MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXIII (4)(2017), 269-272 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1704269R

Визуелизација неких ирационалних бројева

Даниел А. Романо
Кордунашка 6, Бања Лука, Б&Х
e-mail: bato49@hotmail.com

При недавној комуникацији овог истраживача математичког образовања са свршеним ученицима средњих школа током пријемних испита ради уписа на Машински факултет Универзитета у Бањој Луци, процјењивала се математичка писменост пријављених кандидата на знања из домена рационалних и ирационалних бројева. Код свих тестираних кандидата регистровано је познавање термина 'рационални бројеви' и термина 'ирационални бројеви'. Међутим, утврђена је значајна разлика при идентификовању концепта рационалног броја и односу на концепт ирационалног броја. Већина тестираних кандидата без потешкоћа је препознавала примјере рационалних бројева док то није био случај са препознавањем примјера ирационалних бројева. При тим тестирањима, тек нешто више од половине пријављених кандидата детерминисало је рационалан број као количних два природна броја. Мали број кандидата потврдио је процјену „*Број је рационалан ако и сам ако се може представити у облику бесконачног периодичног децималног броја*.“ Даље, ни један од тестираних кандидата није понудио прихватљив опис концепта ирационалног броја, док је занемарљив број ових кандидата потврдио изјаву „*Број је ирационалан реалан број ако и само ако се може представити у облику бесконачног непериодичног децималног броја*.“ С друге стране, ни један од тестираних кандидата није понудио прихватљив одговор на захтјев „*Прикажи геометријску репрезентацију бар једног ирационалног броја*.“ Овај кратки увод је подлога за констатацију:

Свршени средњошколсци нашег школског система немају довољно добро консолидовао знање о концепту ирационалног броја.

Понукан претходном констатацијом, у овом тексту ми нудимо неке начине представљања неких од ирационалних бројева. Намјера нам је да наставницима и њиховим ученицима покажемо да су то објекти који постоје, па се зато и зову *реални* бројеви, тј. *бројеви који постоје,* јер је скоро без потешкођа могуће конструисати геометријске илустрације неких ирационалних бројева.

Ученичке / студентске проблеме са препознавањем, разумијевањем и прихватањем ирационалних бројева уочавали су многли истраживачи математичког образовања. Погледат, на примјер, текстове [9], [10], [11] i [13]. Прегледањем доступне литературе, установили смо да је текст [2] један од првих радова у којима је третиран наставнички проблем са интерпретацијом ирационалних бројева ученицима / студентима. У том правцу су и текстови: [4], [6], [14] и [15]. Наравно, сугеришемо читаоцу да погледа и књигу [7]. О ирационалним бројева писали су и наши аутори [1] и [8]. О историјском аспекту на ирационалне бројеве сугеришемо да се погледају радови: [3] и [7].

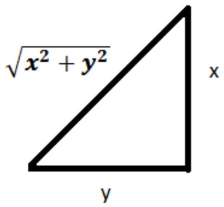
Најједноставнија два примјера којим се наставници могу користити у настави су слиједећи:

(1) Ослањањам на Питагорин теорем, примјенљив на правоугли троугао, ако су x,y редом странице троугла а c његова хипотенуза, онда из једнакости

$$x^2+y^2 = c^2$$

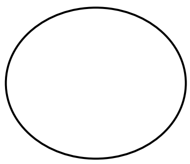
слиједи

$$c = \sqrt{x^2+y^2}.$$



Специјално, за $x = 1$ и $y = 1$, имамо $c = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ за који се зна да је ирационалан број. Дакле, хипотенуза овог правоуглог троугла представља ирационалан број $\sqrt{2}$.

(2) Површина круга полупречника r = 1 износи π, за који се такође зна да је ирационалан број.

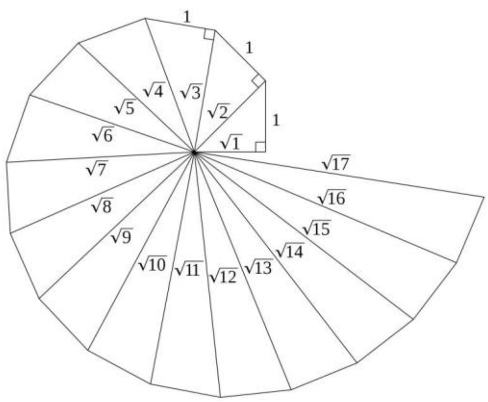


Дакле, површина јединичног круга репрезентује ирационалан број π.

Будући да објекти као што су хипотенуза правоуглог троугла са јединичним страницама и јединични круг постоје, то је за ученике / студенте прихватљиво да постоје и њихови мјерни бројеви.

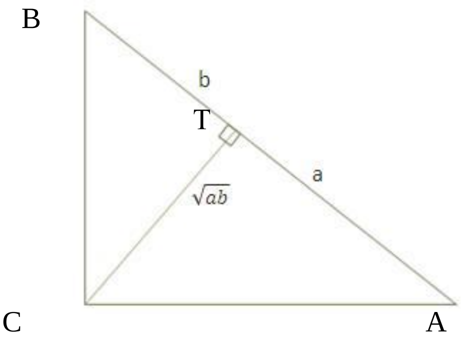
Оваквих примјера, посредством који се репрезентују неки од ирационалних бројева, има више.

(3) Подсјећамо читаоце на Теодосијеву спиралу (Spiral of Theodorus')



(4) Конструишимо правоугли троугао над збиром a+b дужи a и b тако да пројекција тјемена C над правим углом 'пада' у тачку T у којој се дужи a и b

спајају (и тако чине хипотенузу овог троугла). Наш четврти примјер назваћемо 'висина овог правоуглог троугла чија је хипотенуза збир a+b ':



За троугао ΔABC имамо

$$(a+b)^2 = CA^2 + BC^2.$$

С друге стране, за троугао ΔCAT и троугао ΔCTB имамо

$$a^2 + TC^2 = CA^2$$

$$CT^2 + b^2 = BC^2.$$

Одавде слиједи

$$(a+b)^2 = CA^2 + BC^2 = a^2 + TC^2 + CT^2 + b^2$$

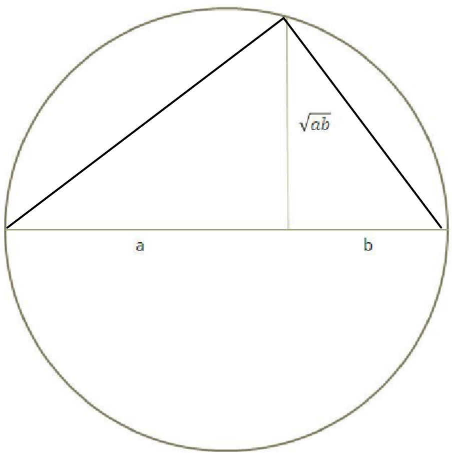
и

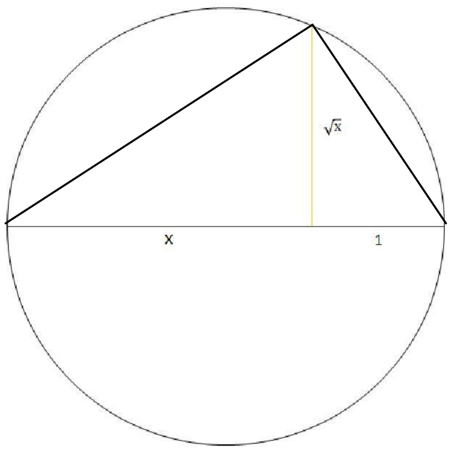
$$CT^2 = ab.$$

Дакле, за висину троугла ΔABC, имамо

$$CT = \sqrt{ab}\ .$$

(5) Нека наш пети примјер буде тзв. 'метод кружнице' који за $a = x$ и $b = 1$ слиједи из претходног: Конструишемо кружницу са пречником x=a+b тако да центар ове кружнице буде у тачки $\frac{a+b}{2}$. Периферни угао над пречником ове кружнице конструисан у тачки X чија пројекција на пречник 'пада' у спој Y дужи a и b је прави угао. Према претходном примјеру, дуж XY има мјеру $\sqrt{ab}$.





Специјално за $a = x$ и $b = 1$, добијамо репрезентацију броја $\sqrt{x}$. Дакле, будући да је за просте бројеве x, број $\sqrt{x}$ ирационалан број на овај начин конструисана је геометријска репрезентација ових ирационалних бројева.

References / Литература

[1] M. Anđić. O iracionalnim brojevima. *Mat-Kol (Banja Luka)*, **23**(2)(2916), 91-105.

[2] A. Arcavi, M. Bruckheimer and R. Ben-Zvi. History of mathematics for teachers: the case of irrational numbers. *For the learning of mathematics*, **7**(2)(1987), 18-23.

[3] B. Čekrlija. *Vremeplov kroz matematiku*. Banja Luka: Grafimark, 2000.

[4] M. Doritou and E. Gray. Teachers' subject knowledge: the number line representation. In: V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.) *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, January 28th-February 1st 2009 Lyon, France (pp. 1734-1743), Lyon: Institut National De Recherche Pedagogique, 2010.

[5] E. Fischbein, R. Jehiam & D. Cohen. The concept of irrational number in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, **29**(1995), 29-44.

[6] N. Hayfa. Dimensions of knowledge and ways of thinking of irrational numbers. *Athens Journal of Education*, **3**(2)(2016), 137-154.

[7] H. P. Manning. *Irrational numbers and their representation by sequences and series*. New York: John Wiley and Sons, 1906.

[8] M. Pezer i J. Matejaš. Brojevi π, e, i kroz povijest**.**
Доступно на адреси: https://www.halapa.com/pravipdf/brojevi.pdf

[9] N. Sirotic & R. Zazkis. Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, **65**(1) (2007), 49-76.

[10] N. Sirotic & R. Zazkis. Irrational numbers on the number line – where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **38**(4) (2007), 477-488.

[11] M. K. Srivastav. Representation of irrational numbers on number lines and study of mathematical error. *International Journal of Engineering Research and Allied Sciences* (IJERAS), **2**(3)(2017), 5-6.

[12] M Gr. Voskoglou and G. D. Kosyvas. Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. *REDIMAT- Journal of Research in Mathematics Education*, **1**(3)(2012), 301 -336.

[13] R. Zazkis. Representing numbers: prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **36**(2–3)(2005), 207–218.

[14] R. Zazkis & N. Sirotić. Representing and defining irrational numbers: exposing the missing link. *CBMS Issues in Mathematics Education*, **16**(2010).

[15] R. Zazkis and N. Sirotić. Making sense of irrational numbers: Focusing on representation. In: M. J. Høines and A. B. Fuglestad (Eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp 497–504), Bergen: Bergen University College 2005.