MAT-KOL (Banja Luka)
XXIV (1)(2018), 9-17
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1801009S

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5828 (o)

Elementarne matematičke eksplikacije

Petar Svirčević

Zagreb, Hrvatska
e-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr

Sažetak. *Pod pojmom matematičke eksplikacije podrazumijevamo eksplicitno objedinjenje dvije ili više eksplicitnih jednakosti vezanih za isti problem. Za izvođenje te eksplicitne veze koristimo najčešće ove dvije idempotentne funkcije* $\operatorname{sgn}:\mathbb{R}\to\{-1,0,1\}$ *i* $|\,|:\mathbb{R}\to\{0\}\cup\mathbb{R}^{+}$. *No, taj novi oblik može bili dosta glomazan, ali je zato praktičan, jer sigurnije dovodi do cilja u smislu izbjegavanja generiranja greški. Nadalje, te eksplikacije su pogodne i u sofrwareskoj primjeni, jer u dijagramu toka programa se izbjegava čvorište, koje inače ima jedan ulaz i makar dva izlaza. Recimo i to, da ćemo u ovome članku dati četiri eksplikacije. Prva eksplikacija je rješenje opće kvadratne jednadžbe. Druga eksplikacija je izračun mjera kutova trokuta kojeg čine tri pravaca u koordinatnoj ravnini, koji su zadani u eksplicitnom obliku. Treća eksplikacija predstavlja nalaženje argumenta za Cauchyev, ili trigonometrijski, oblik kompleksnog broja, koji se dobiva iz Gaussovog, ili običnog, oblika kompleksnog broja. I konačno četvrta eksplikacija se odnosi na neodređeni integral.*

Ključne riječi. *Eksplikacija, objedinjenje eksplicitnih formula.*

Elementary Mathematical Explications

Abstract. *Under the term mathematical explication, we mean explicitly integrating two or more explicit equality related to the same problem. To accomplish this explicit connection, we use these two idempotent functions* $\operatorname{sgn}:\mathbb{R}\to\{-1,0,1\}$ *and* $|\,|:\mathbb{R}\to\{0\}\cup\mathbb{R}^{+}$. *But this new form may be quite bulky, but it's practical because it is more secure to the goal in avoiding generating the mistake. Furthermore, this explication is also suitable in the software's application because the flowchart of the program is avoided by a node, which would otherwise have one input and at least two outputs. Let's say that we will give three explications in this article. The first explication is the solution of the general quadratic equation. Another explanation is the calculation of the triangle angularity measurements, which consist of three directions in the coordinate plane, which are given in explicit form. The third explication hypothesis is to find the argument for Cauchye's, or a trigonometric, complex-number form, obtained from a Gaussian, or ordinary, form of a complex number. Finally, the fourth explication refers to an indefinite integral.*

Keywords. *Explication, integrating explicit formulas.*

Napomena 1. Možda je dobro, da nešto kažemo i o genezi ovoga termina; naime u *Rječniku stranih riječi* (Bratoljub Klaić) se navodi sljedeće: *eksplikacija* lat.(explicare – razviti, razastrijeti) izlaganje, razjašnjivanje, objašnjivanje, postepeno tumačenje; *eksplikativan*, -vna,-vno – koji objašnjuje; objašnjujući, objašnjajni, objasnidbeni, dok značenje za *eksplicite* lat.-jasno, izrijekom; protivno *implicite* (već smo se sreli s pojmovima *eksplicitni* i *implicitni* oblik npr. jednadžbe pravca). Nakon ovog objašnjenja bit će nam jasno, u tekstu koji slijedi, zašto smo uzeli termin *matematička eksplikacija ili samo eksplikacija.* Recimo i to, da eksplikacija npr. u antropologiji ima drugo značenje.

a) Eksplikacija za rješenja opće kvadratne jednadžbe

Neka je dana opća kvadratna rješenja

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \not\in 0;\ a,b,c \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Nadalje, ako je

$$D = b^2 - 4ac, \quad i^2 = -1\ (i \neq \sqrt{-1};\ \textit{pogledati}\ [7]) \tag{2}$$

tada je opća eksplikacija te jednadžbe dana s vezom

$$x_{1,2} = \frac{1+\operatorname{sgn} D}{2} \cdot \operatorname{sgn} D \cdot \left(\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \right) + \left(1 - \operatorname{sgn}^2 D\right) \cdot \frac{-b}{2a} + \frac{1-\operatorname{sgn} D}{2} \cdot (-\operatorname{sgn} D) \cdot \left(\frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} \right), \tag{3}$$

do koje dolazimo, ako sintentiziramo ove tri dobro poznate implikacije:

$$(D>0) \Rightarrow \left(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \right), \quad (D=0) \Rightarrow \left(x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \right), \quad (D<0) \Rightarrow \left(x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} \right).$$

Svakako, da je suvišno, da dajemo konkretne primjere za ovu eksplikaciju, jer se to gradivo detaljno obrađuje u srednjoj školi.

b) Eksplikacija za mjeru unutarnjih kutova trokuta u ravninskom koordinatnom sustavu

Neka su zadani pravci i njima pripadajuće jednadžbe, dakle

$$p_k:\ y = k_k x + l_k\ ,\ (k = 1,2,3)\ , \tag{4}$$

i neka su oni nosioci stranica trokuta $T_1T_2T_3$, gdje je

$$T_1 \equiv p_2 \cap p_3,\ T_2 \equiv p_3 \cap p_1,\ T_3 \equiv p_1 \cap p_2. \tag{5}$$

Nadalje, u vrhovima T_1, T_2, T_3 toga trokuta neka su vrhovi šiljastih kutova, čije su mjere $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ respektivno; te su sva tri unutarnja kuta ako je trokut šiljastokutni ili je jedan vanjski šiljasti kut ako je trokut tupokutan. Jasno je, da su tangensi mjera tih šiljastih kutova dani relacijama

$$tg\varphi_1 = \left|\frac{k_3 - k_2}{1 + k_3k_2}\right|,\ tg\varphi_2 = \left|\frac{k_1 - k_3}{1 + k_1k_3}\right|,\ tg\varphi_3 = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}\right|. \tag{6}$$

Dakle za šiljastokutni trokut vrijrdi

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi, \tag{7}$$

Nadalje, znamo da trokut ima barem dva šiljasta kuta, i da je suma bilo koja dva kuta jednaka nasuprotnom vanjskom kutu, pa ćemo tu činjenicu koristiti u daljnjoj analizi ovog problema.

Ako pomoću formula (6) dobijemo da je

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3, \tag{8}$$

tada to znači da su mjere nutarnjih kutova φ_1, φ_2 i $\pi - \varphi_3$ kod vrhova T_1, T_2, T_3 respektivno. Evidentno je, da je sada $\pi - \varphi_3$ mjera unutrašnjeg tupog kuta kod vrha T_3. Analogo se izvode zaključci i za slučajeve

$$\varphi_2 + \varphi_3 = \varphi_1, \tag{9}$$

$$\varphi_3 + \varphi_1 = \varphi_2, \tag{10}$$

do kojih dolazimo iz (8), ako načinimo ciklički pomak.

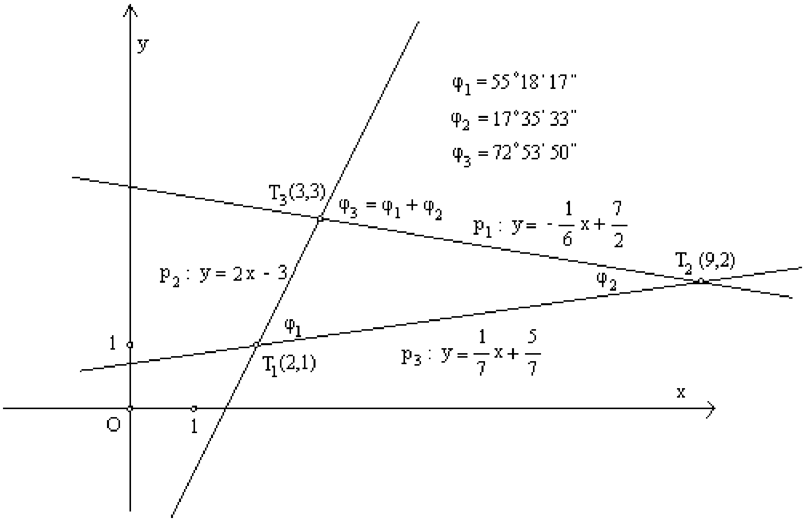
Sada ćemo relacije od (8-10) sintetizirati u jednoj vezi;

$$\begin{aligned}
\Phi = {} & [\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3]\operatorname{sgn}\left|(-\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)\right| + \\
& + [(\pi - \varphi_1) + \varphi_2 + \varphi_3]\operatorname{sgn}\left|(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi)(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)\right| + \\
& + [\varphi_1 + (\pi - \varphi_2) + \varphi_3]\operatorname{sgn}\left|(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi)(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)(-\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)\right| + \\
& + [\varphi_1 + \varphi_2 + (\pi - \varphi_3)]\operatorname{sgn}\left|(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi)(-\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)\right| = \pi.
\end{aligned} \tag{11}$$

Jasno je, da ako (7) supstituiramo u (11) slijedi da su unutarnji kutovi šiljasti, a za slučajeve od (8), (9) i (10) dobivamo, da su dva unutarnja kuta šiljasta. Tako npr. za (8) dobijemo da je

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + (\pi - \varphi_3) = \pi, \tag{12}$$

a to znači da su unutarnji kutovi, čije su mjere $\varphi_1, \varphi_2, (\pi - \varphi_3)$, kod vrhova T_1, T_2, T_3, kako smo već rekli. Na osnovi iznesenog zaključujemo, da znamo naći mjere kutova za bilo koji trokut, koji je zadan u ravninskom koordinatnom sustavu, s time da ga ne moramo crtati.



Slika 1.

Zadatak 1. Neka su vrhovi trokuta u točkama: $T_1(2,1), T_2(9,2), T_3(3,3)$. Nađimo mjere unutarnjih kutova toga trokuta i pokažimo da je unutarnji kut u vrhu T_3 tupi, kao što je prikazano na Slika 1.

Rješenje. Jednadžba pravca T_2T_3 je $y = -\frac{1}{6}x + \frac{7}{2}$, dakle koeficijent smjera je $k_1 = -\frac{1}{6}$. Lako nađemo i ostala dva koeficijenta smjera pravaca T_3T_1 i T_1T_2, koji iznose $k_1 = 2$ i $k_3 = \frac{1}{7}$. Ako te vrijednosti uvrstimo u formule (6), tada su mjere kutova: $\varphi_1 = 55^o 18' 17''$, $\varphi_2 = 17^o 35' 33''$, $\varphi_3 = 72^o 53' 50''$. Vidimo da je $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$, a to znači da je unutarnji kut kod vrha T_3 tupi, kao što smo u (8) i rekli. □

Prema tome, ovim zadatkom potvrđujemo, da možemo naći mjere kutova trokuta, koji je zadan sa svojim vrhovima u koordinatnom sustavu, a ne moramo crtati njegovu sliku.

c) Eksplikacija za argument kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku

U drugom razredu srednje škole se obrađuju operacije s kompleksnim brojevima u obliku

$$z = x + iy\,, \tag{13}$$

gdje je $x, y \in \mathbb{R}$; koji se zove *obični* ili *Gaussov oblik kompleksnog broja*, a u četvrtom razredu se uvodi *trigonometrijski* ili *Cauchyev oblik kompleksnog broja* u obliku

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{14}$$

gdje je

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \ \varphi = arctg\,\frac{y}{x}\,. \tag{15}$$

No, recimo i to, da (14) možemo prikazati i u *eksponencijalnom* ili *Eulerovom obliku kompleksnog broja*

$$z = re^{i\varphi}. \tag{16}$$

Jasno je, da su mogućnosti za predznak, odnosno vrijednost, veličina x i y iz (13) dane tablicom

$$\begin{array}{ccccccccc} slucaj & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ x & + & - & - & + & + & 0 & - & 0\,. \\ y & + & + & - & - & 0 & + & 0 & - \end{array} \tag{17}$$

Ako su $\varphi_k\ (k = 1,2,...,8)$ argumenti kompleksnih brojeva, tada će npr. φ_{1-4} predstavljati argumente koji zadovoljava uvjete počevši od C_1 do zaključno s C_4, ili φ_{5-8} su argumenti koji zadovoljava uvjete počevši od C_5 do zaključno s C_8.

Jasno je da ćemo proanalizirati sve slučajeve iz tablice (17), jer nas zanimaju vrijednosti od φ_k, odnosno na kraju eksplicitna vrijednost za φ.

1. slučaj. Ako je $x, y > 0$, tada je

$$\varphi_1 = arctg\left|\frac{y}{x}\right|. \tag{18}$$

2. slučaj. Ako je $x < 0$ i $y > 0$, tada je

$$\varphi_2 = \pi - arctg\left|\frac{y}{x}\right|. \tag{19}$$

3. slučaj. Ako je $x, y < 0$, tada je

$$\varphi_3 = \pi + arctg\left|\frac{y}{x}\right|. \tag{20}$$

4. slučaj. Ako je $x > 0$ i $y < 0$, tada je

$$\varphi_4 = 2\pi - arctg\left|\frac{y}{x}\right|. \tag{21}$$

Sada ćemo sintetizirati formule od (18-21), naime jasno je, da je

$$
\begin{aligned}
\varphi_{1-4} &= \frac{\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y}{2} \cdot \frac{2 + \operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y}{4} \cdot arctg\left|\frac{y}{x}\right| \\
&+ \frac{-\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y}{2} \cdot \frac{2 - \operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y}{4} \cdot \left(\pi - arctg\left|\frac{y}{x}\right|\right) + \\
&- \frac{\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y}{2} \cdot \frac{2 - \operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y}{4} \cdot \left(\pi + arctg\left|\frac{y}{x}\right|\right) + \\
&\frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y}{2} \cdot \frac{2 + \operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y}{4} \cdot \left(2\pi - arctg\left|\frac{y}{x}\right|\right).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Lako se vidi, da ako u (22) supstituiramo $x, y > 0$ (1. slučaj) dobijemo vezu (18); a slično se mogu provjeriti i relacije (19-21). Ovu glomaznu formulu (22) možemo pojednostavniti, uz dosta ispisa, u obliku

$$
\varphi_{1-4} = \operatorname{sgn}(xy) arctg\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{\operatorname{sgn}|xy|}{2}\left[\operatorname{sgn}^2 x - (\operatorname{sgn} x)(\operatorname{sgn} y) - \operatorname{sgn} y + \operatorname{sgn}^2 y\right]\pi . \tag{23}
$$

Napomenimo, da smo u (23) uvažili izraz $\operatorname{sgn}|xy| \equiv 1$, ako je $xy \neq 0$, što ćemo iskoristiti u drugom dijelu poopćenja.

<u>*5. slučaj*</u>. Ako je $x > 0$ i $y = 0$, tada je

$$\varphi_5 = \operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y - 1. \tag{24}$$

<u>*6. slučaj*</u>. Ako je $x = 0$ i $y > 0$, tada je

$$\varphi_6 = (\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y)\frac{\pi}{2} . \tag{25}$$

<u>*7. slučaj*</u>. Ako je $x < 0$ i $y = 0$, tada je

$$\varphi_7 = (-\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y)\pi . \tag{26}$$

<u>*8. slučaj*</u>. Ako je $x = 0$ i $y < 0$, tada je

$$\varphi_8 = (\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y)\frac{3\pi}{2} . \tag{27}$$

Jasno je, da ćemo sada i formule od (24-27) sintetizirati, dakle

$$
\begin{aligned}
\varphi_{5-8} &= (\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y - 1)(\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y + 1) + \\
&(\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y)\frac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sgn} x)(1 + \operatorname{sgn} x)\frac{1 + \operatorname{sgn} y}{2} + \\
&+ (-\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y)\pi\frac{1 - \operatorname{sgn} x}{2}(1 - \operatorname{sgn} y)(1 + \operatorname{sgn} y) + \\
&(\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y)\frac{3\pi}{2}(1 - \operatorname{sgn} x)(1 + \operatorname{sgn} x)\frac{1 - \operatorname{sgn} y}{2} .
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Vidljivo je da član $(\operatorname{sgn} x+\operatorname{sgn} y-1)(\operatorname{sgn} x+\operatorname{sgn} y+1)$ u (28) možemo zanemariti, jer je jednak nuli za slučajeve od C_5 do C_8, dakle opći oblik argumenta kompleksnog broja je

$$\varphi=\varphi_{1-4}+(2-|\operatorname{sgn} x|-|\operatorname{sgn} y|)\varphi_{5-8}, \qquad (29)$$

ili u punom zapisu imamo

$$\begin{aligned}\varphi &= \operatorname{sgn}(xy)\, arctg\left|\frac{y}{x}\right|+\frac{\operatorname{sgn}|xy|}{2}\left[\operatorname{sgn}^2 x-(\operatorname{sgn} x)(\operatorname{sgn} y)-\operatorname{sgn} y+\operatorname{sgn}^2 y\right]\pi+\\ &+(2-|\operatorname{sgn} x|-|\operatorname{sgn} y|)(\operatorname{sgn} x+\operatorname{sgn} y)(1-\operatorname{sgn}^2 x)(1+\operatorname{sgn} y)\,\frac{\pi}{4}+\\ &+(2-|\operatorname{sgn} x|-|\operatorname{sgn} y|)(\operatorname{sgn} x-\operatorname{sgn} y)(1-\operatorname{sgn} x)(1-\operatorname{sgn} y)(1+3\operatorname{sgn} x-2\operatorname{sgn} y)\,\frac{\pi}{4}, \qquad (30)\end{aligned}$$

što nam je i bio cilj da dobijemo tu formulu. Svakako, da (30) možemo provjeriti za slučajeve od C_1 do C_8, i dobivati ćemo veze od (18-21), odnosno od (24-27).

Napomenimo, da koristeći (30) lako provjerimo ove implikacije:

$$(z_1=3)\Rightarrow(\varphi=0),\ (z_2=2+5i)\Rightarrow(\varphi=arctg\frac{5}{2}),\ (z_3=4i)\Rightarrow(\varphi=\pi/2),$$

$$(z_4=2+3i)\Rightarrow(\varphi=\pi-arctg\frac{3}{2}),$$

$$(z_5=-2)\Rightarrow(\varphi=\pi),\ (z_6=-5-2i)\Rightarrow(\varphi=\pi+arctg\frac{2}{5}),$$

$$(z_7=-6i)\Rightarrow(\varphi=3\pi/2),$$

$$(z_8=5-3i)\Rightarrow(\varphi=2\pi-arctg\frac{3}{5}).$$

d) Primjeri dvije eksplikacije vezane za neodređeni integral

Kod rješavanja problema u vezi neodređenih integrala realtivno često se nailazi na mogućnost primjene eksplikacije. To se vidi u [2], iako tamo taj prikaz nije primjenjen. No, mi ćemo iz istog izvora prikazati eksplikacije za dva neodređena integrala.

Naime, ako je

$$X=ax+b,\quad Y=fx+g,\quad \Delta=bf-ag,$$

tada integralu

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{XY}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{-af}} arctg \sqrt{-\dfrac{fX}{aY}} + C & za \quad af < 0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{af}} \ln(\sqrt{aY} + \sqrt{fX}) + C & za \quad af > 0, \end{cases}$$

pripada eksplikacija

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{XY}} = \frac{1 - \operatorname{sgn}(af)}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{-af}} arctg \sqrt{-\frac{fX}{aY}} + \frac{1 + \operatorname{sgn}(af)}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{af}} \ln(\sqrt{aY} + \sqrt{fX}) + C,$$

a integralu

$$I_2 = \int \frac{dx}{Y\sqrt{X}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{-\Delta f}} arctg \dfrac{f\sqrt{X}}{\sqrt{-\Delta f}} + C & za \quad \Delta f < 0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{\Delta f}} \ln \dfrac{f\sqrt{X} - \sqrt{\Delta f}}{f\sqrt{X} + \sqrt{\Delta f}} + C & za \quad \Delta f > 0, \end{cases}$$

pripada eksplikacija

$$I_2 = \int \frac{dx}{Y\sqrt{X}} = \frac{1 - \operatorname{sgn}(\Delta f)}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{-\Delta f}} arctg \frac{f\sqrt{X}}{\sqrt{-\Delta f}} + \frac{1 + \operatorname{sgn}(\Delta f)}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\Delta f}} \ln \frac{f\sqrt{X} - \sqrt{\Delta f}}{f\sqrt{X} + \sqrt{\Delta f}} + C.$$

Suvišno je davati objašnjenje za nalaženje ovih rezultata, jer je sve vidljivo.

Napomena 2. Bilo bi zanimljivo naći eksplikacije rješenja ovih jedostavnih trigonometrijskih jednadžbi: $\sin x = a$, $\cos x = b$, gdje je $-1 \le a, b \le 1$.

Napomena 3. Eksplikacije koje smo obradili su istoga tipa, jer smo za objedinjavanje upotrebili navedene idempotentne funkcije. Međutim postoje i drugi tipovi eksplikacija. Napomenimo, da je u [5] obrađena dosta složena kumulativna eksplikacija, koja se bazira na variranju indeksa. Naime neka su A, B, C vrhovi trokuta; a a_1, b_1, c_1 su duljine stranica nasuprot tim vrhovima; a_2, b_2, c_2 su duljine visina iz tih vrhova i konačno a_3, b_3, c_3 su duljine težišnica iz tih vrhova, tada vrijedi implikacija

$$\left(\left(c_k^2 = a_k b_k\right) \& \left(a_k \in \langle 0, \infty \rangle\right)\right) \Rightarrow \left(b_k \in \left\langle \frac{3 - \sqrt{5}}{2} a_k, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} a_k \right\rangle\right), \text{ gdje je } k = 1,2,3;$$

a to znači, da po zakonu analogije također vrijedi i implikacija

$$\left(\left(c_k^2 = a_k b_k\right) \& \left(b_k \in \langle 0, \infty \rangle\right)\right) \Rightarrow \left(a_k \in \left\langle \frac{3-\sqrt{5}}{2} b_k\,,\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} b_k \right\rangle\right).$$

Možemo samo napomenuti, da se do ovih rezultata može doći složenijom analizom simetrične jednadžbe četvrtog stupnja, što je u [5] i napravljeno.

Literatura

[1] G. L. Alexanderson. *The random walks of George Pólya*. Mathematical Association of Amerika, Cambridge University Press, 2000.

[2] I.N. Bronštejn-K.A. Semendjajev. *Matematički priručnik*, Tehnička knjiga, Zagreb 1964.

[3] P. Svirčević. Kumulativna formula za površinu trokuta. *MFL*, br. 3, Zagreb, 2008/09.

[4] P. Svirčević. Površina konveksnog i konkavnog četverokuta pomoću jedne formule, *MAT-KOL* (Banja Luka), **XXII** (1)(2016), 45-59.

[5] П. Свирчевић. Заједничка анализа три тврђења о троуглу, *Настава математике* (Београд), **LIX** (1-2)(2014), 16-18.

[6] H.Taylor and L.Taylor, *George Pólya - Master of Discovery*. Booksurge Publishing, Palo Alto, 2006.

[7] N. O. Vesić. Imitacija, manir i stil u matematici, *MAT-KOL* (Banja Luka), **XXII** (3)(2016), 149-163.