MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXIII (4)(2017), 229-235 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1704229Ž

ЈЕДНА КЛАСА ХЕРОНОВИХ ТРОУГЛОВА БЕЗ ЦЕЛОБРОЈНИХ ВИСИНА

Милан Живановић

Висока школа струковних студија за образовање васпитача, Крушевац, Ћирила и Методија, Србија
e-mail: *mzivanovic@vaspks.edu.rs*

Апстракт. Троугао коме су странице изражене бројевима 5, 29, 30 је пример Хероновог троугла који нема целобројних висина. У овом раду ће бити представљена једна класа Херонових троуглова без целобројних висина код којих је полуобим изражен бројевима који су потпуни квадрати.

Кључне речи: Питагорини троуглови; Херонови троуглови; Херонови троуглови без целобројних висина.

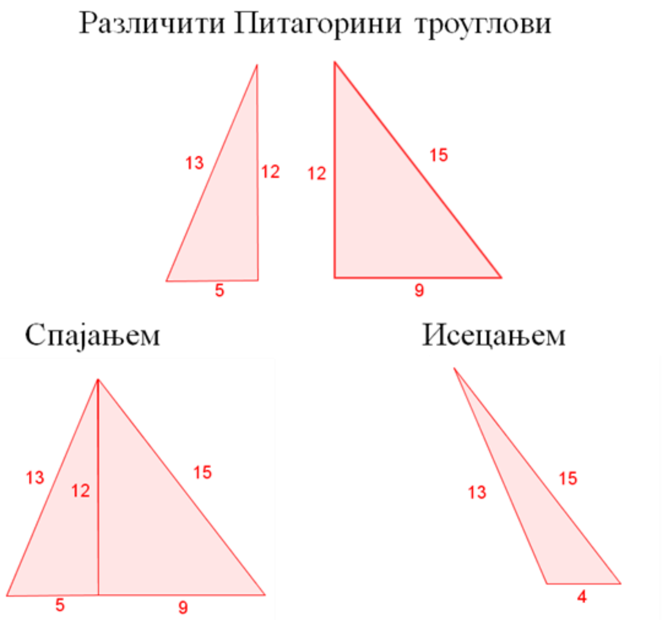
Abstract. The triangle in which the pages are expressed by numbers 5, 29, 30 is an example of Heron's triangle that does not have integer heights. In this paper will be presented a class of Heron's triangles without integer heights, in which the semiperimeter is expressed by numbers that are complete squares.

Key word: Pythagorean triangles, Heronian triangles, Heronian triangles without integer heights

AMS Subject Classification 2010: 11D09
ZDM Subject Classification 2010: F70, G30

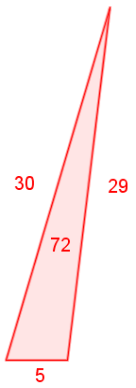
Увод

У свом раду *Метрика* Херон је доказао чувену формулу за израчунавање површине троугла са страницама a, b и c. Ту формулу данас пишемо у облику $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ где је s полуобим троугла. Као пример он наводи троугао са страницама 13, 14, 15 и израчунава његову целобројну површину 84. Отуда троуглове са целобројним страницама и површином називамо Хероновим. Правоугли троуглови којима су дужине страница изражене природним бројевима називају се Питагорини троуглови. Ако су мере тих страница још и узајамно прости бројеви кажемо да је такав троугао примитиван Питагорин троугао. Понато је да су катете примитивног Питагориног троугла различите парности [4]. Стога је површина примитивног Питагориног троугла изражена природним бројем. Отуда је и површина осталих Питагориних троуглова, који се из примитивних добијају хомотетијом, такође изражена природним бројем. Закључујемо да су Питагорини троуглови једна класа Херонових троуглова. Спајањем два подударна Питагорина троугла дуж једнаке катете добија се једнакокраки Херонов троугао. Херонови троуглови могу настати и спајањем два неподударна Питагорина троугла дуж заједничке једнаке катете или исецањем мањег од тих троуглова из већег након поклапања по тој једнакој катети (Слика 1).



Слика 1.

На описани начин настају Херонови троуглови којима су висине изражене природним бројем. Може се десити да се на овај начин добију троуглови којима за странице a, b, c важи $NZD(a,b,c) = n \neq 1$. У неким од тих случајева се након хомотетије са коефицијентом n^{-1} добијају и Херонови троуглови којима висине нису цели бројеви. Например исецањем Питагориног троугла $(493, 4176, 4205)$ из Питагориног троугла $(1218, 4176, 4350)$ се добија Херонов троугао $(725, 4205, 4350)$. Након хомотетије са коефицијентом 145^{-1} тај троугао се пресликава у троугао $(5, 29, 30)$ који је Херонов без целобројних висина (Слика 2).



$$h_1 = \frac{144}{5}$$
$$h_2 = \frac{144}{29}$$
$$h_3 = \frac{24}{5}$$

Слика 2.

Херонове троуглове без целобројних висина посебно је изучавао Јиу Паул [7]. Најмању површину у тој класи има тупоугли троугао (3,25,26). Међу оштроуглим троугловима ове класе са најмањом површином је троугао (15,34,35).

Индијски математичар Брахмагупта је користећи рационалне бројеве $m,\ n,\ k$ странице Хероновог троугла израчунавао помоћу формула:

$$a = n(m^2 + k^2)$$
$$b = m(n^2 + k^2)$$
$$c = (m + n)(mn - k^2)$$

Касније су Ојлер, Кармајкл и на крају Бухолц поставили услове $NZD(m,n,k) = 1$, $mn > k^2 \geq \frac{m^2 n}{2m + n}$ и $m \geq n \geq 1$ којима се добијају сва узајамно проста решења (видети [5]).

Посебно су интересантни такозвани скоро једнакостранични Херонови троуглови. То је класа Херонових троуглова којима су странице изражене са три узастопна природна броја. Такви троуглови су например (3,4,5), (13,14,15), (51,52,53), (193,194,195) итд. Опште решење овог проблема дао је1864. Едвард Санг у раду [6]. Аналоган резултат је добијен и у раду [3] из општије класе Херонових троуглова чије су странице елементи трочланог аритметичког низа.

Главни резултати

У раду [2] је представљено неколико класа Херонових троуглова без целобројних висина добијених поступком описаним у уводу. Овде ћемо анализирати једну од њих. Претпоставимо да су дати Питагорини троуглови

(a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) и нека је $a_1 = a_2 = (10k+3)(10l+9)$, где је $10l+9 > 10k+3$ и $l, k \in N_0$. Тада је за $i \in \{1,2\}$

$$c_i^2 - b_1^2 = (c_i + b_i)(c_i - b_i) = (10k+3)^2(10l+9)^2$$

Из тих једначине можемо посматрати два система линеарних једначина:

$$c_1 + b_1 = (10k+3)^2(10l+9)^2 \wedge c_1 - b_1 = 1$$

$$c_2 + b_2 = (10k+3)^2 \wedge c_2 - b_2 = (10l+3)^2$$

Из првог добијамо

$$c_1 = \frac{(10k+3)^2(10l+9)^2 + 1}{2} \text{ и } b_1 = \frac{(10k+3)^2(10l+9)^2 - 1}{2},$$

а из другог

$$c_2 = \frac{(10k+3)^2 + (10l+9)^2}{2} \text{ и } b_2 = \frac{(10l+9)^2 - (10k+3)^2}{2}$$

Тако добијамо следеће две класе Питагориних троуглова

$$\left((10k+3)(10l+9), \frac{(10l+9)^2(10k+3)^2 - 1}{2}, \frac{(10k+3)^2(10l+9)^2 + 1}{2}\right)$$

и

$$\left((10k+3)(10l+9), \frac{(10l+9)^2 - (10k+3)^2}{2}, \frac{(10k+3)^2 + (10l+9)^2}{2}\right)$$

Спајањем таква два одговарајућа троугла дуж подударне катете и после хомотетије са коефицијентом 5^{-1} добијамо следећу класу Херонових троуглова:

$$\left(\frac{(10k+3)^2 + (10l+9)^2}{10}, \frac{(10k+3)^2(10l+9)^2 + 1}{10}, \frac{(10k+3)^2(10l+9)^2 + (10l+9)^2 - (10k+3)^2 - 1}{10}\right)$$

У табели 1. представљено је првих 20 троуглова из те класе за $k = 0$.

Табела 1.

l	*a*	*b*	*c*	*s*	*s-a*	*s-b*	*s-c*
0	9	73	80	81	72	8	1
1	37	325	360	361	324	36	1
2	85	757	840	841	756	84	1
3	153	1369	1520	1521	1368	152	1
4	241	2161	2400	2401	2160	240	1

5	349	3133	3480	3481	3132	348	1
6	477	4285	4760	4761	4284	476	1
7	625	5617	6240	6241	5616	624	1
8	793	7129	7920	7921	7128	792	1
9	981	8821	9800	9801	8820	980	1
10	1189	10693	11880	11881	10692	1188	1
11	1417	12745	14160	14161	12744	1416	1
12	1665	14977	16640	16641	14976	1664	1
13	1933	17389	19320	19321	17388	1932	1
14	2221	19981	22200	22201	19980	2220	1
15	2529	22753	25280	25281	22752	2528	1
16	2857	25705	28560	28561	25704	2856	1
17	3205	28837	32040	32041	28836	3204	1
18	3573	32149	35720	35721	32148	3572	1
19	3961	35641	39600	39601	35640	3960	1

Лако се показује да је полуобим троулова из табеле изражен бројем који је потпун квдрат:

$$s=\frac{9+(10l+9)^2}{20}+\frac{9(10l+9)^2+1}{20}=\frac{20(10l+9)^2}{20}+\frac{9(10l+9)^2+(10l+9)^2-9-1}{20}=(10l+9)^2.$$

За $k\neq 0$ полуобим је:

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(10k+3)^2+(10l+9)^2}{10}+\frac{(10k+3)^2(10l+9)^2+1}{10}+\frac{(10k+3)^2(10l+9)^2-1}{10}+\frac{(10l+9)^2-(10k+3)^2}{10}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2(10l+9)^2+2(10k+3)^2(10l+9)^2}{10}\right)=\frac{(10l+9)^2+(10k+3)^2(10l+9)^2}{10}=(10l+9)^2\cdot\frac{1+(10k+3)^2}{10}$$

$$=(10l+9)^2\left(10k^2+6k+1\right)$$

Он ће бити потпун квадрат акко је израз $10k^2+6k+1$ квадрат, тј. ако важи

$$10k^2+6k+1=m^2 \tag{1}$$

Тривијално решење једначине (1) је $(k,m)=(0,1)$ за које се добија у табели 1. већ представљена класа. Сва рационална решења једначине (1) добијају сменом $m=pk+1$ за неко рационално p (видети [4]). Након те смене и сређивања једначине добија се поред тривијалног решења и решење

(2) $$k = \frac{2p - 6}{10 - p^2}.$$

За $p = \frac{122}{47}$ је $k = 444$, а $m = 1405$. У том случају је $s = 1405^2(10l + 9)^2$, $l \in N_0$. Првих двадесет троуглова из ове класе, тако да су им странице уређене у растући низ, представљени су у табели 2.

Табела 2.

l	*a*	*b*	*c*	*s*	*s-a*	*s-b*	*s-c*
0	1974033	157922000	159896017	159896025	157921992	1974025	8
1	1974061	710649000	712622989	712623025	710648964	1974025	36
2	1974109	1658181000	1660154941	1660155025	1658180916	1974025	84
3	1974177	3000518000	3002491873	3002492025	3000517848	1974025	152
4	1974265	4737660000	4739633785	4739634025	4737659760	1974025	240
5	1974373	6869607000	6871580677	6871581025	6869606652	1974025	348
6	1974501	9396359000	9398332549	9398333025	9396358524	1974025	476
7	1974649	12317916000	12319889401	12319890025	12317915376	1974025	624
8	1974817	15634278000	15636251233	15636252025	15634277208	1974025	792
9	1975005	19345445000	19347418045	19347419025	19345444020	1974025	980
10	1975213	23451417000	23453389837	23453391025	23451415812	1974025	1188
11	1975441	27952194000	27954166609	27954168025	27952192584	1974025	1416
12	1975689	32847776000	32849748361	32849750025	32847774336	1974025	1664
13	1975957	38138163000	38140135093	38140137025	38138161068	1974025	1932
14	1976245	43823355000	43825326805	43825329025	43823352780	1974025	2220
15	1976553	49903352000	49905323497	49905326025	49903349472	1974025	2528
16	1976881	56378154000	56380125169	56380128025	56378151144	1974025	2856
17	1977229	63247761000	63249731821	63249735025	63247757796	1974025	3204
18	1977597	70512173000	70514143453	70514147025	70512169428	1974025	3572
19	1977985	78171390000	78173360065	78173364025	78171386040	1974025	3960

У раду [2] је у табели 3. представљена још једна класа Херонових троуглова код којих је полуобим потпун квадрат. Та класа такође настаје из Питагориних троуглова са заједничком непарном катетом. У уводном делу је описан поступак добијања Хероновог троугла (5, 29, 30) који настаје из два Питагорина троугла са заједничком парном катетом и накнадном хомотетијом. Слично је и са троуглом (17, 65, 80). За овај последњи такође важи да су вредности за *s*, *s-a*, *s-b* и *s-c* потпуни квадрати. Било би интересантно описати класе троуглова којима генерички припадају ова два последња троугла.

Библиографија

[1] Buchholz, R. H. (1992).*Perfect Pyramids*. Bull. Austral. Math. Soc. 45, 353-368,

[2] Живановић, М. (2007) . *Генерисање Херонових троуглова који немају целобројних висина*, Настава математике (Београд), LII, свеска 4, 24-30.

[3] Живановић, М. (2006) . *Херонове тројке као аритметички низови*, Настава математике (Београд), LI, свеска 3-4, 43-47.

[4] Мићић, В. Каделбург, З. Ђукић, Д. (2004). *Увод у теорију бројева*, ДМС, Београд

[5] *http://mathworld.wolfram.com/HeronianTriangle.html*, посећено 18.08.2017.

[6] Sang, E. (1864). *On the theory of commensurables,* Transactions of the Royal Society of Edinburgh, **23**: 721–760.

[7] Yiu, Paul (2008). *Heron triangles which cannot be decomposed into two integer right triangles*, 41st Meeting of Florida Section of Mathematical Association of America

Primljeno u redakciju 10.08.2017; revidirana verzija 18.08.2017.
Dostupno na internet 28.08.2017.