MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXIV (1)(2018), 1-7 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1801001S

Istovremena podjela više dužina različitih duljina na jednake dijelove

Petar Svirčević

Zagreb, Hrvatska
e-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr

Sažetak. *U ovome članku ćemo primijeniti konstrukciju za istovremenu podjelu više dužina različitih duljina na jednake dijelove u smislu konstruktivne geometrije. Ova metoda je bazirana na poopćenoj GLaD-ovoj konstrukciji, jer primjena Euklidove metode podjele dužine na jednake dijelove nikako nije pogodna za ovaj problem. I na kraju ćemo još dati virtualne konstrukcije transcendentnih brojeva ln2 i* $\pi/4$.

Ključne riječi. *GLaD-ova podjela dužina, istovremeno više dužina.*

Simultaneous Division of Several Segments of Different Lengths into Equal Parts

Abstract. In this article we will apply a construction for simultaneous division of several segments of different lengths into equal parts in meaning of constructive geometry. This method is based on the overlapping GlaD's construction because the application of Euklid's method distribution of segment to equal parts is by no means suitable for this problem. And finally we will give the virtual construct of transcendent numbers ln2 and $\pi/4$.

Keywords. *GLaD's division of segments, simultaneously more segments.*

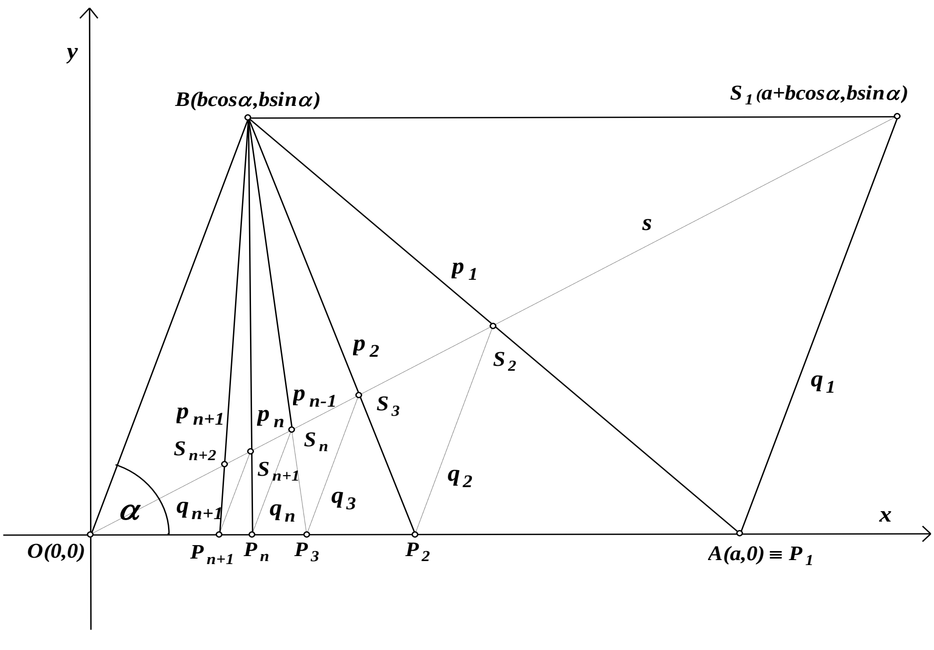
Poznato nam je makar dvadeset tri stoljeća, kako se može bilo koja dužina podijeliti, u smislu konstruktivne geometrije, na bilo koji broj jednakih dužina. Naime, tu konstrukciju je iskazao i dokazao Euklid u *Propoziciji 10.* u *Knjizi 6,* koja je sastavni dio njegovih *Elemenata*. Nadalje, ta jedino poznata metoda podjele dužine na jednake dijelove se u matematici, i ne samo u matematici, primijenjivala, sve dok nije objavljen članak *Euklid-Fibonacci-Sketchpad*, čiji su autori Daniel Litchfield i David Goldenheim uz potporu Charles H. Dietricha. Autori su ga objavili u časopisu *The Mathematics Teacher* u broju iz prvog mjeseca 1997. U tome članku, taj teorem konstruktivne podjele razdvojen je na dva slučaja; na slučaj neparnoga broja jednakih dijelova i na slučaj parnoga broja jednakih dijelova. Navedene konstrukcije se zovu GLaD-*ove konstrukcije*. Vidimo da je akronim izveden od prvih slova prezimena autora tih konstrukcija. No, mi ćemo sada dati poopćenje tih konstrukcija, tako da nećemo razlikovati podjelu na parni ili neparni broj jednakih dijelova i to ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Nakon toga ćemo tu konstrukciju primjeniti na istovremenu podjelu više dužina različitih duljina na jednake dijelove. I na kraju ćemo dati dvije virtualne konstrukcije transcendentnih brojeva.

Definicija 1. U ovome članku ćemo za dužinu, čije su krajnje točke *A* i *B*, primjenjivati oznaku $\overline{AB}$ a za njezinu duljinu oznaku $|AB|$ i konačno ćemo pravac kroz te točke označavati s *AB*.

Konstrukcija 1. Bilo koja dužina $\overline{OA}$ se dijeli na bilo koji broj n, gdje je $n \in \{2,3,4,\ldots\}$, jednakih dužina konstrukcijom prikazanom kao na *Slici 1*., gdje je

$$|OP_n| = \frac{1}{n}|OA|. \tag{1}$$

Dokaz. Neka je zadana dužina $\overline{OA}$ čija je duljina $|OA| = a$. Tu dužinu trebamo podijeliti na n dužina jednakih duljina. U svrhu toga kostruirajmo paralelogram OAS_1B; tako da je $|OA| = |BS_1| = a$, $|OB| = |AS_1| = b$ i $\alpha = \angle(|OA|,|OB|)$, gdje je $0 < \alpha < \pi$.



Slika 1.

Povucimo dijagonale $\overline{OS_1}$ i $\overline{AB}$ koje se sjeku u točki $S_2 \equiv \overline{OS_1} \cap \overline{AB}$. Postavimo taj paralelogram u koordinatni sustav kao na *Slici 1*. Jasno je, da je apscisa točke P_2 jednaka $\frac{a}{2}$, odnosno $P_2\left(\frac{a}{2},0\right)$, jer je to sjecište pravca s $\overline{OA}$, koji prolazi kroz S_2 a paralelan je s $\overline{OB}$. Slično bismo računanjem prema *Slici 1.* dobili da je $P_3\left(\frac{a}{3},0\right),\ldots,P_n\left(\frac{a}{n},0\right)$. Sada ćemo kroz $P_n\left(\frac{a}{n},0\right)$ i $B(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$ postaviti pravac

$$p_n:\ y=\frac{b\sin\alpha}{nb\cos\alpha-a}(nx-a), \tag{2}$$

a kroz $O(0,0)$ i $S_1(a+b\cos\alpha, b\sin\alpha)$ pravac

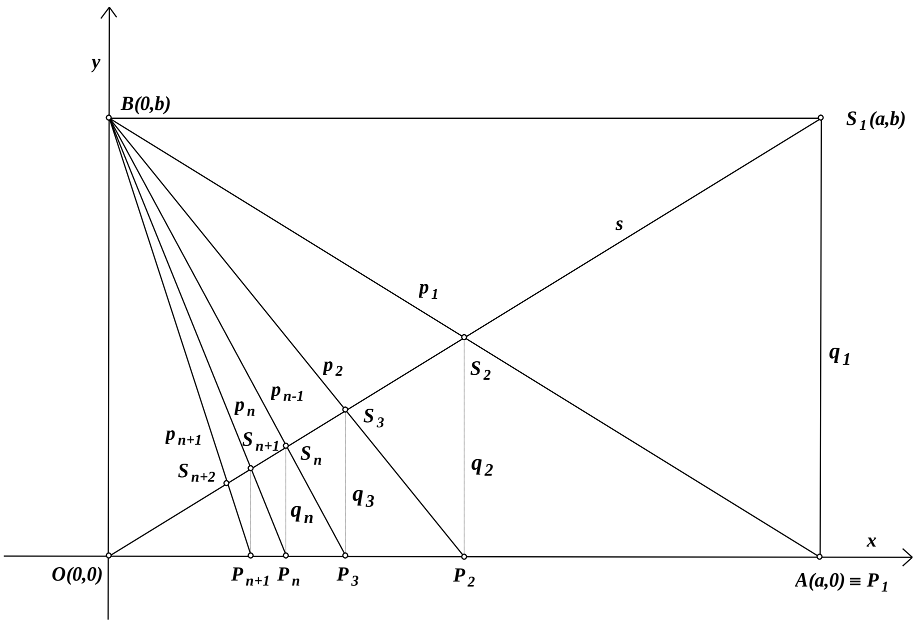
$$s:\ y=\frac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}x. \tag{3}$$

Ovi se pravci sjeku u točki S_{n+1}, a iz (2) i (3) slijedi da je

$$S_{n+1}\left(\frac{a+b\cos\alpha}{n+1},\frac{b\sin\alpha}{n+1}\right). \tag{4}$$

Postavimo li sada pravac q_{n+1} kroz točku S_{n+1} paralelno s $\overline{OB}$, tada ćemo dobit da je $q_{n+1}:\ y=xtg\alpha-\frac{atg\alpha}{n+1}$, a taj pravac siječe os x u točki $P_{n+1}\left(\frac{a}{n+1},0\right)$, dakle je $|OP_{n+1}|=\frac{1}{n+1}|OA|$, čime je K1., odnosno konstrukcija na *Slici 1.*, u potpunosti dokazana.

Napomena 1. Ako izvršimo specijalizaciju na *Slici 1.* tako da uzmemo da je $\alpha=90^\circ$, tada dobivamo *Sliku 2.*, koja će nam neki put biti praktičnija.

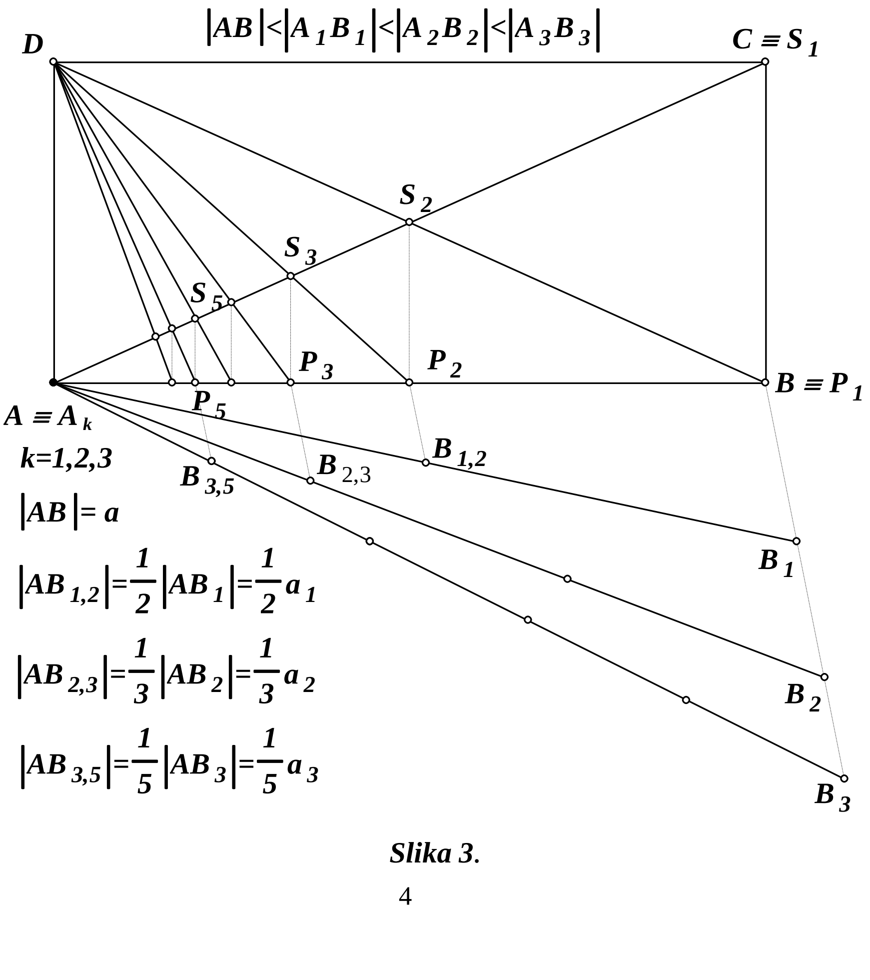


Slika 2.

Definicija 2. Paralelogram na *Slici 1.* s procedurom navedene konstrukcije zovemo GLaD-ov paralelogram, a pravokutnik na *Slici 2.* zovemo GLaD-ov pravokutnik. Nadalje, dužinu $\overline{OA}$ s konstruiranim točkama respektivno nazivamo baza GLaD-ovog paralelograma, odnosno baza GLaD-ovog pravokutnika.

Konstrukcija 2. Neka su zadane tri dužine: $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \overline{A_3B_3}$; čije su duljine u odnosu $|A_1B_1| < |A_2B_2| < |A_3B_3|$. Nadalje, neka duljina baze GLaD-ovog pravokutnika zadovoljava nejednakost $|AB| < |A_1B_1|$. Sada, na osnovi iznesenog se postavlja zadatak, da se konstruira podjela dužina: $\overline{A_1B_1}$ na dva jednaka dijela, $\overline{A_2B_2}$ na tri jednaka dijela, $\overline{A_3B_3}$ na pet jednakih dijelova.

Rješenje. Iz postavljenih uvjeta slijedi da možemo konstruirati ΔABB_3. Koristeći konstrukciju K1. dobivamo na bazi GLaD-ovog pravokutnika točke: P_2, P_3, P_5. Ako sada kroz te točke postavimo pravce paralelne s pravcem BB_3, tada oni sjeku respektivno dužine: $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \overline{A_3B_3}$; u točkama $B_{1,2}, B_{2,3}, B_{3,5}$. Jasno je, da je:



Slika 3.

$$\left|A_1B_{1,2}\right| = \frac{1}{2}\left|A_1B_1\right|, \left|A_2B_{2,3}\right| = \frac{1}{3}\left|A_2B_2\right|, \left|A_3B_{3,5}\right| = \frac{1}{5}\left|A_3B_3\right|.$$

Dužine $\overline{A_1B_{1,2}}$, $\overline{A_2B_{2,3}}$, $\overline{A_3B_{3,5}}$ se zovu inicijalne dužine, a to znači da npr. inicijalnu dužinu $\overline{A_3B_{3,5}}$ trebamo nanijeti 5 puta na dužinu $\overline{A_3B_3}$, pa bi time napravili traženu podjelu te dužine na 5 jednakih djelova. Dakle, postavljeni zadatak je u potpunosti riješen i sada je jasno da Euklidova metoda ne bi bila prikladna za ovu konstrukciju.

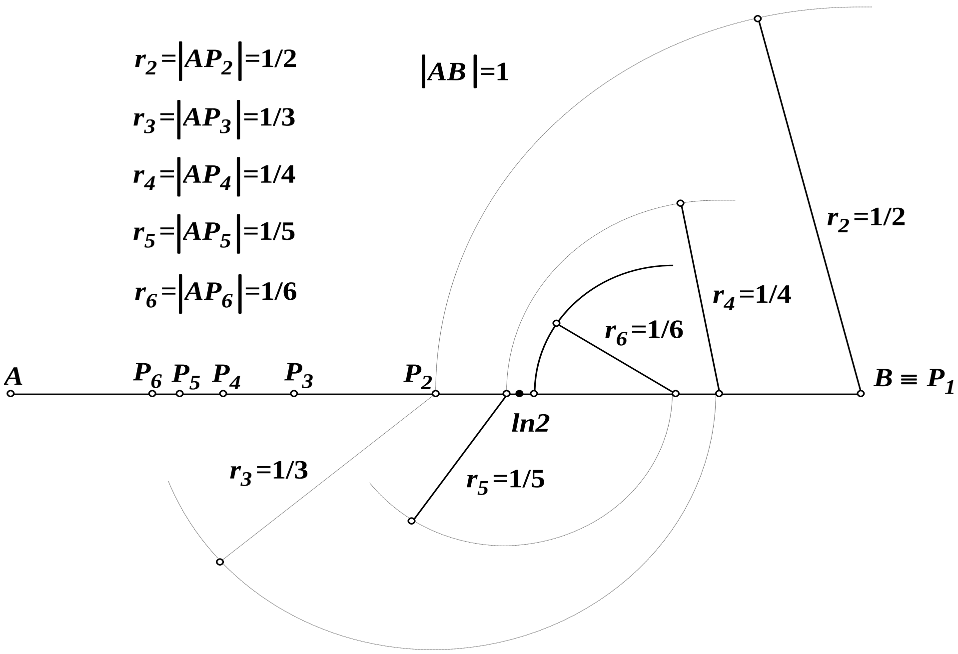
Napomena 2. Na osnovi K1. je jasno kako bi napravili poopćenje na podjelu bilo kojeg broja dužina na bilo koji broj jednakih djelova. Svakako, da se pretpostavlja da duljine dužina čine striktno rastući niz, a ako to nije, tada ih presortiramo tako da to bude. I konačno napomenimo, da nikoje dvije dužine nemaju iste duljine.

Sada ćemo dati još dvije najavljene konstrukcije primjenom izvedene metode.

Konstrukcija 3. Načinimo virtualnu konstrukciju transcendentnog broja $\ln 2$ "proizvoljno" točno.

Rješenje. Poznato nam je iz matematičke analize, da je

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \tag{5}$$



Slika 4.

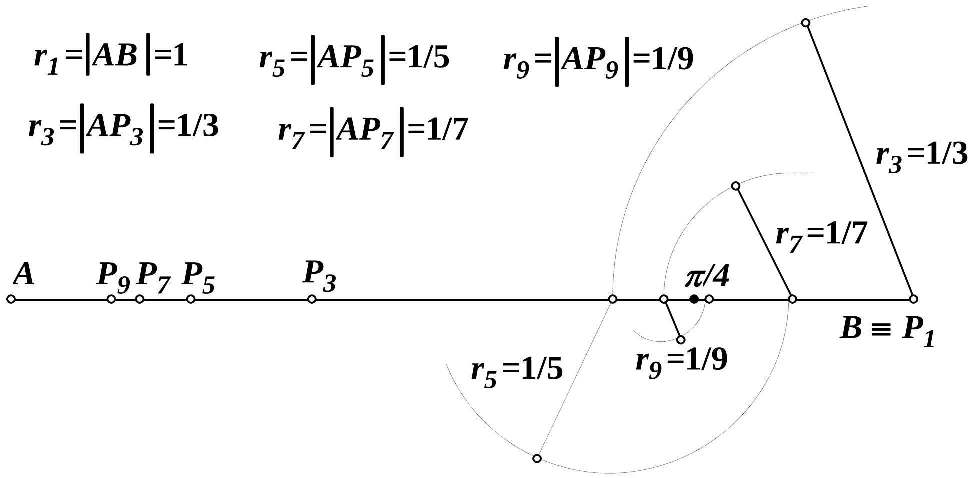
Iz (5) slijedi, da trebamo znati konstruirati brojeve $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots$,što je prikazano na *Slici 4*. Sada, pretpostavimo da je $\overline{AB}$ jedinična dužina, dakle $|AB| = |AP_1| = 1$. Da pojednastovimo konstrukciju na slici smo uzeli samo bazu GLaD-ovog pravokutnika, gdje su naznačene točke P_n, gdje je $|AP_n| = \frac{1}{n}$. Vidimo, da smo nanošenjem vrijednosti razlomaka „gore oduzimali" razlomke s parnim nazivnikom, a „dolje dodavali" razlomke s neparnim nazivnikom, pa na osnovi (5) i *Slike 4*. zaključujemo da „konvergiramo" vrijednosti ln2.

Konstrukcija 4. Načinimo virtualnu konstrukciju transcendentnog broja $\pi/4$ "proizvoljno" točno.

Rješenje. Dobro je poznato, da se u matematičkoj analizi izvodi ova veza

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots \tag{6}$$

Iz (6) vidimo, da trebamo znati konstruirati $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots$, a koristit ćemo samo $\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\ldots$ Analogni postupak je kao i u prethodnom zadatku. Dakle, brojeve koje bih „oduzimali" nanosimo gore, a one koje bih „dodavali" nanosimo dolje. Vidimo, da je sve to prikazano na *Slici 5*. Iz približne vrijednosti broja $\pi/4$ trivijalnom konstrukcijom se dobije i približna vrijednost broja π.



Slika 5.

Napomena 3. Iz zadnje dvije konstrukcije vidimo, da se vrijednosti ln2 i $\pi/4$ dobivaju s malom točnošću i nemaju praktične vrijednosti. No, moglo bi se postaviti pitanje, što je npr. s virtualnom konstrukcijom sume harmonijskog reda? Naime, zanimljivo je reći, da suma toga reda toliko sporo divergira, da se ta divergencija ne može naslutiti ni pomoću računala, a pogotovo ne pomoću geometrijskih konstrukcija, koje se prikazuju na monitoru. Naime, suma prvih 10^{43} članova toga reda je manja od 100.

Napomena 4. Dobro je poznato, da se Euklid (oko 330.-275.p.n.e.) ubraja u grupu od tri najveća matematičara stare ere (Euklid, Arhimed i Apolonije). Budući je bio sljedbenik Platonove filozofije, tada se pretpostavlja da je bio obrazovan u Ateni, kao i to da je obrazovan od strane Platonovih učenika. Nadalje, Euklid je u Aleksandriji osnovao matematičku školu *Museion*, gdje je razvijao svoju naučnu djelatnost. Naime, ta ustanova je bila centar nauke toga doba. Dodajmo i to, da je on svoje *Elemente* objavio oko 300. g. p.n.e. Grandioznost toga djela je u tome, što je ono koncipirano na aksiomatskoj osnovi, pa se kao takvo koristi sve do danas, uz napomenu, da je David Hilbert načinio korekciju tog djela početkon dvadesetog stoljeća u djelu *Grundlagen der Geometrie*. Naime, Hilbert je dao strogu aksiomatiku geometrije (aksiomi su potpuni, nadalje, oni su međusobno nezavisni i nekontradiktorni), s tim da neke pojmove nije definirao, već ih je prihvatio ad hoc (npr.: točka, pravac, ravnina, ...). Važno je još reći, da je iz V postulata Euklidovih *Elemenata* proizašla i neeuklidska geometrija (Geometrija Lobačevskog), koja je bila pretpostavka u izgradnji *Einsteinove specijalne teoreija relativnosti*.

Literatura:

[1] D. C. Litchfield and D. A. Goldenheim. Euclid, Fibonacci, Sketchpad, *The Mathematics Teacher*, **90** (1)(1997), 8-12.

[2] Petar Svirčević. Opća podjela dužine na jednake dijelove, *Poučak*, **10** , 15-25, HMD, Zagreb 2002.

[3] Petar Svirčević. Virtuelne konstrukcije transcendentnih brojeva, *Nastava matematike*, **LXII** (1)(2017), 39-43, Beograd 2017.

[4] David E. Joyce. *Euklidovi Elementi*. Dostupno na adresi: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/ elements/elements.html.