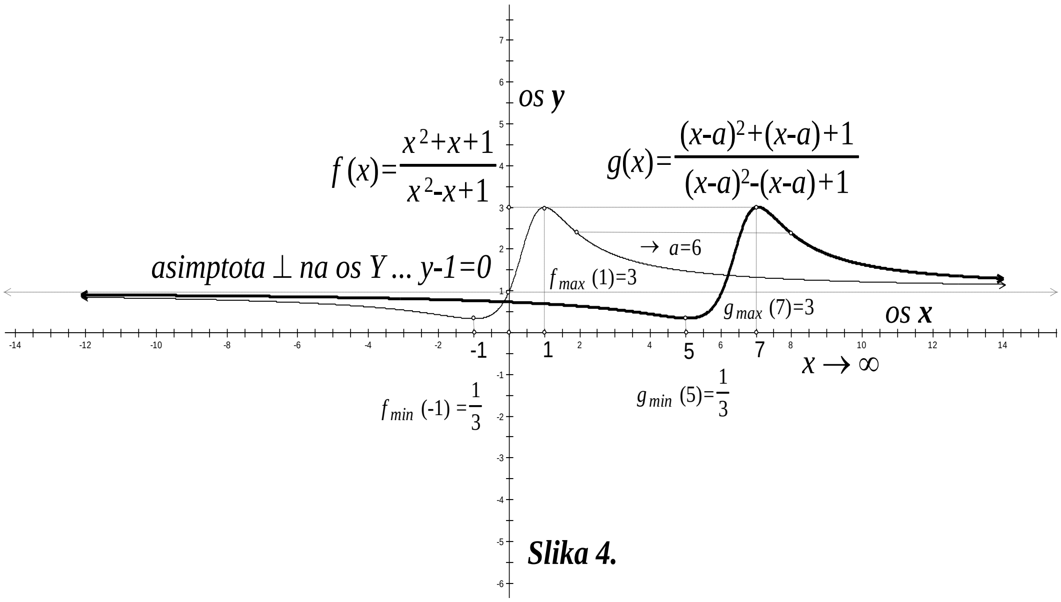
Zadatak 4.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 1. \tag{4}$$

Rješenje Z4. Matematička analiza. Metodama matematičke analize možemo doći do rezultata, koji se vide i na Sl.4. Naime, domena je $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ a kodomena $\mathbb{K} = [1/3, 3]$. Nadalje, ta funkcija je neprekinuta, jer je $x^2 - x + 1 \neq 0$, te ona ima dva ekstrema i horizontalnu asimptotu. Tako slijedi, da je:

$$f_{\min}(-1) = 1/3,\;\; f_{\max}(1) = 3,\;\; \textit{asimptota paralelna s osi } x \ldots\; y - 1 = 0 \text{ (Sl.4.)}.$$

Vidimo, da je $f(x)<1$ nad intervalim $\langle -\infty,0\rangle$, a nad intervalom $\langle 0,\infty\rangle$ je $f(x)>1$. Nadalje, $f'(x)<0$ (krivulja pada) nad intervalom $\langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,\infty\rangle$, dok je $f'(x)>0$ (krivulja raste) nad $\langle -1,1\rangle$. Prema tome $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$, dakle ona se nad intervalom $\langle 1,\infty\rangle$ približava asimptoti padajući. I konačno, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$, dakle ako $x\to-\infty$, tada se krivulja približava asimptoti rastući.



Slika 4.

Numerički izračun. Proanalizirajmo slučaj $x\to\infty$. Dakle:

$$f(10^3)=1.\underbrace{00}_{2}20019\ldots,\quad f(10^6)=1.\underbrace{0\ldots0}_{5}2\ldots,\quad f(10^9)=1.\underbrace{0\ldots0}_{8}2\ldots,$$

$$f(10^{12})=1.\underbrace{0\ldots0}_{11}2\ldots,\ \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=1.$$

Analognim postupkom dobivamo:

$$f(-10^3)=0.\underbrace{99}_{2}8\ldots,\quad f(-10^6)=0.\underbrace{9\ldots9}_{5}8\ldots,\quad f(-10^9)=0.\underbrace{9\ldots9}_{8}8\ldots,$$

$$f(-10^{12})=0.\underbrace{9\ldots9}_{11}8\ldots,\ ,\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=1.$$

□

Zadatak 5.

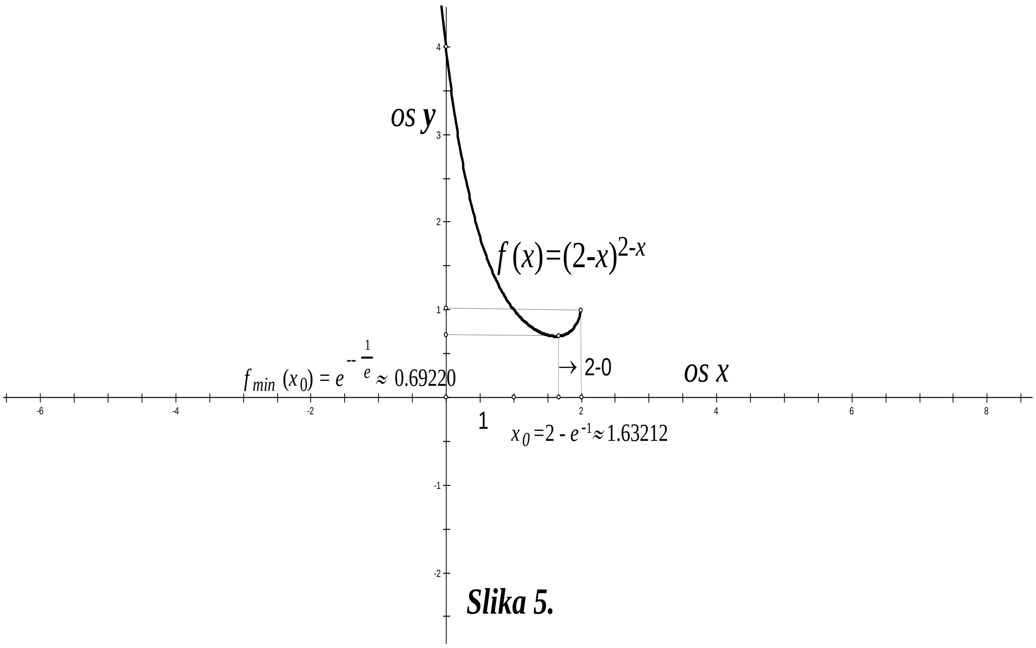
$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(2-x)^{2-x}=(0^0)=1. \tag{5}$$

Rješenje Z5. Matematička analiza. Domena od $f(x)$ je $\mathbb{D}=\langle -\infty,\, 2\rangle$, a kodomena $\mathbb{K}=\left[\, e^{-1/e}, \infty \,\right\rangle$. Minimum funkcije je $f_{\min}(2-1/e)=e^{-1/e}$. Nad intervalom $\left\langle -\infty,\, 2-e^{-1/e}\right\rangle$ funkcija pada, jer se može pokazati da je $f'(x)<0$; a nad intervalom $\left\langle\, 2-e^{-1/e}, 2\,\right\rangle$ ona raste, jer je $f'(x)>0$, što se također može provjeriti.

Budući se ovaj limes čini nešto složeniji nego u predhodnim slučajevima, pa ćemo ga izračunati pomoću *l'Hospitalovog pravila*. Naime, iz (5) slijedi

$$\lim_{x\to 2-0} ln\, f(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{ln(2-x)}{1/(2-x)} = (\,\textit{L'Hospitalovo pravilo})$$
$$= \lim_{x\to 2-0} \frac{-1/(2-x)}{1/(2-x)^2} = \lim_{x\to 2-0}(x-2) = -0,$$

a to znači $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = e^{-0} = 1$, što smo i očekivali.



Slika 5.

Numerički izračun. Ako uzmemo da je x_0 jako blizu broju 2 npr. $x_0 = 1.999...9$ (moramo se sa lijeve strane „približavati“ broju 2, jer s desne strane funkcija nije definirana), tada ćemo dobiti da je

$$f(x_0) = 0.999...9a...\ (a \neq 9),$$

a to znači da je (5) vjerojatno točno. Na Sl.5. „vidimo“ da vrijednost krivulje raste od $e^{-1/e}$ ka 1, kada *x* raste od $2-e^{-1}$ do $2-0$.

Npr.

$$f(1.999)=0.\underbrace{99}_{2}3...,\ f(1.\underbrace{9...9}_{6})=0.\underbrace{9...9}_{4}8...,\ f(1.\underbrace{9...9}_{9})=0.\underbrace{9...9}_{7}7...,\ f(1.\underbrace{9...9}_{12})=0.\underbrace{9...9}_{10}7...,$$

$$f(1.\underbrace{9...9}_{15})=0.\underbrace{9...9}_{13}6...,\ f(1.\underbrace{9...9}_{18})=0.\underbrace{9...9}_{16}5...,\ f(1.\underbrace{9...9}_{21})=0.\underbrace{9...9}_{19}5...,\Rightarrow f(1.\underbrace{9...9}_{\infty})=1.$$

Zanimljivo je, da bi i pomoću kalkulatora dobili da je

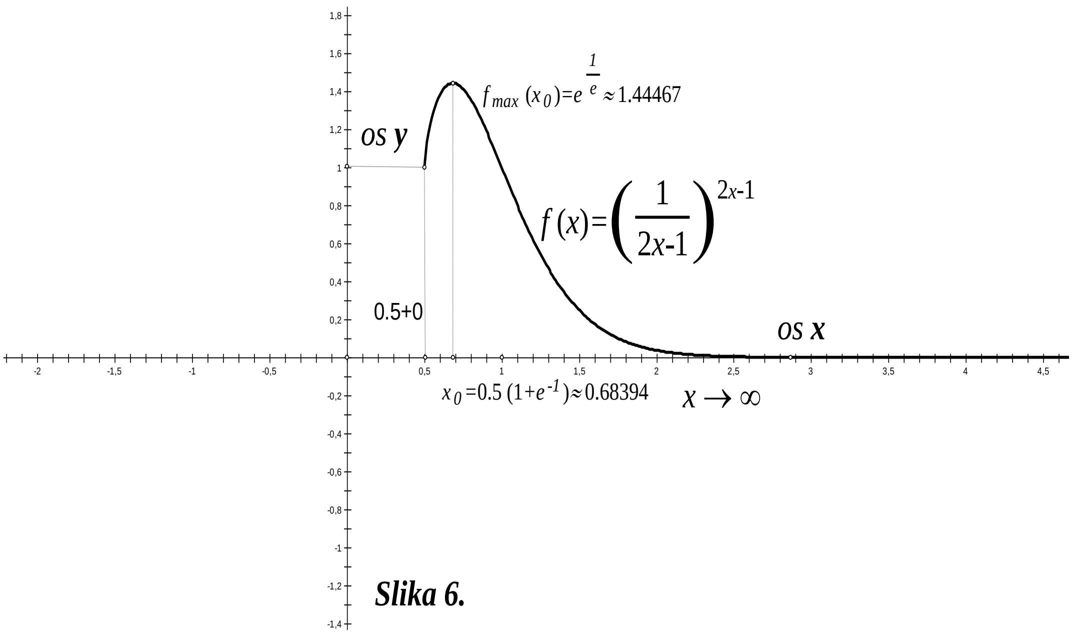
$$f(2-0)=(2-2+0)^{2-2+0}=1.$$

□

Zadatak 6

.
$$\lim_{x\to 0.5+0} f(x)=\lim_{x\to 0.5+0}\left(\frac{1}{2x-1}\right)^{2x-1}=(\infty^0)=1. \tag{6}$$

Rješenje Z6. Matematička analiza. Funkcija $f(x)$ ima domenu $\mathbb{D}=\langle 1/2,\infty\rangle$ i kodomenu $\mathbb{K}=\langle 0,e^{1/e}]$. Dobivamo da je $f_{\max}(0.5(1+e^{-1}))=e^{1/e}$. Asimptota je os ***x***. Funkcija nad intervalom $\langle 1/2,\, e^{1/e}\rangle$ raste, jer je $f'(x)>0$, a nad intervalom $\langle e^{1/e},\infty\rangle$ pada, jer je $f'(x)<0$. Možemo pomoću matematičke analize izvesti predznake prve derivacije.



Slika 6.

Numerički izračun. Ako uzmemo, da je x_0 jako blizu broju 0.5 npr. $x_0=0.5000...01$ (moramo se sa desne strane „približavati“ broju 0.5, ali lijevije od

$0.5(1+e^{-1})$), jer lijevo od 0.5 funkcija nije definirana, tada ćemo dobiti da je $f(x_0)=1.000...0a...(a\neq 0)$, a to znači da je (6) vjerojatno točno. Sada na Sl.6. „vidimo", da vrijednost funkcije pada od $e^{e^{-1}}$ prema 1, kada *x* pada od $0{,}5(1+e^{-1})$ prema $0.5+0$. Npr.

$$f(0.501)=1.01...,\ f(0.50001)=1.0002...$$

$$f(0.5\underbrace{0...0}_{6}1)=1.\underbrace{0...0}_{6}3...,\ f(0.5\underbrace{0...0}_{9}1)=1.\underbrace{0...0}_{9}4...,\ f(0.5\underbrace{0...0}_{12}1)=1.\underbrace{0...0}_{12}6...,\Rightarrow f(0.5\underbrace{0...0}_{\infty}1)=1.$$

Zadatak 7.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x=(1^\infty)=\sqrt{e}=1{,}648\,721\,270\,700\,128... \qquad (7)$$

Rješenje Z7. Matematička analiza. Dokažimo (7). Ako uvažimo $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$ (to jedan od najvažnijih limesa u matematici), tada je

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x=(1^\infty)=\lim_{2x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{1/2}=\sqrt{e}.$$

Graf funkcije je prikazan na Sl.7. Domena funkcije $f(x)$ je $\mathbb{D}=\langle-\infty,-0.5\rangle\cup\langle 0,\infty\rangle$, a kodomena iste je $\mathbb{K}=\langle 1,\sqrt{e}\rangle\cup\langle\sqrt{e},\infty\rangle$. Nad čitavom domenom funkcija raste, dakle $f'(x)>0$. Lokalni ekstremi ne postoje. Postoje dvije asimptote: $as\ \perp\ na\,os\ y\ ...\ y-\sqrt{e}=0$, kojoj se desni krak funkcije približava rastući, kada $x\to\infty$, a lijevi krak se približava padajući, kada $x\to-\infty$. I konačno, ako se broju $-1/2$ približavamo s lijeve strane, tada lijevi krak krivulje sve više raste i približava se $as\ \perp\ na\,os\ x\ ...2x+1=0$, tako da je $\lim\limits_{x\to-1/2-0} f(x)=\infty$.

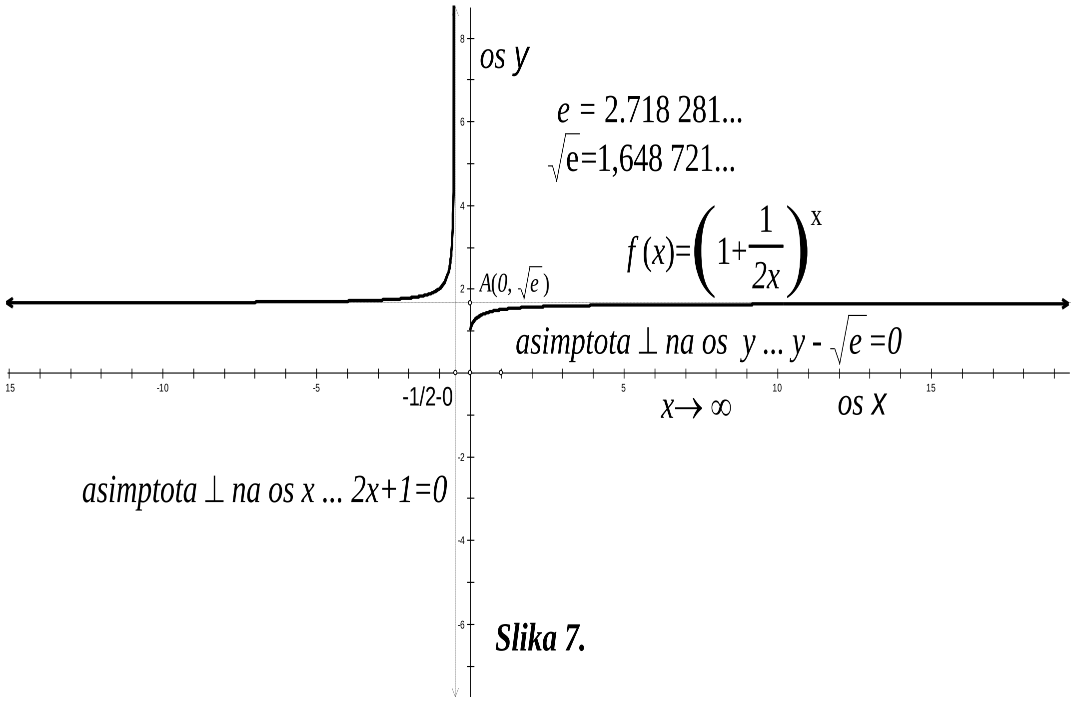
Numerički izračun. Ako uzmemo da je x_0 veliki broj, tada je

$$f(x_0)=1.648\ 721\ 270\ 700\ 128\ ...,$$

a to znači da je (7) vjerojatno točno. Konkretno:

$$f(10^3)=1.\underbrace{648}_{3\,dec\,tocno}5...,\ f(10^6)=1.\underbrace{648\ 721}_{6\,dec\,tocno}0...,\ f(10^9)=1.\underbrace{648\ 721\ 270}_{9\,dec\,tocno}4...\approx\sqrt{e}.$$

Ako pokušamo izračunati $f(10^{10})$, tada bi dobili upozorenje „*Unos nije valjan*“. Dakle s kalkulatorom, na ovaj način ne možemo ići na veću točnost, ali s računalom uz primjenu odgovarajućeg programa možemo ići neusporedivo dalje.



Slika 7.

Napomena 2. U sažetku smo rekli, da ponekad uzastopne beskrajne primjene *l'Hospitalovog pravila* ne dovode do rezultata, jer stalno brojnik i nazivnik teže 0. Npr., ako je

$$f(x)=tg2x+x^2\sin\frac{1}{x},\quad g(x)=2x+x^2\cos\frac{1}{x}\ ;\ x\neq 0\ \ i\ \ f(0)=0,\ g(0)=0;$$

tada bi se pojavio problem kod traženja $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ pomoću toga pravila.

Prema tome logično je da primijenimo numerički izračun, da bi izbjegli složenu matematičku analizu. Tu ćemo prema 0 ići s lijeve i desne strane, dakle tražit ćemo $\lim\limits_{x\to 0-0}h(x)$ i $\lim\limits_{x\to 0+0}h(x)$. Pomoću kalkulatora bi dobili da je

$$h(-10^{-k})=1.\underbrace{00\ldots0}_{m}a\ \text{ i }\ h(+10^{-k})=1.\underbrace{00\ldots0}_{n}b\ \text{ gdje je }\ a,b\neq 0\,.$$

Nakon nekoliko koraka računanja ćemo heuristički zaključiti, da vrijedi implikacija $(k\to\infty)\Rightarrow((m\to\infty)\wedge(n\to\infty))$, a to znači da je razumno očekivati da je $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=1.$ No, kada bi prikazali graf funkcije pomoću računala koristeći GSP, onda bi vidjeli da se lokalno pojavljuje „tjeme“ koje je „otvorom“ prema gore, a ono se nalazi nad intervalom $\left\langle -10^{-k}, +10^{-k} \right\rangle$. Svakako, da je ovaj izračun vjerojatan, jer nije strogo matematički dokazan.

□

Napomena 3. Postoje slučajevi kada je zgodno primijeniti *Mac Laurinov red*, ako do cilja ne možemo doći, ili teško dolazimo, pomoću *l'Hospitalovog pravila*. Uzmimo, da trebamo naći ovaj, naoko jednostavni, limes $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$. Naime, tu bi došli do cilja koristeći navedeno pravilo, ali za taj postupak bilo potrebno dosta ispisa. Prisjetimo se *Mac Laurinovog* reda $\sin x = \frac{x^1}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots \approx x-\frac{x^3}{6}$, gdje smo napravili aproksimaciju na dva sumanda, pa tada limes prima oblik

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2 - x^2}{x^2\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2}=\ldots=-\frac{1}{3}\,.$$

Možemo pokazati, da aproksimacija $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ ne utječe na rezultat. Više o zadacima ovoga tipa se može naći u [1].

Napomena 4. Sada ćemo pokušati objasniti, da su *„jako mali brojevi“* i *„jako veliki brojevi“* relativni pojmovi, što se tiče ove naše primjene. Uzmimo npr. u promatranje funkciju

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}, \tag{8}$$

čiji je graf prikazan Sl.4. Jasno je, da ako u (8) napravimo zamijenu $x \mapsto x-a$, tada smo graf translatirali za a u desno, ako je $a>0$; odnosno u lijevo ako je $a<0$. U tome slučaju bi dobili funkciju (na Sl.4. je konkretno $a=6$)

$$g(x)=\frac{(x-a)^2+(x-a)+1}{(x-a)^2-(x-a)+1}. \tag{9}$$

Nadalje je

$$g_{\min}(5)=1/3,\; g_{\max}(7)=3, \text{ asimptota paralelna s osi } x \ldots y-1=0.$$

Uzmimo sada jedan posebni slučaj, kada je npr. broj $a=10^{10^{1\,000}}$ (napomenimo, da vidljivi dio svemira ima oko 10^{73} atoma), koji nije u domeni rada znanastvenih kalkulatora, dakle izračuni se ne mogu vršiti u varijabli pomične točke. Kada bi napravili translaciju funkcije za ovaj parametar, tada na deskstopu ne bi mogli (a nikada nećemo ni moći) realizirati grafički prikaz, s tim da grafički vidimo obje funkcije, jer takva rezolucija za izlaznu jedinicu nikada neće biti moguća.

U našem slučaju, teorijski dobivamo za (9):

$$g_{\min}(a-1)=g_{\min}(10^{10^{1\,000}}-1)=1/3,\ \ g_{\max}(a+1)=g_{\max}(10^{10^{1\,000}}+1)=3.$$

Svakako, da je i sada asimptota paralelna s osi *x* dana jednadžbom $y-1=0,$ jer je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=1.$

No konačno zaključimo, da smo u svim navedenim graničnim slučajevima mogli do dobivenih rezultata doći, da se dosljedno pribižavamo nekoj fiksnoj konačnoj ili beskonačnoj vrijednosti apscise, koja generira neodređenost. Dakle, ne moramo sve „vidjeti".

Napomena 5. Pomoću starije generacije kalkulatora mogli smo u varijabli pomične točke (*floating point*) napraviti izračun, ili njegovu procjenu, iz intervala $\left\langle -10^{100},-10^{-100}\right\rangle \cup \left\langle 10^{-100},10^{100}\right\rangle$. Prema tome, ti kalkulatori su „shvaćali" da je $a=\infty$ ako je $a\geq 10^{100}$; odnosno $a=-\infty$ ako je $a\leq -10^{100}$. Svakako, zapis u tom obliku nije se pojavljivao na izlaznim jedinicama, ali bi se moglo programirati da i to bude. No, ako je ishod izračuna bio broj iz intervala $\left\langle -10^{-100},+10^{-100}\right\rangle$, tada je za te kalkulatore njegova vrijednost bila 0. Tako smo pomoću navedenih kalkulatora dobili, da je $69\,!\approx 1.7112\ldots\cdot 10^{98}$. Dakle, taj broj ima 99 znamenaka, a bilo je poznato samo nekoliko prvih vrijednosnih znamenaka. Takvi kalkulatori nisu mogao ni procijeniti, kolika je vrijednost od $70\,!$ („javljali" su „*error*"), a to je zato, jer je $70\,!>10^{100}$. Recimo i to, da se tada dobivalo $\sqrt[2^k]{2}=1\,(k\geq 24)$, što nije točno.

Dobro nam je poznato, kako današnji *znanstveni kalkulatori* „kažu", da je npr. $3248\,!=1.97363\ldots\cdot 10^{9\,997}$, a za $3249!$ dobivamo poruku „Preljev", jer je $3249\,!>10^{10\,000}$. To znači, da se izračun pomoću istih vrši iz intervala $\left\langle -10^{10\,000},-10^{-10\,000}\right\rangle \cup \left\langle 10^{-10\,000},10^{10\,000}\right\rangle$, a ako je ishod izračuna broj iz intervala $\left\langle -10^{-10\,000},+10^{-10\,000}\right\rangle$, tada je za te kalkulatore vrijednost 0. Nadalje, za njih je sada $a=\infty$ ako je $a\geq 10^{10\,000}$; odnosno $a=-\infty$ ako je $a\leq -10^{10\,000}$ (isti komentar kao i u prethodnom slučaju). Nadalje, da bi pomoću tih kalkulatora dobili, da je $\sqrt[2^k]{2}=1\,(k\geq 105),$ a to znači kada bi broj 2 uzastopno antikvadrirali 105 puta dobili bi vrijednost 1 što nije također točno.

Svakako, da nove generacije računala imaju još neusporedivo veće mogućnosti izračunavanja od kalkulatora, jer ta računala mogu izračunati matematičke konstante na milijarde decimala, pod uvjetom da koriste odgovarajući program (*software*). Vidimo, da tome razvoju kao da nema kraja, ali su zato ograničene mogućnosti na izlaznim jedinicama, što se tiče rezolucije. To znači, da

„finoća“ slike i ispisa ima „fizički limit“, kojemu će se tehnologija „asimptotski približavati“. Za očekivati je, da su daljnja „predviđanja“ o njihovim budućim mogućnostima nezahvalna, pa i onda ako jednoga dana u igri bude možda i *biochip*. Tu mislimo na umjetnu inteligenciju u pravom smislu riječi, dakle, kada računala bude mogla samostalno „pametno i pravedno“ odlučivati i razmišljati. Možda to bude jednoga dana? No, treba znati i to, da bi ispis modela informacije DNK od dijelića živoga bića, koji je veličine kao vršak igle, mogao ispuniti stupac naslaganih knjiga koji je 500 puta viši, nego što je udaljenost između Zemlje i Mjeseca (podatak iz [2]). Na osnovi toga, parafrazirajući *Dantea Alighieria* (1265.-1321.) mogli bi reći: „*Čovječe kani se svake nade*“.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Zanimljiv način izračunavanja nekih graničnih vrijednosti funkcija*, MAT- KOL (Banja Luka), 22(1) (2016), 1-7

[2] D. Blanuša, *Viša matematika*, *I dio, drugi svezak*, Tehnička knjiga, Zagreb 1965.

[3] *God of Wonders* (popular scientific film)

[4] M. Marjanović, *Matematička analiza I,* Nauka, Beograd 1998.

[5] Ž. Marković, *Uvod u višu analizu (I i II dio),* Školska knjiga, Zagreb, 1952.

[6] David E. Smith, *History of Mathematics*, Dover Publications, 1958. ISBN 0-486-20430-8.

[7] E. Suli, D. Mayers, *Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, 2003.

Primljeno u redakciju 23.05.2017; revidirana verzija 25.05.2017;
Dostupno na internetu 05.06.2017.