Даниел А. Романо[3]
Универзитет у Бањој Луци
Природно-математички факултет

УДК 371.214.1:51
Оригинални научни рад
дои: 10.7251/NSK1301046P

КАКО СЕ СТУДЕНТИ УЧИТЕЉСКОГ ПРОГРАМА ОДНОСЕ ПРЕМА МАТЕМАТИЧКОМ ДОКАЗУ И МАТЕМАТИЧКОЈ АРГУМЕНТАЦИЈИ (ЛИЧНЕ ОПСЕРВАЦИЈЕ)[4]

Апстракт: *У овој презентацији ријеч је о општем теоријском погледу на математички доказ. Понуђена је једна анализа директног и индиректног доказа која нам омогућава да сагледамо студентско поимање ове врсте доказа. Анализа се ослања на теоријске конструкте 'когнитивно јединство' и 'мета-когнитицно јединство' организацијских, когнитивних и метакогнитивних фактора у процесу конструисања прихватљивог доказа. Сем тога, у циљу дубљег разумијевања успостављена је корелација са телеолошким, епистемиолошким и комуникативним аспектима. У овом моделу, процес доказовања се може описати посредством 'ограничења епистемиолошке важности', 'ефикасности у вези са постизањем циља' и 'комуникацијом у складу са заједнички прихваћеним правилима'.*

Кључне ријечи и изрази*: доказ, аргументација, когнитивно јединство, метакогнитивно јединство*

Увод

Почнимо, како се већини чини, од најједноставније ствари у аритметици, почнимо од питања:

Колико је1+1?
Да ли је 1 мање од 2?

Без размишљања, већина особа којима се постави ово питање одговориће кратко са '1+1 = 2' и са 'да, 1 је мање од 2'. Да, то је тачно, али остају отворена питања:

---

[3]bato49@homail.com

[4]Рад је презентован на научном скупу „*Савремена школа – дилеме и изазови*", Педагошки факултет, Бијељина, 09.11.2012.

(1) *Како ми то знамо*? ,
(2) *Како ћемо то провјерити*?
(3) *Како ћемо друге увјерити да је то тачно*?

Ако из интуитивног приступа ка постављању питања и нуђења одговора пређемо у аналитички приступ на њих, сасвим природно је да имамо потребу да разумијемо употребљене симболе ' + ' и ' = ' и појам 'мање' у постављеним питањима и понуђеним одговорима. Дакле, слиједећа питања су: *Шта су симболи* '+' (плус) *и* '=' (једнако) *и појам* 'мање', употребљени у претходним питањима и понуђеним одговорима? У већини случајева, одговори, које добијемо, су на нивоу интуитивног препознавања у сљедећем смислу: 'Плус' је сабирање бројева, 'једнако' је једанкост а 'мање' је мање међу бројевима. Да ли су овакви одговори прихватљиви? Да, они су прихватљиви на нивоу другог разреда основне школе. Да ли су прихватљиви на академском нивоу? То је ниво за који процјењујемо да би требало да се налазе наши студенти студијског програма за образовање професора разредне наставе (учитељи). То је ниво за који ми, пролазним оцјенама у њихов индекс, својим ауторитетом универзитетских наставника, математичара и истраживача математичког образовања, потврђијемо да су наши студенти досегнули? Да ли је то баш тако?

Полазници студијског програма за образовање професора разредне наставе (учитеља) претходно су 'официјелно' успјешно окончали основну и средњу школу. Сем тога, на овој студијској групи показали су успјешност у овладавању идејама и алатима математике у оквирима курсева *Математике 1* и *Математике 2*. Са потребом експонирања математичких знања како на нивоу *школске математике* тако и на нивоу *математичких знања неопходних реализаторима наставе математике* полазници ове студијске групе су подвргнути унутар курса *Методика наставе математике 1*. Осим тога, у оквирима овог курса требало би да овладају *методичким знањима неопходним реализаторима наставе математике* као и пратећим вјештинама које су неопхидне за ту реализацију али и способностима *разумијевања процеса конструисања математичких знања* код својих будућих ученика.

У овом раду ријеч је о општем теоријском погледу на математички доказ. Понуђена је једна анализа директног и индиректног доказа која нам омогућава да сагледамо студентско поимање ове врсте доказа. Анализа се ослања на теоријске конструкте 'когнитивно јединство' и 'мета-когницитно јединство' организацијских, когнитивних и метакогнитивних фактора у процесу конструисања прихватљивог доказа. Сем тога, у циљу дубљег разумијевања успостављена је корелација са телеолошким, епистемиолошким и комуникативним аспектима. У овом моделу, процес доказовања се може описати посредством 'ограничења епистемиолошке важности', 'ефикасности у вези са постизањем циља' и 'комуникацијом у складу са усвојеним социо-математичким нормама'.

Математички докази и примјери

Присјећамо се ријечи Рона Мораша са Универзитета у Мичигену „...не постоји алгоритам за доказивање тврдњи...“. Ово је тачно, али то не значи да је доказивање тврдњи људска дјелатност као што је умјетност тако да само они са посебним даром могу изводити доказе. Већина доказа које би требало да студенти знају и могу демонстрирати на енциклопедијским курсевима математике могу се разврстати у неколико категорија. Многи од њих су аргументација за образложења које потражују искази облика:

(A) “За свако x из домена D, ако је $P(x)$, тада је$Q(x)$”,

Дио P(x) је '*хипотеза*', а дио $Q(x)$ је '*последица / закључак*'. Исказ (A) уобичајено записујемо на сљедећи начин

(B) $[H_1,H_2, ...,H_k] \vdash (\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$

при чему симбол ' $\vdash$ ' читамо „може се дедуковати“, односно „да се демонстрирати“, тј. „ да се доказати“. Запис $[H_1,H_2, ...,H_k]$ означава хипотезе унутар изабраног теоријског оквира које омогућавају конструкцију дедукције. Демонстрација тврдње $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$, тј.

њена ваљаност, унутар неког теоријског оквира може се аргументовати (на опште) прихватљив начин *директно* или *индиректно*.

Под *диреткним доказом* подразумијевамо следећи низ формула:

(1) $[H_1, H_2, \ldots, H_k]$ Хипотезе
(2) $P(x)$ Хипотеза
(3) A_1
(4) A_2
...
(j) A_j
...
(m) $Q(x)$ Тврдња

Као што се види, на прво мјесто овог низа формула стављамо скуп претходних хипотеза које детерминишу окружење у којем ће се демонстрација аргументовати. На другом мјесту је формула $P(x)$, гдје је x произвољно изабран терм из домене Dунутар које се третира ваљаност формуле (A). Формуле A_1, A_2, ...,A_j, ... задовољавају бар једну од следећих опција: (а) или су хипотезе, (б) или су раније доказане формуле, (в) или се од формула, које јој претходе у томе низу, добијају по равилу закључивања *'Modusponens'* (тзв. '*правило одвајања'*)(О елементима математичке логике може се наћи, на примјер, у књигама Романо, 2005 или Романо, 2008). На последњем мјесту у овом низу формула је формула коју треба доказати. Ако је низ формула добро аргументован, и будући да је варијабла x била по вољи изабрана у домену D, тада је тај низ прихватљив као демонстрација формуле (B). Прецизније, демонстрирали смо могућност доказивања

$$[H_1, H_2, \ldots, H_k], P(x) \vdash Q(x)$$

Коначно, на основу *Теорема о дедукцији* (погледати, на примјер, у Романо 2005 или Романо, 2008), имамо

$$[H_1, H_2, \ldots, H_k] \vdash (\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$$

Примјер 1: *Ако је* 538+53 = 591, *тада је* 537+54 = 591.

Демонстрација: **Аргументација**

(1) 538+53=591 Хипотеза
(2) 538+0+53=591 Својство цијелог броја 0 упроширеном полупрстену $\mathbf{N}\cup\{0\}$
(3) 538+(-1+1)+53=591 Јер је 0=1–1=-1+1 у проширеном полупрстену $\mathbf{N}\cup\{0\}$
(4) (538–1)+(1+53)=591 Особина асоцијативности адиције у полупрстену**N**
(5) (538–1)+(53+1)=591 Особина комутативности адиције у полупрстену**N**.
Дакле, према теорему дедукције, имамо
(6) (538+53=591)⇒(537+54=591).(Тврдња коју је требало доказати.)

Коментар. Према уобичајеној пракси у нашим школама, претходним примјером (и њену сличним) „доказује" се аритметички закон о сталности збира два природна броја. (Под термином „доказује" мисли се на тзв. непотпуну индикцију која се обилато, иако погрешно, користи у нижим разредима основне школе за демонстрирање артиметичких правила). Исправност претходне импликације вриједи на нивоу интуитивног разумијевања импликације јер су и хипотеза и консквент тачне тврдње унутар аритметике.

Мала генерализација претходне тврдње је: Нека је дат збир 538+53 = 591 и нека је x природан број мањи од 538 (тј. x< 538) да би резултат одузивања 538 – x био природан број). Следећи низ једнакости је доказ импликације

$$(538+53 = 591) \Rightarrow ((538 - x) + (53 + x) = 591).$$

Демонстрација: **Аргументација**

(1) 538+53=591 Хипотеза
(2) 538+0+53=591 Својство цијелог броја 0 у проширеном полупрстену $\mathbf{N}\cup\{0\}$
(3) 538+(-x+x)+53=591 Јер је 0 = $x - x$ = -x + xза било који природан број x
(4) (538–x)+(x+53)=591 Особина асоцијативности адиције у полупрстену **N**
(5) (538–x)+(53+x)=591 Особина комутатовности адиције у полупрстену **N**
(6) (538+53=591)⇒((538–x)+(53+x)=591)

Није тешко уочити да у горе изнесеном закључивању нигдје нису кориштени бројеви 538 и 53. То, као последицу, има да презентовано закључивање вриједи и за било које друге бројеве.

Да би направили генерализацију ове аритметичке импликације, неопходно је да проширимо окружење посматрања импликације. Из аритметике прећи ћемо у рану алгебру. Нека је дат збир $c = a + b$

природних бројева a и b и нека је x било који природан број мањи од a (тј. $x<a$). Поновићемо закључивање изнесено у линијама (1) – (6) и при томе ћемо имјесто броја 538 писати a, а умјесто броја 53 писаћемо b. Према томе, као резултат закључивања добијамо импликацију

$$(a + b = c) \Rightarrow (x<a)((a - x)+(b+x) = c).$$

Добивеном импликацијом, на нивоу школске математике, репрезентујемо принцип сталности збира два броја у аритметици.

Анализа која слиједи односи се на Стеинбрингов епистемиолошки троугао (О Стеинбринговом епистемиолошком троуглу погледати, на примјер, у тексту Црвенковић, Миловановић и Романо (појавиће се): *Упоредна анализа природе математичких знања које се користи и конструише у учионици*, НОРМА (Сомбор)). Дакле, унутар парадигме 'Методичко-математичка знања неопходна реализаторима наставе математике', имамо:

$(538+53=591)\Rightarrow((538-1)+(53+1)=591)(a+b=c)\Rightarrow(\forall x\in \mathbf{N})(x<a)((a-x)+(b+x)=c)$

(Објект/Референтниконтекст) (Алгебарски запис)

Концепт / Аритметички закон

(Сума $a+b$ не мијења своју вриједност ако првом сабирку одузмемо број x а другом сабирку додамо број x.)

Примјер 2: *Ако је природан број непаран, тада је и његов квадрат такође непаран природан број.*

Демонстрација: Нека је n по вољи изабран природан број. Да би смо назначили да је то непаран природан број треба га написати у форми n = 2m – 1 или n = 2m+1, при чему је m неки природан број. Обрнуто, ако природан број има претходну форму, онда је он непаран број.

Дакле, окружење у којем нудимо припадајућу аргументацију за доказивање изнесене тврдње су полупрстен ($\mathbf{N}$, +, ·, 1) природних бројева и концепти парног и непарног природног броја, а алати математичког мишљења који ће бити искориштену у том циљу су примјена логичког „принципа искључења трећег“ (Природан број је непаран или паран.) и „принципа неконтрадикције“ (Природан број не може бити паран и непаран истовремено.) на концепте парног и непарног природног броја као и један од алата рано-алгебарског мишљења (на примјер, по класификацији Шели Крејглер) који се односи на вјештину репрезентовања концепата парних и непарних природних бројева. (О класификацији елементата алгебарског мишљења погледати, на примјер, текст Романо, 2009а: *Шта је алгебарско мишљење?*).

Имамо низ

Демонстрација: **Аргументација**

(1) Нека је n непаран природан број — Хипотеза

(2) $(\exists m)(n=2m-1)$ — Хипотеза

(3) $n^2=(2m-1)^2=(2m-1)(2m-1)=4m^2-4m+1=2(2m^2-2m)+1$

(4) $(\exists q)(q=2m^2-2m\in\mathbf{N})(n^2=2q+1)$

Како квадрат n^2 природног броја n има облик $n^2 = 2q + 1$ закључујемо да је

(5) n^2 такође непаран природан број.

Под *индиректним доказом* подразумијевамо слиједећи низ формула:

(1) $[H_1,H_2, ...,H_k]$	Хипотезе
(2) $P(x)$	Хипотеза
(3) $\neg Q(x)$	Хипотеза
(4) A_1	
(5) A_2	
...	
(j) A_j	
...	
(m) $P(x) \wedge\neg P(x)$	Контрадикција
(m+1) $\neg\neg Q(x)$	Будући да нас је хипотеза $\neg Q(x)$довела до контрадикције, морамо је одбацити!
(m+2) $Q(x)$	$Q(x)\Leftrightarrow\neg\neg Q(x)$.

Као што се види, на прво мјесто стављамо скупину хипотеза $[H_1,H_2, ...,H_k]$ које нам детерминишу окружење у којем се демонстрира аргументација. На треће мјесто, као хипотеза, ставља се претпоставка „Претпоставимо да оно што треба доказати није тачно, тј. нека је $\neg Q(x)$ ваљана формула." Формуле A_1, A_2, ...,A_j, ... задовољавају бар једну од слиједећих опција: (а) или су хипотезе, (б) или су раније доказане формуле, (в) или се од формула, које јој претходе у томе низу, добијају по равилу закључивања '*Modusponens*'. На мјесту (m), у овом низу формула, је контрадикција. Како нас је у контрадикцију довела хипотеза (3) у горњем низу, тј. формула $\neg Q(x)$, ту формула $\neg Q(x)$ треба одбацити. Сада, због априорног прихватања логичког принципа искључења трећег, сада у форми

$$\vdash \neg Q(x) \vee \neg\neg Q(x),$$

формула $\neg\neg Q(x)$ је ваљана формула у овој аргументацији, тј. демонстрирали смо

$$[H_1, H_2, ..., H_k], P(x) \vdash \neg\neg Q(x).$$

Ослањајући се на логички принцип *двоструке негације* (који је таутологија у систему класичне логике)

$$Q(x) \Leftrightarrow \neg\neg Q(x),$$

коначно опет добијамо $Q(x)$, тј. демонстрирали смо

$$[H_1, H_2, ..., H_k], P(x) \vdash Q(x).$$

Ако је низ формула добро аргументован, и будући да је варијабла x била по вољи изабрана у домену D, тада је овај низ прихватљив као индиректна демонстрација формуле (B). Наиме, позивајући се опет на *Теорем о дедукцији*, имамо

$$[H_1, H_2, ..., H_k] \vdash (\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)).$$

Примјер 3: Треба доказати “*Ако је* 255+27=432, *тада је* 254+28=432“.
Демонстрација: Претпоставићемо да оно што треба доказати није тачно. Дакле, имамо

ДемонстрацијаАргументација

(1) 255+27 = 432 Хипотеза

(2) $254+28 \neq 432$ Хипотеза

(3) $254+28\neq432\Rightarrow(254+1)+(28-1)\neq432$ Користимо се аритметичким законом као у Примјеру 1.

(4) $(254+1)+(28-1)\neq432$ На основу правила закључивања *Modus Ponens*

$H, H \Rightarrow T \vdash T$

(5) $255+27 \neq 432$.(5) је у контрадикцији са (1):

(5)$\Leftrightarrow\neg$(1)

Будући да нас је у ту контрадикцију (вриједи истовремено (1) и$\neg$(1) је контрадикција,тј. мора бити $\neg((1)\wedge\neg(1))$, према логичком принципу неконтрадикције) довела хипотеза (2), морамо је одбацити. Дакле, умјесто хипотезе (2), имамо

(6) $\neg(254+28 \neq 432)$ Користимо се принципом двоструке негације

$\neg\neg(254+28 = 432) \Leftrightarrow 254+28 = 432$.

(7) 254+28 = 432. Коначно, из хипотезе (1) слиједи закључак (7).

(8) $255+27 = 432 \vdash 254+28 = 432$.

Дакле, према теорему дедукције, имамо

(9) $\vdash 255+27 = 432 \Rightarrow 254+28 = 432$. □

Дакле, посматрајући проблематику горње импликације унутар епистемиолошког троугла и Стеинбринговог епистемиолошког троугла, имамо:

(a) Логички аспект – *интуитиван приступ* (унутар епистемиолошког троугла)

Ако је 255+27 = 432, *тада је* 254+28 = 432
(Шта студенти виде?)

$(255+27\neq 432)\Rightarrow((254-1)+(27+1)\neq 591)$ —— (?)
(Шта мисле да су видјели?)(Шта мисле о томе шта су видјели?)

и

(б) Логички аспект – *аналитички приступ* (унутар Стеинбринговог епистемиолошког троугла)

$(255+27=432)\Rightarrow(254+28=432)$ —— $(255+27=432)\Rightarrow((254-1)+(27+1)=432)$
(Објект/Референтниконтекст) $((254-1)+(27+1)\neq 432)\Rightarrow(255+27)\neq 432)$

Концепт / Логички закон контрапозиције
$(A\Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B\Rightarrow\neg A)$

Знања која су неопходна за разумијевање горе изложеног образложења су: окружење – проширени полупрстен ($\mathbf{N}\cup\{0\}$, +, ·, 1) природних бројева те правило закључивања '*ModusPonens*', *принцип искључења трећег, контрадикција и неконтрадикција, принцип двоструке негације* и *контрапозиција* те *Теорем дедукције.*То, очигледно, нису знања која спадају у тзв. 'школску математику', већ су то 'знања неопходна реализаторима наставе математике'.

Примјер 4: *Ако је квадрат природног броја паран, тада је и сам тај природан број паран.*

Демонстрација: Нека је n по вољи изабран природан број. Да би назначили да је то паран природан број треба га записивати у облику n

= 2m, при чему је m неки природан број. Обрнуто, ако природан број има претходну форму, онда је он паран број.

Да би смо доказали тврдњу „*Ако је квадрат природног броја паран, тада је и сам тај природан број паран.*“ потребно је и довољно да докажемо контрапозицију тврдње

„*Ако је природан број непаран, тада је и његов квадрат такође непаран природан број.*“

Ова два исказа су логички еквивалентна. Са A означимо исказ „*Квадрат природног броја је паран*“, а са B исказ „Природан број је паран.“ Сада, ова тврдња има облик

$A \Rightarrow B$.

Контрапозиција ове импликације гласи:

$\neg B \Rightarrow \neg A$.

Ријечима се то исказује, на примјер, на слиједећи начин:

„*Ако је природан број није паран, тада његов квадрат такође није паран број*.“

Односно, овако

„*Ако је број непаран, тада је његов квадрат такође непаран број*.“

Будући да смо ову тврдњу раније доказали (Примјер 2), доказали смо, на индиректан начин, и тражену тврдњу.

Многе дефиниције својстава у математици имају форму $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$. На примјер:

(а) $A \subseteq B$ (Скуп A је *подскуп* скупа B) ако и само ако је формула $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ ваљана.

(б) A= B(скуп A једнак је скупу Б) ако и само ако вриједи $A \subseteq B$и $B \subseteq A$.

(в) Релација је $R \subseteq X \times Y'$ *функција из скупа* X *у скуп* Y' ако и само ако је формула

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(\forall y_1, y_2 \in Y)(((x_1, y_1) \in R \wedge (x_2, y_2) \in R \wedge x_1 = x_2) \Rightarrow y_1 = y_2)$$

ваљана.

(г) Природан број је „*паран природан број*“ ако и само ако је дјељив бројем 2. (Природан број је *„непаран природан број“* ако и само ако није дјељив бројем 2, тј. ако и само ако није паран природан број.)

Наравно, постоје дефиниције које нису претходног облика. На примјер:

(д) Скуп $\varnothing$ је *'празан скуп'* ако не садржи ни један елемент. Формализован начин записивања претходне дефиниције је, на примјер, слиједећи

(C) $(\forall t)\neg(t\in\varnothing)$

Многе математичке тврдње, за које се сматра да би студенти требало да их знају доказати, као свој закључак садрже дефиниције облика који смо управо описали. На примјер:

(е) За све скупове A и B доказати да вриједи $A\subseteq A\cup B$.

(ф) За све скупове A, B и C доказати да вриједи: ако је $A\subseteq B$, тада је $A\cap C\subseteq B\cap C$.

(и) За релацију $R\subseteq X\times X$кажемо да је *„симетрична релацију“* ако и само ако је формула

$$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R)$$

ваљана. Ако су R и S симетричне релације на X, тада је и $R\cap S$ такође симетрична релација на X.

(ј) Ако је природан број непаран, тада је и његов квадрат такође непаран природан број.

(к) Ако је квадрат природног броја паран природан број, тада је и сам тај број паран.

Примјер 5: *Празан скуп (ако, уопште узевши, постоји) је јединствен*.

Демонстрација: Не улазећи у проблем постојања празног скупа, претпоставимо да поред скупа $\varnothing$, описаног формулом (C) имамо још неки скуп Vкоји задовољава исту особину $(\forall t)\neg(t\in V)$. Требало би доказати да је $\varnothing = V$, тј. требало би доказати да је формула

$$(\forall t)(t\in\varnothing\Leftrightarrow t\in V)$$

ваљана. Будући да у претходној формули имамо потформуле „ $t\in\varnothing$“ и „$t\in V$“, које нису валидне ни за једно t из припадне домене, наведену еквиваленцију није могуће реализоавти. Зато ћемо, умјесто еквиваленције „$t \in \emptyset \Leftrightarrow t \in V$“ користити контрапозицију „$\neg(t \in \emptyset) \Leftrightarrow \neg(t \in V)$“, која је свакако валидна за свако, ма како изабрано, t из припадне домене. Дакле, скупови $\emptyset$ и V су једнаки у складу са дефиницијом (б).

Аргументација и доказивање у различитим контекстима анализирани су са више различитих аспеката. Значајан број студија посвећен је структурним аспектима узајамности доказовања и припадне аргументације. На примјер, Бетина Педемонте (Pedemonte, 2007) их анализира кориштењем тернарног Тоулмановог модела[5] (Toulmin, 1958/93). С друге стране, Роберт Дувал (Duval, 1991) поентира тернарне структуре само за доказе. Он се снажно залаже да треба разликовати доказ од припадне неопходне аргументације истичући да закључивање у аргументацији се заснива на тзв. 'суштинским везама' док се доказ базира на више формализованом процесу при чему се закључује у корацима заснованим на претходним премисама.

Проблеми и питања која нас занимају

Полазници студијског програма за образовање професора разредне наставе (учитеља) претходно су 'официјелно' успјешно окончали основну и средњу школу. Сем тога, на овој студијској групи показали су успјешност у овладавању идејама и алатима математике у оквирима курсева *Математике 1* и *Математике 2*. Са потребом експонирања математичких знања како на нивоу *школске математике* тако и на нивоу *математичких знања неопходних реализаторима наставе математике* полазници ове студијске групе су подвргнути унутар курса *Методика наставе математике 1*. Осим тога, у оквирима овог курса требало би да овладају *методичким знањима неопходним реализаторима наставе математике* као и пратећим вјештинама које су неопходне за ту реализацију, али и способностима *разумијевања процеса конструисања математичких знања* код својих

[5]Stephen Edelston Toulmin (25.03.1922, Лондон – 4.12.2009, Лос Анђелес), британски филозоф и едукатор

будућих ученика. Током реализације курса Методика наставе математике 1, на студијској групи за образовање учитеља на Педагошком факултету у Бијељини, при спиралном интерпретирању дијелова тематских парадигми 'Школска математика', 'Математичка знања неопходна реализаторима наставе математике', 'Методичка знања неопходна реализаторима наставе математике' и 'Проблематика математичког образовања' у више наврата поентиране су сличности и разлике између ових знања са епистемиолошког аспекта уз навеђење више примјера да би се илустровале те сличности и разлике.

Будући да је квалитет математичких промишљања студената, при настојањима да понуде прихватљиве одговоре на питања везана за демонстрирање својстава математичких концепата, врло скромна, сасвим природно се појављује дилема: *Како то да неки студенти могу научити да се носе са одређеним врстама математичких проблема успјешно (као што је показано њиховим успјешним окончањем основне и средње школе али и експонирањем прихватљивих знања на курсевима Математика 1 и Математика 2) али не поступити исто двије године касније?*

У вези са претходним, слиједећа питања су се искристализирала у радној групи друге конференције ERME-а, 2001:

- Везе између студентских стицања знања и професионалног дјеловања?
- Улога математичких знања и баланс између тих знања и методичких знања неопходних реализаторима наставе математике?
- Повезаност појава у наставничким активностима нижег и вишег математичког образовања у основној школи?
- Да ли постоје различити аспекти посматрања проблема математичког образовања у нижим разредима основне школе међу истраживачима математичког образовања и реализатора тог математичког образовања?
- Колико су сигнификантни друштвени и политички услови реализације наставе математике.

Зашто је важно допуњавати доказе аргументацијом?

Везе између формирања тврдњи и доказивања анализиран је у домени истраживања математичког образовања са различитих аспеката и због различитих циљева. С једне стране, неки истраживачи математичког образовања сугеришу постојање значајних разлика између аргументације и доказивања унутар социјалних и епистемиолошких аспеката (на примјер Balacheff, 1987) али и унутар когнитивних и логичких аспеката (на примјер, Duval, 1991). С друге стране, неке италијанске студије поентирају постојање високе повезаности међу аргументацијом као једним процесом формирања тврдње и конструисања њеног доказа (на примјер, Boero, Garuti, Mariotti, 1996). Ова повезаност је позната под називом *когнитивно јединство* (Mariotti, 2006, стр. 183; Garuti, Boero, Lemutand Mariotti, 1996; Mariotti, Bussi, Boero, Ferriand Garuti,1997; Garuti, Boeroand Lemut, 1998). У процесу рјешавања математичких задатака у математичкој учионици аргументација се уобичајено захтијева при образлагању закључака (формирања тврдњи). Хипотеза когнитивног јединства састоји се у томе да струденти треба да конструишу и експонирају неопходну аргументацију при проналажењу и конструисању доказа неке математичке тврдње те да је инкорпорирају у претходно конструисан логички ланац за који претендују да је доказ поменуте математичке тврдње. Истраживачи 'когнитивног јединства' (на примјер, Garuti, Lemutand Mariotti, 1996; Garuti, Boero, Lemut, Mariotti, 1996) су својевремено показали да студенти знатно лакше 'прихватају' доказе математичких тврдњи ако уз њих иде значајно разрађена припадна аргументација. Ослањајући се на ова истраживања, Бетина Педемонт (Pedemonte, 2007) је показала да анализа когнитивног јединства не покрива увијек све аспекте релација међу аргументацијом и доказивањем. Посебно, она истиче да су за когнитивну анализу аргументације и доказа важна слиједећа два аспекта:

(а) *референтни систем* који се састоји од система репрезентација (језик, хеуристика, модел) и систем знања (концепти и теореме) повезаних са потребним доказом и пратећом аргументацијом.

(б) *структура* која омогућава логику когнитивног повезивања између изјава.

Понудимо сада образложење, на академском нивоу, појма 'једнакост' (тј. симбол '= ') који се појављује у одговору '1 + 1 = 2' на питање *Колико је1+1?* са почетка овог текста.

Нека су t_1, t_2, t_3, произвољни термини, f функционални симбол а P предикатски симбол. *Једнакост*, у ознаци '=' , је предикат другог реда који задовољава слиједеће, плаузибилно прихватљиве, аксиоме:

E1 $(\forall t)(t = t)$,

E2 $(\forall t_1)(\forall t_2)(t_1 = t_2 \Rightarrow t_2 = t_1)$,

E3 $(\forall t_1)(\forall t_2)(\forall t_3)(t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3 \Rightarrow t_1 = t_3)$,

E4 $(\forall t_1)(\forall t_2)(t_1 = t_2 \Rightarrow f(t_1) = f(t_3))$,

E5 $(\forall t_1)(\forall t_2)(t_1 = t_2 \wedge P(t_1) \Rightarrow P(t_2))$.

Као што се види, појмови који претходе (имплицитном) увођењу појма (и симбола за) једнакост су терми, функционални симболи (активности на термима) и предикатски симболи (особине терма) као и логичке везе искориштене у схемама E1 – E5. Дакле, једнакост није идентитет, већ особина коју идентификујемо унутар неког домена тако да су његова два елемента / терма једнака ако и само ако се у условима описаним аксиомама E1 – E5 понашају на исти начин.

Ради илустрације, нудимо окружење, доказ и припадну аргументацију за питање изнесено на почетку овог текста: *Колико је1+1?* Окружење у којем желимо презентовати доказ тврдње '1+1 = 2' је скуп **N** природних бројева, способност људског бројања (Свако људско биће се рађа, према тврдњама изложеним у чувеном Лероновом тексту „*Поријекло математичког мишљења*“, из 2003. године, са способношћу препознавања неколико првих природних бројева и способношћу бројања тих бројева.) те способност разумијевања те наше способности. Још 1929. године, Ђузепе Пеано је описао те наше способности утврдивши да свако људско биће разумије концепт 'броја 1' (то је он сам) и концепт да 'иза сваког броја долази број'.

Овај последњи концепт назвао је *сљедбеник* и описао га као функцију s: $\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$са особинама

N2 $(\forall t_1)(\forall t_2)(t_1 = t_2 \Rightarrow s(t_1) = s(t_3))$,

N3 $(\forall t_1)(\forall t_2)(s(t_1) = s(t_2) \Rightarrow t_1 = t_3)$,

N4 $(\forall t)\neg(s(t) = 1)$.

Ово, као последицу, има:

(а) 1 је (први) природан број.

(б) $s(1)$ је природан број (који означавамо графичким симболом 2); $s(s(1)) = s(2)$ је такође природан број (који означавамо графичким симболом 3); и тако даље.

(в) Ако је t природан број, тада је и $s(t)$ такође природан број.

Унутар претходно описаног окружења, појам (и ознака за) сабирање се детерминише (и то, на једниствен начин).

Примјер 6. *Колико је1+1?*

Демонстрација/ Аргументација. *Сабирање* у скупу **N** природних бројева је функција + : $\mathbf{N}\times\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$ од двије варијабле која задовољава слиједеће услове (Наравно, може се доказати, али докази нису једноставни, да таква функција постоји и да је јединствена):

$$(\forall t)(t + 1 = s(t)),\ (\forall t_1)(\forall t_2)(t_1 + s(t_2) = s(t_1 + t_3)).$$

Подсјећамо читаоце на чињеницу да термин 'функција' подразумијева слиједеће двије ствари:

(1) За сваки пар природних бројева a и b постоји компонат $a + b$, тј. сабирање је дефинисано за сваки пар природних бројева; и

(2) $(\forall a,a',b,b' \in \mathbf{N})((a,b) = (a',b') \Rightarrow a+b = a'+b')$, тј. за пар бројева a и b компонат $a+b$ је јединствен.

Својства операција сабирања - асоцијација и комутација – трансформишу скуп **N** природних бројева у алгебарску структуру (**N,**=,+) коју зовемо комутативна адитивна полугрупа. (Докази да је сабирање / адиција асоцијативно и комутативно нису елементарни.) Из прве од претходних ваљаних формула у домни **N** природних бројева, тј. из формуле $(\forall t)(t + 1 = s(t))$, специјално за t = 1, имамо 1 + 1 = 2.

Понуђени доказ је врло једноставан, али пратеће неопходно образложење, наравно, није такво. Мишљења смо да овај примјер добро илуструје потребу постојања когнитивног јединства међу доказом и припадном неопходном аргументацијом, јер у овом случају, без овог последњег, доказ не би био прихватљив.

Примјер 7. *Доказати да је 1 мање од 2.*

Демонстрација / Аргументација. Окружење у којем треба доказати да је 1 мање од 2 јесте уређени полупрстен природних бројева $(\mathbf{N},=,+,\cdot,1,<)$. У њему постоји релација 'мање', у ознаци ' < ', детерминисана на слиједећи начин:

$$(\forall t_1)(\forall t_2)(\, t_1<t_2 \Leftrightarrow (\exists t)(\, t_1 + t = t_2)).$$

Дакле, појмам који претходи овој детерминацији је сабирање природних бројева (и особине тог сабирања). Према томе, раније доказану једнакост

$$1 + 1 = 2,$$

према претходној детерминацији, можемо записати у облику

$$1 < 2.$$

(Скрећемо пажњу читаоца да обрнута импликација, тј. импликација $1 < 2 \Rightarrow 1 + 1 = 2$, не вриједи.) Ова аргументација је истовремено и одговор на захтјев 'Доказати да је 1 мање од 2.'

Потпуно смо сагласни да се истраживачи математичког образовања требало да се фокусирају на аргументацију при математичком доказивању тврдњи чак и у нижим разредима основне школе. Један од прелиминарних циљева наставе математике, на свим нивоима образовања је овладавање вјештинама доказивања и аргументације тих доказа. Регистроване су многе потешкоће како код ученика тако и код њихових учитеља у разумијевању и прихватању знатног броја математичких тврдњи. Потпуно смо сагласни са ставом Паола Боера, са Универзитета у Ђенови, да су везе међу аргументацијом и доказима врло комплексне али да је њихово учење неизбјежно. Ако имамо намјеру да некога подучимо математичким тврдњама у те намјере обавезно треба инволвирати и припадну аргументацију за те доказе. Ако желимо да особа коју подучавамо прихвати социјалну димензију аргументације (тј. социоматематичке норме) морамо да боље разумијемо структуру те аргументације те да смо начисто коју позицију она заузима у пракси подучавања математике (Knipping, 2012). Подсјетимо се да је са „Апсолутно!“ одговорила Кристина Книпинг (Knipping, 2012) на Шенфилдово питање (Schoenfeld, 1994) „Да ли требамо доказе у школској математици?“

На крају овог одјељка, може се сублимирати да иако је доказивање један од најнеразумљивијих и најпроблематичнијих ствари у математичком курикулу, наставници математике би требало да подучавају своје ученике да схватају потребу за њима, да их препознају, да схвате њихову улогу у математици и математичком мишљењу.

Когнитивно јединство ученичких / студентских активности у доказивању математичких тврдњи изучавали су Паул Боеро, Нађа Доуек, Франциска Морсели и Бетина Педемонте (Boero, Douek, Morselli, Pedemonte, 2010) и Фујита, Џонс и Кунимуне (Fujita, Jonesand Kunimune, 2010) у својим недавно публикованим радовима.

Шта је то 'метакогнитивно јединство'?

Метакогниција се детерминише најједноставније као „мишљење о мишљењу“. Метакогниција садржи двије компоненте: знање и регулацију. Метакогнитивно знање укључује знање о себи као особи која учи и о факторима који могу утицати на то учење, знање стратегија као и знање када и како треба употребљавати стратегије. Метакогнитивна регулација је мориторинг нечијег сазнања и, сем тога, подразумијева планирање активности, затим подразумијева свјесност разумијевања као и задатке учења, процјену успјешности посматраних процеса и стратегија. Одређивање матакогниције зависи од низа фактора: (а) метакогниција је комплексан конструкт; (б) њу није могуће директно опсервирати; (в) често је не можемо разликовати од вербалних способности и капацитета вербалне меморије; и (г) постојеће мјере настоје се фокусирати унутар школског учења али и деконтекстуализовати од њега.

Метакогнитивне активности су есенцијалне у стратешким апликацијама метакогнитивног знања у досезању когнитивних циљева. Оне омогућавају регулацију и контролу когнитивних процеса (Meijera, Veenmanbandvan Hout-Woltersc, 2006). Компоненте метакогнитивних активности могу се разврстати на неколико нивоа специфичности (ибид, стр. 210). На примјер, на вишем нивоу, компоненте као што су планирање, мониторинг и евалуација могу бити препознаване. На средњем нивоу, неке специфичне компоненте као што су избор информација, рекапитулација као и рефлексије на процесе учења могу бити регистроване. На нижем нивоу, метакогнитивне активности се уобичајено детерминишу, на нивоу стандардних наставних задатака на примјер као процедуре одређивања непознатих терма унутар неког контекста, потврђивање или одбацивање претходних закључака заснованих на неким подконтекстима, или испитивање неког специјалног случаја третираног математичког проблема (Schoenfeld, 1987). Иако су везе метакогниције са резултатима подучавања и учења биле субјект многих студија у домени математичког образовања (на примјер, Arzarelloand Sabena, 2011; Bass, 2011; Blakey and Spence, 1990; Chalmers, 2009; Dominowski, 1998; Flavell, 1976; Fortunato, Hecht, Tittle and Alvarez, 1991; Gama, 2000; Garofaloand Lester, 1985; Goos, Galbraithand Renshaw, 2002; Hinsz, 2004; Meijer, Veenmanandvan Hout-Wolters, 2006; Moga (Maier), 2012; Nikiforuk, 2009; Panaouraand Philippou, 2004 / 2005 / 2006; Pugalee, 2001; Rodríguezand Cepeda, 2008; Schraw, 2001 и други), још увијек није искристализирано које посебне метакогнитивне активности су у вези са успјехом у подучавању и учењу математике. Идентификација и разумијевање ових активности може се показати врло корисним у метакогнитивном тренирању.

У чланку „Метакогнитивне активности, једна таксонимија (Meijera, Veenmanbandvan Hout-Woltersc, 2006) аутори су развили једну хијерархију метакогнитивних активности.

Ослањајући се на Хабермасов[6] модел рационалног понашања са три компоненте (епистемиолошке, телеолошке и комуникативне

[6] Jürgen Habermas (18. juna, 1929, Дизелдорф) њемачки филозоф и социолог.

компоненте) као и на конструкт когнитивног јединства, који су увели Паул Боеро, Росела Гарути, Енрика Лемут и Марија Мариоти 1996. године, а потом развијен у раду (Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2010) уочавањем да постоје више нивоа у аргументацијама које прате доказивање математичких тврдњи: 'основни ниво' и 'мета ниво', италијански едукатори Фердинанд Арзарело и Кристина Сабена, у свом раду (Arzarello & Sabena, 2011), саопштеном на конференцији ЕРМЕ 7 (2011), усвајајући претходно поменуте резултате својих колега, уводе теоријски конструкт 'мета-когнитивно јединство' као когнитивно јединство између нивоа аргументације.

Основношколски наставници у нижим разредима имају проблема како са увођењем ученика у процесе доказивања математичких тврдњи, тако и са ученичким прихватањем потреба за постојање доказа и аргументација тих математичких тврдњи. Ми смо склони вјеровању да то, у већини, произлази из наставничких увјерења да се докази математичких тврдњи у артиметици и раној алгебри у нижим разредима основне школе могу заснивају на непотпуној индукцији. На примјер, на захтјев да покажу аритметички закон о сталности збира

$$(\forall a,b\in\mathbf{N})(a+b = c\Rightarrow (\forall x\in\mathbf{N})(x<a)((a\text{-}x)+(b+x) = c))$$

знатан број студената учитељског програма нуди два-три примјера типа

$$20 + 15 = 35 \Rightarrow (20 - 7) + (15+7) = 13 + 22 = 35$$

у потпуном увјерењу да би такви одговори требало да буду прихватљиви. Ми смо, такође, склони увјерењу да њихове потешкоће произилазе из њиховог неуочавања суштинских разлика међу тзв. природним и математичким приступом ка доказивању и аргументацији математичких тврдњи. Наш концепт да студенти учитељских програма треба да су фамилијарни не само са конкретним већ и са теоријским моделима доказивања и аргументације математичких тврдњи, изложен у овом извјештају, заснива се на том увјерењу, али и на извјештајима великог броја истраживача математичког образовања (на примјер: Hanna, 1989; Duval, 1992; Balacheff, 1987; 1999; Hareland Sowder, 1998, Mariotti, 2001).

Мишљења смо да је један од кључних момената у процесима семиотичких разматрања (према Виготском) која се односе на потребе доказивања и разумијевања концепата у тим доказима (дакле, аргументације) конекција међу алатима и значења који се користе у математичкој учионици, с једне стране, и, с друге стране, математичких појмова и концепата покривених тим појмовима. Под тим мислимо да би реализатори наставе математике требало да су свјесни комплексности својих активности, и могућих потешкоћа при томе, које се односе на планирање и реализациу наставних задатака у циљу досезања намјера упознавања ученика са доказивањем математичких тврдњи (тзв. когнитивних циљева наставе математике), али и прихватања постојања потреба за доказивањем (тзв. циљеви наставе математике везани са развијање способности) и пратећим аргументацијама (тзв. циљеви наставе математике везани са развијање вјештина, али и циљеви везани за усвајањем социоматематичких норми будући да аргументација треба да буде прихватљива). При томе мислимо да би у процесима планирања активности, реализатори наставе требало да, између осталог, воде рачуна о следећим компонентама:

1. Епистемиолошкој анализи појмова и ознака које намјерава да користи;
2. Когнитивној анализи;
3. Дидактичкој анализи концепата које планира да уводи, њиховом окружењу и њиховој адекватној интеграцији у претходно формиране когнитивне равни својих ученика.

Закључак

Наш приступ сугерише могући начин за увођење доказа, и образлагање мотива тог увођења, индиректним путем као и везе тих доказа са припадном аргументацијом. Посебно је важно да се култивише идеја рационалности немогућих контекста у вези са аргументацијом која поткрепљује елементе индиректног доказа преплићући елементе телеолошке контроле и епистемиолошких знања.

У ствари, у настави математике, а посебно у методици наставе математике, постоји снажна потреба за задовољавањем социоматематичких норми везаних за пратећу аргументацију уз доказ неке математичке тврдње чиме се поентира комуникативна компонента али и епистемиолошка компонента при резоновању више него је то случај са телеолошком компонентом.

Литература

Antonini, S. and Mariotti, M.A. (2008). *Indirect proof: What is specific to this way of proving*? *ZDM Mathematics Education*, 40, 401-412.

Arzarello, F., and Sabena, C. (in print). *Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities*. ESM Special Issue on Semiotics.

Arzarello,F. and Sabena,C., (2011). *Meta-cognitive unity in indirect proofs*, CERME 7, WG1

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D., and Robutti, O. (1998). *A model for analysing the transition to formal proofs in geometry*. PME 22, Stellenbosh, South Africa, vol. 2, pp. 24-31.

Bass,H., (2011). *A Vignette of Doing Mathematics:A Meta-cognitive Tour of the Production of Some Elementary Mathematics*, The Montana Mathematics Enthusiast, Vol. 8, nos.1&2, pp.3- 34

Blakey, E., and Spence, S. (1990). *Developing metacognition*. Eric Reproduction Services No. ED327218. Retrieved January 7, 2008 from EDRS Online:http://www.thememoryhole.org/edu/eric/ed327218.html.

Balacheff, N. (1987). *Processus de preuves et situations de validation*. Educational Studies in Mathematics, 18(2), 147-176.

Boero P., Garuti R., Lemut E., and Mariotti M. A. (1996). *Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems*. PME XX.Valencia, Spain.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., and Pedemonte, B. (2010). *Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation*. In M.M.F. Pinto & T.F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 179-204), Belo Horizonte, Brazil: PME.

Boero, P., (2011). *Argumentaion and proof: Discussing a "successful" classriim discussion*, CERME 7, WG1

Chalmers, C., (2009).*Group Metacognition During Mathematical Problem Solving*, In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, MERGA. Vol. 1, 105-112

Dominowski, R. (1998). *Verbalization and problem solving*. In D. Hacker, J. Dunlosky & A. Graesser (Eds.), *Metacognition in educational theory and practice*. (pp. 25-45). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.11 1

Duval, R. (1991). *Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demonstration*. Educational Studies in Mathematics, 22(3), 233-261.

Flavell, J. (1976). *Metacognitive aspects of problem solving*. In L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231-235). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Fortunato, I., Hecht, D., Tittle, C. K., and Alvarez, L. (1991). *Metacognition and problem solving*.TheArithmetic Teacher, 39(4), 38-40.

Fujita, T., Jones, J. and Kunimune, S., (2010). *Students' geometrical constructions and proving activities: A case of cognitive unity;* Procedeenings of 34th Congerence of the International Group for Psychology of Mathematics Education, Vol.3, 3-16.

Gama, C. (2000). *The role of metacognition in problem solving: Promoting reflection in interactive learning systems*. Sussex, England: University of Sussex.

Garofalo, J., and Lester, F. (1985). *Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance*. Journal for Research in Mathematics Education, 16(3), 163-76.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E., & Mariotti, M. A. (1996). *Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems*, Proceedings of PME 20, vol. 2, pp. 113-120. Valencia, Spain: PME.

Garuti R., Boero P., and Lemut E. (1998).*Cognitive unity of theorems and difficulty of proof*. http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/garuti.html

Gillies, R. (2000). *The maintenance of cooperative and helping behaviours in cooperative groups*. The British Journal of Educational Psychology, 70(15), 97–111.

Goos, M., Galbraith, P., and Renshaw, P. (2002). *Socially mediated metacognition: Creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving*. Educational Studies in Mathematics,49(2), 193-223.

Hinsz, V. B. (2004). *Metacognition and mental models in groups: An illustration with metamemory of group recognition memory*. In E. Salas & S. Fiore (Eds.), *Team cognition: Understanding the factors that driveprocess and performance* (pp. 33-58). Washington, DC: American Psychological Association.

Hanna, G. (1989). *More than formal proof*. For the Learning of Mathematics, *9*(1), 20-23.

Harel, G. (2007). *Students' proof schemes revisited*. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 65–78). Rotterdam: Sense Publishers.

Knipping,C.,(2012). *The social dimension of argumentation and proof in mathematics classrooms*, http://www.icme12.org/upload/submission/1935_F.pdf

Mariotti, M.A. (2006).*Proof and proving in mathematics education*, In: A.Gutiérrez and P.Boero (eds): *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*; Sense Publishers, The Netherlands

Meijer,J., Veenman, M.V.J. and van Hout-Wolters, B.H.A.M., (2006), *Metacognitive Activities in Text-Studying and Problem-Solving: Development of a taxonomy*, Educational Research and Evaluation, Vol. 12, No. 3, 209 – 237

Moga (Maier), A., (2012). *Metacognitive Training Effects on Students Mathematical Performance from Inclusive Classrooms*, Phd Thesis, Babeș-Bolyai University, Cluj-Napoca, Faculty of Psychology and Educational Science, Cluj-Napoca

Nikiforuk, L.A., (2009). *What Are the Metacognitive Strategies That I Can Incorporate Into My Daily Teaching Practice and How Can I Have My Grade 4 Students Use These Strategies to Become More Aware of Themselves as Learners*?, Master of Education, Faculty of Education, Brock University St. Catharines, Ontario

Panaoura, A. and Philippou, G., (2005).*The measurement of young pupls' metacognitive ability in mathematics: The case of self/representation and self/evaluation*, Paper presented at the *Conference of European Society for Research in Mathematics Education.* Sant Feliu de Guíxols. http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/2/panaoura.philippou.pdf.

Panaoura, A. and Panaoura, G., (2004). *Young Pupils′ Metacognitive Abilities in Mathematics in Relation to Working Memory and Processing Efficiency*, In *Proceedings of the International Biennial SELF Research Conference*. Berlin. http://self.uws.edu.au/Conferences/2004_Panaoura_Philippou.pdf.

Panaoura, A. and Panaoura, G. (2006). *Cognitive and metacognitive performance on mathematics*, In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 313-320. Prague.

Panaoura, A. (2007). *The impact of recent metacognitive experiences on preservice teachers' self-representation in mathematics and its teaching*, CERME 5, 329-338

Pedemonte, B. (2007). *How can the relationship between argumentation and proof be analysed*? Educational Studies in Mathematics, 66(1), 23-41.

Pugalee, D. (2001). *Writing, mathematics, and metacognition: Looking for connections through students' work in mathematical problem solving*. School Science and Mathematics, 101(5), 236-246.

Rodríguez, O.H. and Cepeda, W.V (2008).*Cognitive and metacognitive processes of pre-service mathematics teachers while solving mathematical problems*, ICME11,

Романо, Д.А. (2005). *Основе математике, Дио Први – Увод у математичку логику*; Мат-Кол (Бања Лука), Посебна издања, Број 3.

Романо, Д.А. (2008). *Математичка логика*, *Књига 1*; Мат- Кол (Бања Лука), Посебна издања, Број 7.

Романо, Д.А. (2009). *Истраживање математичког образовања*; ИМО, I, Број 1, 1-10

Романо, Д.А. (2009а). *Шта је алгебарско мишљење?* Мат-Кол (Бања Лука), XV(2), 19-29

Schoenfeld, A.H. (1994). *Whatdoweknowabout mathematics curricula*? Journal ofMathematical Behavior, 13(1), 55-80.

Schoenfeld, A.H. (2008). *Research methods in (mathematics) education*. In: L.D. English (ed) *Handbook of internationalresearch in mathematics education*. 2nd edition, Taylor and Francis, NY, 467-519.

Schoenfeld, A.H. (2010). *Namjere i metode u istraživanju matematičkog obrazovanja*, IMO, III, Број 4, 23-34

Schraw, G. (2001). *Promoting general metacognitive awareness*. In H. Hartman (Ed.), *Metacognition in learning and instruction: Theory, research and practice* (pp. 33-68). -Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Daniel A. Romano

HOW DO PRIMARY SCHOOLS MATHEMATICS PRE-SERVICE TEACHERS CONSIDER MATHEMATICAL PROOFS AND MATHEMATICAL ARGUMENTATION (PERSONAL REFLEXION)

Summary

Starting from a general discussion on mathematical proof, a structural analysis wascarried out in this presentation, leading to the construction of a model within whichdirect and indirect proofs can bedescribed and how our students consider these proofs. The model shows itself a good interpreting tool to identify and explaincognitive and didactic issues, as well to precisely formulate research hypothesesconcerning students' difficulties withdirect and indirect proofs. We discuss the theoretical construction of 'cognitive unity' and 'meta-cognitive unity', which may give reason of success and difficulties in indirect proofs.

Key words and phrases: *proof, argumentation,cognitive unity and meta-cognitive unity*

Math. Subject Classification (2010): **97B50, 97C70**

ZAM Subject Classification (2010): **B50, C30, C80, D20, D70**