MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXIII (4)(2017), 217-227 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1704217A

ZANIMLJIVE PRIMJENE NEJEDNAKOSTI IZMEĐU ARITMETIČKE I GEOMTRIJSKE SREDINE ZA TRI POZITIVNA BROJA

(Interesting applications of the inequality between arithmetic and geometric mean for three positive numbers)

Šefket Arslanagić

Sažetak: U ovom radu dajemo nekoliko primjera dokaza nejednakosti koristeći poznatu nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja koja glasi:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc};\ (a,b,c>0).$$

Ključne riječi: nejednakost, primjena, aritmetička i geometrijska sredina, nejednakost Nesbita, jednakost.

Abstract: In this paper we give several examples of the proofs of inequalities using well known inequality between arithmetic and geometric mean for three positive numbers to be worded:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc};\ (a,b,c>0).$$

Key words: inequality, application, arithmetic and geometric mean, the inequality of Nesbitt, equality.

ANS Subject Classification (2010): 97 F 50
ZDM Subject Classification (2010): F 50, N 50

1. UVOD (Introduction)

Nejednakosti između sredina za dva, tri ili više pozitivnih brojeva igraju važnu ulogu u matematici jer imaju veliku primjenu kod rješavanja raznih zadataka i problema u mnogim oblastima matematike. Ovdje bi istakli nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za n pozitivnih brojeva koja glasi:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n};\ (a_1,a_2,...,a_n>0) \tag{1}$$

gdje jednakost važi ako i samo ako je $a_1=a_2=...=a_n$.

U ovom radu ćemo se baviti nejednakošću (1) u slučaju kada je $n=3$, te $a_1=a,\ a_2=b$ i $a_3=c$, tj.:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc};\ (a,b,c>0), \tag{2}$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

Šest raznih dokaza ove nejednakosti se može naći u [2]. Sada ćemo dati više primjera dokaza raznih nejednakosti koristeći (2) koje bi se inače dokazale mnogo teže na neki drugi način.

2. GLAVNI REZULTATI (Main results)

Primjer 1. Dokazati da važi nejednakost:

$$x^3+y^3 \geq xy(x+y);\ (x,y>0). \tag{3}$$

Dokaz: Na osnovu nejednakosti (2) imamo:

$$\frac{x^3+x^3+y^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot y^3}$$

i

$$\frac{y^3+y^3+x^3}{3} \geq \sqrt[3]{y^3 \cdot y^3 \cdot x^3},$$

odnosno

$$2x^3+y^3 \geq 3x^2y$$

i

$$2y^3+x^3 \geq 3xy^2.$$

Sabirajući ove dvije nejednakosti, dobijamo:

$$3\left(x^3+y^3\right) \geq 3xy(x+y), \text{ tj.}$$

$$x^3+y^3 \geq xy(x+y), \text{ q.e.d.}$$

Vrijedi jednakost u (3) ako i samo ako je $x=y$.

□

Napomena 1. Nejednakost (3) bi se također mogla dokazati jednostavno i na sljedeći način:

$$x^3+y^3\ge xy(x+y)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)\ge xy(x+y)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x^2-xy+y^2-xy\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x^2-2xy+y^2\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2\ge 0,$$

što je tačno zbog $x,y>0$.

Posljedica 1. Dokazati da važi nejednakost:

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a};\ (a,b,c>0). \tag{4}$$

Dokaz: Imamo na osnovu nejednakosti (3):

$$\frac{a^3}{b^2}+b=\frac{a^3+b^3}{b^2}\ge\frac{ab(a+b)}{b^2}=\frac{a^2}{b}+a,$$

$$\frac{b^3}{c^2}+c=\frac{b^3+c^3}{c^2}\ge\frac{bc(b+c)}{c^2}=\frac{b^2}{c}+b,$$

$$\frac{c^3}{a^2}+a=\frac{c^3+a^3}{a^2}\ge\frac{ca(c+a)}{a^2}=\frac{c^2}{a}+c.$$

Nakon sabiranja ovih nejednakosti, dobijamo:

$$\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)+(a+b+c)\ge\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+(a+b+c),$$

a odavde

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

Vrijedi jednakost u (4) ako i samo ako je $a=b=c$.

□

Primjer 2. Dokazati da važi nejednakost:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c;\ (a,b,c>0). \tag{5}$$

Dokaz: Na osnovu nejednakosti (2) slijedi:

$$\frac{a^3}{bc}+b+c\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc}\cdot b\cdot c}=3a\ ,$$

$$\frac{b^3}{ca}+c+a\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{ca}\cdot c\cdot a}=3b\ ,$$

$$\frac{c^3}{ab}+a+b\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{ab}\cdot a\cdot b}=3c\ .$$

Sabiranjem ovih nejednakost, dobijamo:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}+2(a+b+c)\geq 3(a+b+c),$$

a odavde

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c\ .$$

Vrijedi jednakost u (5) ako i samo ako je $a=b=c$.

□

Posljedica 2. Uzimajući da je $abc=1$, dobijamo iz nejednakosti (5) novu nejednakost:

$$a^4+b^4+c^4\geq a+b+c;\ \ (a,b,c>0;\ abc=1),$$

gdje vrijedi jednakost ako i samo ako je $a=b=c=1$.

Primjer 3. Dokazati da važi nejednakost:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq ab+bc+ca;\ (a,b,c>0). \tag{6}$$

Dokaz: Na osnovu nejednakosti (2) imamo:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+bc \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}\cdot\frac{b^3}{c}\cdot bc}=3ab\,,$$

$$\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ca \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{c}\cdot\frac{c^3}{a}\cdot ca}=3bc\,,$$

$$\frac{c^3}{a}+\frac{a^3}{b}+ab \geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{a}\cdot\frac{a^3}{b}\cdot ab}=3ca\,.$$

Nakon sabiranja ovih nejednakosti, dobijamo:

$$2\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)+\left(ab+bc+ca\right)\geq 3\left(ab+bc+ca\right),$$

odnosno

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq ab+bc+ca\,.$$

Vrijedi jednakost u (6) ako i samo ako je $a=b=c$.

□

Primjer 4. Dokazati da važi nejednakost:

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\geq\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2};\ \left(a,b,c>0\right). \tag{7}$$

Dokaz: Na osnovu nejednakosti (2) dobijamo:

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{a^3}{b^3}+1\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{a^3}{b^3}\cdot 1}=3\cdot\frac{a^2}{b^2}\,,$$

$$\frac{b^3}{c^3}+\frac{b^3}{c^3}+1\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{c^3}\cdot\frac{b^3}{c^3}\cdot 1}=3\cdot\frac{b^2}{c^2}\,,$$

$$\frac{c^3}{a^3}+\frac{c^3}{a^3}+1\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{a^3}\cdot\frac{c^3}{a^3}\cdot 1}=3\cdot\frac{c^2}{a^2}\,.$$

Nakon sabiranja gornjih nejednakosti dobijamo na osnovu nejednakosti (2):

$$2\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\right)+3\geq 2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\geq$$

$$\geq 2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{a^2}}=2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+3,$$

a odavde:

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\geq\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}.$$

Vrijedi jednakost u (7) ako i samo ako je $a=b=c$.

□

Primjer 5. Dokazati da važi nejednakost:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a};\ (a,b,c>0). \qquad (8)$$

Dokaz: Imamo na osnovu nejednakosti (2):

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)=\frac{b+c}{a+b}+\frac{c+a}{b+c}+\frac{a+b}{c+a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b+c}{a+b}\cdot\frac{c+a}{b+c}\cdot\frac{a+b}{c+a}}=3,$$

tj.

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)\geq 3. \qquad (9)$$

Dalje imamo:

$$\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)=\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}=3. \qquad (10)$$

Sada iz (9) i (10) slijedi:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}.$$

Vrijedi jednakost u (8) ako i samo ako je $a=b=c$.

□

Primjer 6. Dokazati da važi nejednakost:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2};\ (a,b,c>0). \qquad (11)$$

Dokaz: Neka je:

$$S=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b};\ \ A=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}\ \text{ i }\ B=\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}.$$

Dobijamo sada na osnovu nejednakosti (2):

$$A+S=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{c+a}{a+b}}=3,$$

$$B+S=\frac{c+a}{b+c}+\frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{a+b}\ge 3\sqrt[3]{\frac{c+a}{b+c}\cdot\frac{a+b}{c+a}\cdot\frac{b+c}{a+b}}=3,$$

$$A+B=\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{a+b}{a+b}=3.$$

Sada slijedi iz gornjih nejednakosti:

$$6\le(A+S)+(B+S)=(A+B)+2S=3+2S$$
$$\Rightarrow 2S\ge 3\Rightarrow S\ge\frac{3}{2},$$

tj.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

Vrijedi jednakost u (11) ako i samo ako je $a=b=c$.

□

Napomena 2. Jedanaest raznih dokaza nejednakosti (11) se može naći u [3], a još jedanaest u [4]. Inače, ova nejednakost je u matematičkoj literaturi poznata kao **nejednakost Nesbitta**.

Primjer 7. Dokazati da važi nejednakost:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge 2+\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}};\ (a,b,c>0). \tag{12}$$

Dokaz: Imamo sada:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge 2+\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\ge\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}. \tag{13}$$

Slijedi na osnovu nejednakosti (2):

$$\begin{cases} \frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}} \\ \frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{c}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}, \\ \frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}}=\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}} \end{cases}$$

te

$$\begin{cases} \frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c}}=\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}, \\ \frac{c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c}{b}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{a}}=\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}, \\ \frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{c}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}. \end{cases}$$

Sabirajući ove nejednakosti, dobijamo:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}},$$

te

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}},$$

a njihovim sabiranjem dobijamo nejednakost (13), odnosno datu nejednakost.

Vrijedi jednakost u (12) ako i samo ako je $a=b=c$.

□

Primjer 8. Dokazati da važi nejednakost:

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{3}{4}, \tag{14}$$

gdje su $a,b,c>0$ i važi jednakost $a+b+c=3$.

Dokaz: Zbog jednakosti $a+b+c=3$, data nejednakost je ekvivalentna sa nejednakošću:

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{a+b+c}{4}.$$

Na osnovu nejednakosti (2) dobijamo:

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{a+b}{8}+\frac{a+c}{8}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}\cdot\frac{a+b}{8}\cdot\frac{a+c}{8}}=\frac{3a}{4},$$

$$\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\frac{b+c}{8}+\frac{b+a}{8}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}\cdot\frac{b+c}{8}\cdot\frac{b+a}{8}}=\frac{3b}{4},$$

$$\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}+\frac{c+a}{8}+\frac{c+b}{8}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}\cdot\frac{c+a}{8}\cdot\frac{c+b}{8}}=\frac{3c}{4}.$$

Sabiranjem gornjih nejednakosti, dobijamo:

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}+\frac{4(a+b+c)}{8}\geq\frac{3(a+b+c)}{4},$$

tj.

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{a+b+c}{4}=\frac{3}{4}.$$

Vrijedi jednakost u (14) ako i samo ako je $a=b=c=1$.

□

Primjer 9. Dokazati da važi nejednakost:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}, \tag{15}$$

gdje su $a,b,c>0$ i važi jednakost $abc=1$.

Dokaz: Na osnovu nejednakosti (2) dobijamo:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}\cdot\frac{1+b}{8}\cdot\frac{1+c}{8}}=\frac{3a}{4},$$

$$\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{1+c}{8}+\frac{1+a}{8}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}\cdot\frac{1+c}{8}\cdot\frac{1+a}{8}}=\frac{3b}{4},$$

$$\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+b}{8}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\cdot\frac{1+a}{8}\cdot\frac{1+b}{8}}=\frac{3c}{4}.$$

Nakon sabiranja gornjih nejednakosti, dobijamo:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{3}{4}+\frac{a+b+c}{4}\geq\frac{3(a+b+c)}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{a+b+c}{2}-\frac{3}{4},$$

a odavde na osnovu nejednakosti (2), tj. $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ i datog uslova $abc=1$:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2}-\frac{3}{4},$$

tj.

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}.$$

Vrijedi jednakost u (15) ako i samo ako je $a=b=c=1$.

□

Primjer 10. Dokazati da važi nejednakost:

$$\frac{a^7}{b^2c^2}+\frac{b^7}{c^2a^2}+\frac{c^7}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2b^2c^2}\geq\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}+abc, \tag{16}$$

gdje su $a,b,c>0$.

Dokaz: Na osnovu nejednakosti (2) imamo:

$$\frac{b^7}{a^2c^2}+\frac{c^7}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2b^2c^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^7}{a^2c^2}\cdot\frac{c^7}{a^2b^2}\cdot\frac{1}{a^2b^2c^2}}=\frac{3bc}{a^2},$$

$$\frac{c^7}{b^2a^2}+\frac{a^7}{b^2c^2}+\frac{1}{a^2b^2c^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^7}{b^2a^2}\cdot\frac{a^7}{b^2c^2}\cdot\frac{1}{a^2b^2c^2}}=\frac{3ac}{b^2},$$

$$\frac{a^7}{c^2b^2}+\frac{b^7}{c^2a^2}+\frac{1}{a^2b^2c^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^7}{c^2b^2}\cdot\frac{b^7}{c^2a^2}\cdot\frac{1}{a^2b^2c^2}}=\frac{3ab}{c^2},$$

$$\frac{a^7}{c^2b^2}+\frac{b^7}{c^2a^2}+\frac{c^7}{a^2b^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^7}{c^2b^2}\cdot\frac{b^7}{c^2a^2}\cdot\frac{c^7}{a^2b^2}}=3abc\,.$$

Nakon sabiranja gornjih nejednakosti, dobijamo:

$$3\left(\frac{a^7}{b^2c^2}+\frac{b^7}{c^2a^2}+\frac{c^7}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2b^2c^2}\right)\geq 3\left(\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}+abc\right),$$

odnosno

$$\frac{a^7}{b^2c^2}+\frac{b^7}{c^2a^2}+\frac{c^7}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2b^2c^2}\geq\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}+abc\,.$$

Vrijedi jednakost u (16) ako i samo ako je $a=b=c=1$.

Literatura

[1] Arslanagić, Š., *Matematička za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Arslanagić, Š., *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matema-tike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[3] Arslanagić, Š., *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

[4] Arslanagić, Š., *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.

[5] Cvetkovski Z., *Inequalities- Theorems, Techniques and Selected Problems,* Springer-Verlag, Heidelberg / Dordrecht / London / New York, 2012.

Prispjelo u redakciju 31.05.2017. Dostupno na internetu 05.06.2017.