

Statički proračun montažne konstrukcije-skele u građevinarstvu

Bogdan Šimun

redoviti profesor na Fakultetu Strojarstva i računarstva u Mostaru, Mostar, Bosna i Hercegovina, simun.bogdan@sve-mo.ba

Sažetak: U radu je izvršena statička provjera nosivosti montažne skele-konstrukcije koja se koristi u građevinarstvu u visokogradnji za izradu fasada. Cilj je bio odrediti maksimalnu nosivost podnica montažne skele, s obzirom na dopušteno naprezanje materijala od kojeg je izrađena konstrukcija uz istovremenu provjeru stabilnosti vertikalnih nosača na izvijanje. Rad je urađen u sklopu vještačenja na objektu u Mostaru.

Ključne riječi: statički proračun, stabilnost na izvijanje, statički neodređeni nosač, momenti uklještenja, Ojlerov obrazac za kritičnu silu izvijanja, Tetmajerov obrazac za izvijanje.

Primljen / Received: 16. juni 2016. / June 16, 2016

Prihvaćen / Accepted: 23. juni 2016. / June 23, 2016

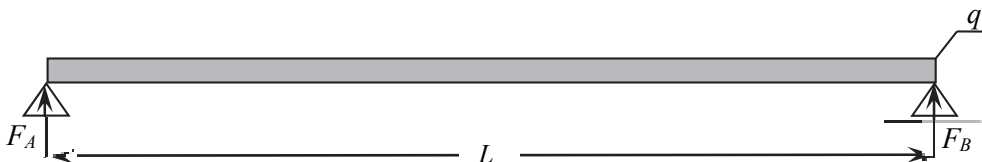
UVOD

Glavni vertikalni noseći sklopovi su čelični okviri izvedeni iz okruglih čeličnih cijevnih profila ϕ 48.0x2.0 mm, postavljenih vertikalno i spojenih gornjom gredom izvedenom, također, od cijevnog profila ϕ 48.0x2.0 mm. Spoj je izveden varenjem i pojačan kosnicima između tih elemenata. Čelični okviri se nastavljaju jedan na drugi kliznim spojem u vidu mufa koji je donjim krajem navučen i zavaren za gornji dio okvira. Po horizontali okviri su međusobno spojeni leđnicom izvedenom u vidu pravokutne rešetke. Spojevi leđnice i okvira su, također, klizni spojevi. Spojna greda istodobno služi i kao oslonac za drvenu podnicu. Sve zavareno i zaštićeno jednim slojem boje. Podnica je urađena od impregniranog drveta, a veza između podnice i okvira je izvedena pomoću dviju čeličnih šipki savijenih u obliku slova U i zavarenih sa donje strane horizontalne grede.

PROVJERA GLAVNIH NOSEĆIH SKLOPOVA

PODNICA

Nosivost podnice će se računati pod pretpostavkom jednolikog kontinuiranog opterećenja q .



Slika 1. podna daska

Dopušteno naprezanje savijanja za pretpostavljenu drugu klasu iznosi $\sigma_{dop} = 1 \text{ kN/cm}^2$,
 Otporni moment poprečnoga presjeka je $W = ab^2/6 = 58 \times 3.5^2/6 = 118 \text{ cm}^3$,
 Dopušteni maksimalni moment savijanja je $M = qL^2/8 = \sigma_{dop}W = 1.18 \text{ kNm}$,
 Kontinuirano opterećenje je $q = 8\sigma_{dop}W/L^2 = 9.44/2.5^2 = 1.51 \text{ kN/m}$,
 Vlastita težina: $G = 25 \times 5.8 \times 0.35 \times 0.9 \times 9.81 = 448 \text{ N} = 0.448 \text{ kN}$

Ukupno dopušteno kontinuirano opterećenje po podnici je:

$$F_{qmax} = qL = 1.51 \times 2.5 = 3.775 \text{ kN.}$$

$$F_{korisno} = 3.84 - 0.46 = 3.327 \text{ kN.}$$

Ukupno dopušteno koncentrirano opterećenje po podnici je:

$$\underline{G_{max} = qL/2 = 1.66 \text{ kN.}}$$

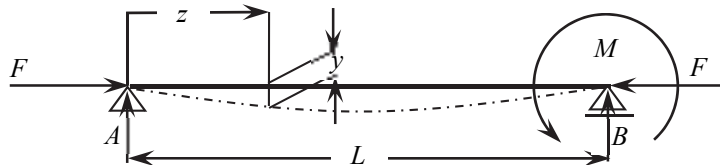
$$\text{ili } \underline{2 \times G_1 = 2 \times 1.2675 \text{ kN.}}$$

ČELIČNI OKVIRI

U čeličnom okviru najkritičnija je vertikalna cijev sa visinom 2000 mm. Kod ovoga okvira cijevi su prvenstveno izložene izvijanju ali u ravnini okvira, kao i u ravnini okomitoj na ovu, postoje i određeni momenti savijanja, tj. rubni uvjeti oslanjanja cijevi u tim ravninama odgovaraju uvjetima elastičnoga uklještenja.

Prvi slučaj:

U slučaju izvijanja u samoj ravni okvira problem je u toliko složeniji što se radi o savijanju cilindričnih štapova koji su istodobno i uzdužno pritisnuti. Kako se ovaj slučaj rijetko rabi treba prethodno izvesti osnovne izraze. Promatra se dugačak štap uzdužno pritisnut i sa momentom savijanja na jednome kraju.



Slika 2. Savijanje uz djelovanje tlačne sile

Otpor lijevog oslonca je $F_A = \frac{M}{L}$

Napadni moment, računat za središte presjeka, u presjeku z je $M_z = zF_A + yF$

Diferencijalna jednačina elastične linije će biti

$$EIy'' = -yF - zF_A \Rightarrow y'' + k^2y = -\frac{F_A}{EI}z; \quad k^2 = \frac{F}{EI}$$

a opće je rješenje dano izrazom

$$y = A \cos kz + B \sin kz - \frac{1}{k^2} \frac{F_A}{EI} z = A \cos kz + B \sin kz - \frac{M}{FL} z$$

pa za rubne uvjete da je za $z = 0$ i $z = L$ $y = 0$ mogu se odrediti integracione konstante A i B te one iznose

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{\sin kL} \frac{M}{F}$$

sa kojima elastična linija štapa postaje

$$y = \frac{M}{F} \left(\frac{\sin kz}{\sin kL} - \frac{z}{L} \right)$$

Nagibi nad osloncima se dobivaju iz prvoga izvoda jednačine elastične linije koja glasi

$$y' = \frac{M}{F} \left(k \frac{\cos kz}{\sin kL} - \frac{1}{L} \right) = \frac{F_A}{F} \left(kL \frac{\cos kz}{\sin kL} - 1 \right)$$

Nagibi nad osloncem A α i nad osloncem B β se dobivaju iz uvjeta $\alpha = y'_{z=0}$ i $\beta = y'_{z=L}$ pa će biti

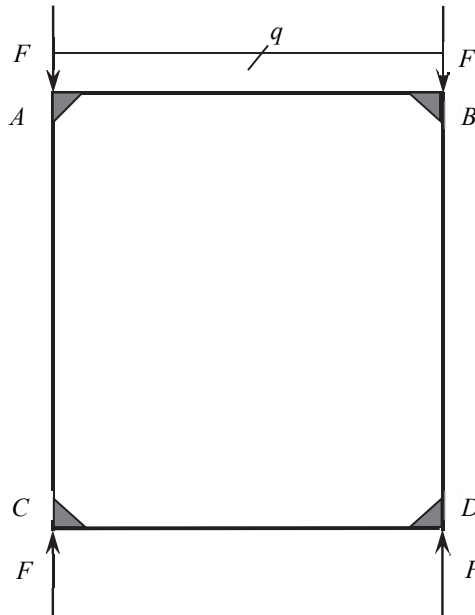
$$\alpha = \frac{F_A}{F} \left(\frac{kL}{\sin kL} - 1 \right) = \frac{ML}{6EI} \frac{3}{u} \left(\frac{1}{\sin 2u} - \frac{1}{2u} \right); \quad 2u = kL = L \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad (a)$$

$$\beta = \frac{F_A}{F} \left(kL \frac{\cos kL}{\sin kL} - 1 \right) = -\frac{ML}{3EI} \frac{3}{2u} \left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{\tan 2u} \right)$$

Gornji se izrazi svode na $ML/6EI$ i $-ML/3EI$ u slučaju da nema tlačne sile odnosno kada je $kL = 2u = 0$. Radi jednostavnosti mogu se uvesti funkcije

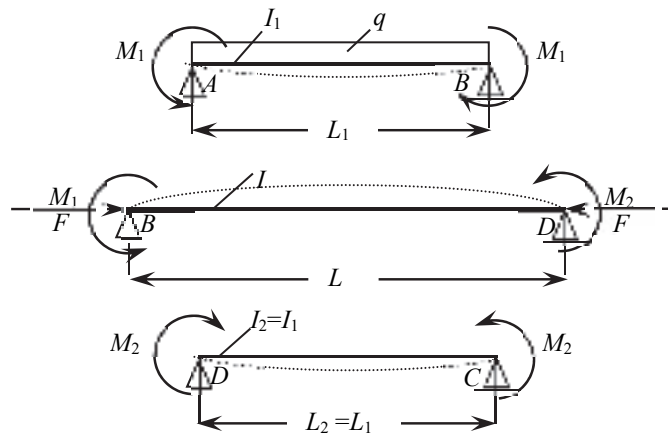
$$\phi(u) = \frac{3}{u} \left(\frac{1}{\sin 2u} - \frac{1}{2u} \right) \quad \text{i} \quad \psi(u) = \frac{3}{2u} \left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{\tan 2u} \right).$$

Na temelju izraza (a) može se rješavati problem izvijanja vertikalnih štapova danog čeličnog okvira.



Slika 3. Slučaj rama s jednom petljom

Rastavljanjem okvira na proste grede i vodeći računa o vertikalnoj osi simetrije može se crtati sljedeći sustav greda. Nepoznati momenti M_1 i M_2 se nalaze iz uvjeta jednakosti kutova nad osloncima B za prvu i drugu gredu.



Slika 4. Proste grede sastavnice rama

odnosno nad osloncima D za drugu i treću gredu pri čemu se momenti M_1 i M_2 u slučaju druge grede izražavaju u funkciji sile F , tj. pod pretpostavkom da pored savijanja djeluje i tlačna sila F koja teži da poveća nagibe nad osloncima druge grede.

Na temelju prednjega se mogu pisati jednačbe

$$\begin{aligned}\beta_B^{Fq, M_1} &= \alpha_B^{M_1, M_2, F} \\ \beta_D^{M_1, M_2, F} &= \alpha_D^{M_2}\end{aligned}\quad (b)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}\alpha_B^{M_1, M_2, F} &= -\frac{M_1 L}{3EI} \psi(u) + \frac{M_2 L}{6EI} \phi(u) \\ \beta_B^{Fq, M_1} &= \beta_B^{Fq} + \frac{M_1 L_1}{2EI_1} \\ \alpha_D^{M_2} &= \frac{M_2 L_1}{2EI_1} \\ \beta_D^{M_1, M_2, F} &= \frac{M_1 L}{6EI} \phi(u) - \frac{M_2 L}{3EI} \psi(u)\end{aligned}\quad (c)$$

Uvrštavajući izraze (c) u jednačbe (b) dobiva se, vodeći računa da je $L_2 = L_1 = 73.20$ cm

$$\begin{aligned}\beta_B^{Fq} + \frac{M_1 L_1}{2EI_1} &= -\frac{M_1 L}{3EI} \psi(u) + \frac{M_2 L}{6EI} \phi(u) \Rightarrow \left(3 \frac{I}{I_1} L_1 + 2L \psi(u)\right) M_1 - L \phi(u) M_2 = -6EI \beta_B^{Fq} \\ \frac{M_2 L_1}{2EI_1} &= \frac{M_1 L}{6EI} \phi(u) - \frac{M_2 L}{3EI} \psi(u) \Rightarrow -L \phi(u) M_1 + \left(3 \frac{I}{I_1} L_1 + 2L \psi(u)\right) M_2 = 0\end{aligned}\quad (d)$$

Za kritično opterećenje statički prekobrojne veličine M_1 i M_2 su beskonačne a to znači da determinanta sustava jednačbi mora biti ravna nuli, tj. treba da bude

$$\left(3 \frac{I}{I_1} \frac{L_1}{L} + 2\psi(u)\right)^2 = \phi^2(u)\quad (e)$$

Sada treba još odrediti momente inercije I_1 i I .

Moment inercije poprečnoga presjeka cijevi $I_x = I_y = I_o/2$ je

$$I = I_x = \frac{\pi}{64} (D_2^4 - D_1^4) = \frac{\pi}{64} (4.8^4 - 4.4^4) \times 10^4 = 76592 \text{ mm}^4$$

Površina poprečnoga presjeka A je

$$A = \frac{\pi}{4} (D_2^2 - D_1^2) = \frac{\pi}{4} (4.8^2 - 4.4^2) = 2.8903 \text{ cm}^2$$

Polumjer inercije $i_x = i_y$ je

$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{7.6592}{2.8903}} = 1.6279 \text{ cm}$$

Vitkost štapa λ je

$$\lambda = \frac{L}{i_x} = \frac{200}{1.6279} = 122.858$$

Sa ovim vrijednostima momenata inercije ($I = I_1$) i poznatih dužina izraz (e) postaje

$$[2\psi(u) + 1.026]^2 = \phi^2(u) \quad (f)$$

Jednadžba (f) je zadovoljena za vrijednost $2u = 4.89028444$, što daje $\psi(u) = 0.235742860$ odnosno $\phi(u) = -1.49748572$ pa je kritična sila izvijanja štapa BD

$$kL = 2u = 4.89028444 = L\sqrt{F_{kr}/EI},$$

$$F_{kr} = \left(\frac{4.89028444}{2}\right)^2 \times 210 \times 10^9 \times 7.6592 \times 10^{-8} = 96.164 \text{ kN} \quad (g)$$

odnosno reducirana dužina je $L_r = 0.642415L$

Dopuštena sila F_{dop} u ovom području izvijanja se dobiva primjenom koeficijenta sigurnosti v

$$v = \frac{F_{kr}}{F_{dop}} = 3.5 \Rightarrow F_{dop} = \frac{F_{kr}}{v}$$

$$F_{dop} = \frac{F_{kr}}{v_1} = \frac{96.164}{3.5} = 27.48 \text{ kN} \quad (h)$$

Za ovu vrijednost sile parametar $2u_1$ iznosi

$$2u_1 = Lk_1 = L\sqrt{\frac{F_{dop}}{EI}} = L\sqrt{\frac{1}{3.5} \frac{F_{kr}}{EI}} = \sqrt{\frac{1}{3.5}} 2u = 2.61396699$$

pa su funkcije $\phi(u_1)$ i $\psi(u_1)$

$$\phi(u_1) = 3.68084859 \text{ i } \psi(u_1) = 2.40854039 \quad (i)$$

Momenti M_1 i M_2 za ove vrijednosti funkcija nalaze se iz jednadžbi (d) i iznose

$$M_1 = -1.702452 \frac{EI}{L} \beta_B^{F_q}$$

$$M_2 = -1.0724592 \frac{EI}{L} \beta_B^{F_q} \quad (j)$$

Za maksimalno dopušteno opterećenje podnice, tj $F_q = 3.775 \text{ kN}$ bit će

$$\beta_B^{F_q} = -\frac{F_q L_1^2}{24EI_1} = -\frac{157,3 \times 0.732^2}{EI_1}$$

i momenti

$$\begin{aligned} M_1 &= 71.742 \text{ Nm}; \\ M_2 &= 45.194 \text{ Nm}. \end{aligned} \quad (k)$$

Maksimalni momenti savijanja duž grede \overline{AB} i \overline{CD} su moment savijanja na polovini grede \overline{AB} dok je moment savijanja duž grede \overline{CD} konstantan i ravan M_2 . Moment na polovini grede \overline{AB} je $M_{\max} = F_q L_1 / 8 - M_1 = 273.67 \text{ Nm}$.

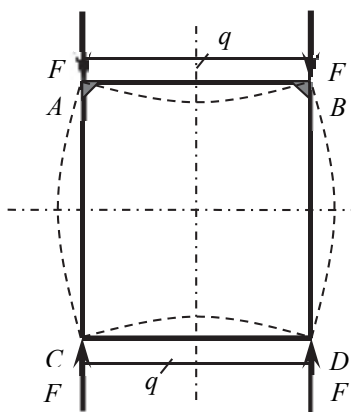
Sada se mogu naći i normalna naprezanja

$$\begin{aligned} \sigma_{1\max} &= \frac{M_{\max}}{W_1} = \frac{273670}{3191.33} = 85.754 \text{ Nmm}^{-2} = 85.754 \text{ MPa} \\ \sigma_{2\max} &= \frac{M_2}{W_2} = \frac{45194}{3191.33} = 14.161 \text{ Nmm}^{-2} = 14.161 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (l)$$

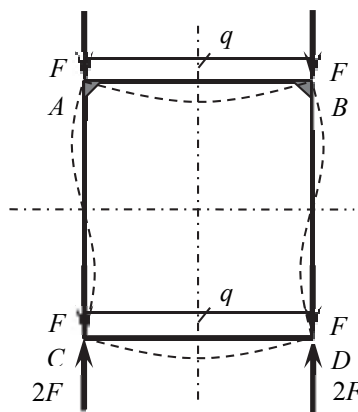
Dobivene vrijednosti su manje od dopuštene koja iznosi $\sigma_{\text{dop}} = 90 \text{ MPa}$.

U nastavku će se tražiti kritična sila izvijanja za slučaj da je okvir sa više petlji, no prije toga treba ustanoviti, radi donošenja ispravnog zaključka, da li kritična sila izvijanja, osim od geometrijskih karakteristika, zavisi i od oblika elastične linije pritisnutog štapa.

Promatra se simetrični ram u odnosu i na vertikalnu i na horizontalnu osu pri čemu će u prvom slučaju



Slika 6. Slučaj rama sa simetričnim opterećenjem



Slika 6. Slučaj rama sa antimetričnim opterećenjem

opterećenje biti simetrično a u drugom slučaju antimetrično u odnosu na horizontalnu osu. U oba će slučaja ram biti jedanput statički neodređen a za statički nepoznatu veličinu bira se moment savijanja u roglju koji spaja horizontalni i vertikalni štap.

U prvom slučaju jednažba za određivanje statičke nepoznate je

$$\begin{aligned} -\frac{F_q L_1^2}{24EI_1} + \frac{ML_1}{2EI_1} &= -\frac{ML}{3EI} \psi(u) - \frac{ML}{6EI} \phi(u) \\ \frac{ML}{6EI} \left(3 \frac{L_1}{L} \frac{I}{I_1} + 2\psi(u) + \phi(u) \right) &= \frac{F_q L_1^2}{24EI_1}. \end{aligned}$$

Da bi traženi moment M bio beskonačan (izvijanje vertikalne grede) mora koeficijent uz njega biti ravan nuli, tj.

$$2\psi(u) + \phi(u) + 3 \frac{L_1}{L} \frac{I}{I_1} = 0$$

odnosno

$$\frac{1}{u} \tan u + \frac{L_1}{L} \frac{I}{I_1} = 0,$$

tj.

$$\tan u + 0.366u = 0$$

rješenje prednje transcendentne jednačbe jeste

$$u = 2.41728121 = 0.769444506\pi$$

$$2u = 4.83456241 = 1.53888901\pi$$

a kritična sila izvijanja iz jednačbe (a) bit će za $E = 2.15 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$

$$F_{kr} = \left(\frac{2u}{L} \right)^2 EI = 96.225 \text{ kN} \quad (m)$$

U drugom slučaju je dopunska jednačba

$$-\frac{F_q L_1^2}{24EI_1} + \frac{ML_1}{2EI_1} = -\frac{ML}{3EI} \psi(u) + \frac{ML}{6EI} \phi(u)$$

$$\frac{ML}{6EI} \left(3 \frac{L_1}{L} \frac{I}{I_1} + 2\psi(u) - \phi(u) \right) = \frac{F_q L_1^2}{24EI_1},$$

tj.

$$2\psi(u) - \phi(u) + 3 \frac{L_1}{L} \frac{I}{I_1} = 0$$

odnosno

$$\frac{1}{u} \left(\frac{1}{u} - \cot u \right) + \frac{L_1}{L} \frac{I}{I_1} = 0,$$

ili nakon sređivanja

$$\cot u - \frac{1}{u} - 0.366u = 0$$

čije je rješenje

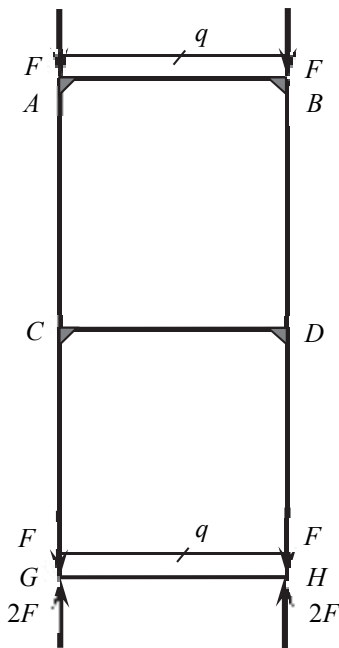
$$u = 3.69388561 = 1.17580031\pi$$

$$2u = 7.38777122 = 2.35160062\pi$$

pa je kritična sila izvijanja

$$F_{kr} = \left(\frac{2u}{L} \right)^2 EI = 224.70 \text{ kN} \quad (n)$$

što je preko dva puta veća vrijednost nego u prvom slučaju. Razlog tomu je što elastična linija izvijenog vertikalnog štapa u prvom slučaju ima samo jedan polutalas a u drugom dva polutalasa odnosno cio talas a na sredini štapa prijevajnu točku što se može smatrati zglobo. Iz tih će se razloga od mogućih varijanti opterećenja razmatrati samo one u kojima se između horizontalnih greda javlja jedan polutalas.



Slika 7. Slučaj rama sa dvije petlje

Ram na slici Sl. 08. je također simetričan sa dvije ose simetrije a opterećenje antisimetrično. Elastična linija vertikalnog štapa ima jedan puni talas sa prijevornom tačkom u tački D, tj. između horizontalnih greda su polutalasi. Ram je dva puta statički neodređen. Za statički prekobrojne veličine se biraju momenti u rogljima A, B, G i H koji su međusobno jednaki te u rogljima C i D.

Dopunske jednačbe će biti

$$-\frac{F_q L_1^2}{24EI_1} + \frac{M_B L_1}{2EI_1} = -\frac{M_B L}{3EI} \psi(u) + \frac{M_D L}{6EI} \phi(u)$$

$$\frac{2M_D L_1}{2EI_1} = -\frac{M_D L}{3EI} \psi(u) + \frac{M_B L}{6EI} \phi(u)$$

a nakon uvrštavanja M_B iz druge u prvu jednačbu dobiva se

$$\left[\left(6 \frac{L_1}{L} \frac{I}{I_1} + 4\psi(u) \right) \left(3 \frac{L_1}{L} \frac{I}{I_1} + \psi(u) \right) - \phi^2(u) \right] M_D = \frac{F_q L_1}{4} \frac{L_1}{L} \frac{I}{I_1} \phi(u)$$

Koeficijent uz M_D mora biti ravan nuli za slučaj da nastupi izvijanje pa se dobiva jednačba

$$4\psi^2(u) - \phi^2(u) + 18 \left(\frac{L_1}{L} \frac{I}{I_1} \right) \psi(u) + 18 \left(\frac{L_1}{L} \frac{I}{I_1} \right)^2 = 0$$

gdje je, kao i ranije, $\left(\frac{L_1}{L} \frac{I}{I_1} \right) = 0.366$.

Rješenje ove jednačbe je: $2u = 4.54760030 = 1.44754613\pi$

$$\psi(u) = 0.0353589797; \quad \phi(u) = -1.62762219$$

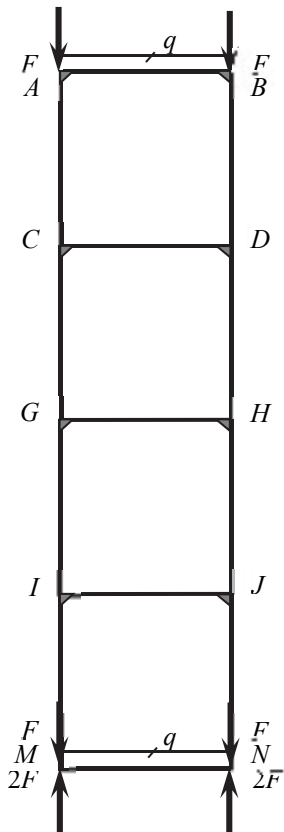
a kritična sila izvijanja

$$F_{kr} = \left(\frac{2u}{L} \right)^2 EI = 85.14 \text{ kN} \quad (o)$$

Ova je sila nešto manja, 88.48%, od sile za ram na slici Sl.05. zbog nešto manje krutosti nosača.

Ram na slici Sl. 08. je simetričan u odnosu na gredu GH a opterećenje antisimetrično, tj. statički nepoznati momenti u rogljima na istim pozicijama u odnosu na osu simetrije imaju iste vrijednosti ali i iste smjerove. Stavljajući da je

$$\frac{L_1}{L} \frac{I}{I_1} = 0.366 = R, \text{ i } 3R + 2\psi = S$$



Slika 8. Slučaj rama sa četiri petlje

sređeni sustav dopunskih jednadžbi za određivanje statički nepoznatih veličina bit će

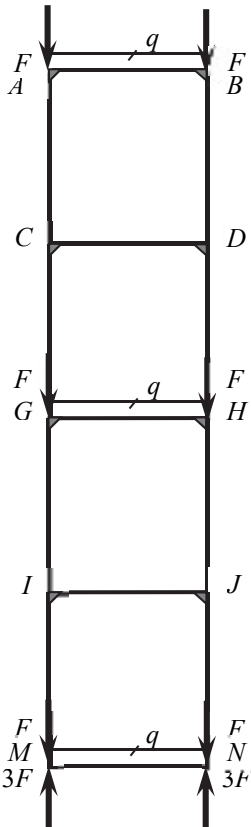
$$\begin{aligned}
 SM_B - \phi M_{D_1} &= R \frac{F_q L_1}{4} \\
 -\phi M_B + SM_{D_1} + 3RM_{D_2} &= 0 \\
 3RM_{D_1} + SM_{D_2} - \phi M_{H_1} &= 0 \\
 -\phi M_{D_2} + SM_{H_1} + 3RM_{H_2} &= 0 \\
 3RM_{H_1} + SM_{H_2} - \phi M_{J_1} &= 0 \\
 -\phi M_{H_2} + SM_{J_1} + 3RM_{J_2} &= 0 \\
 3RM_{J_1} + SM_{J_2} - \phi M_N &= 0 \\
 -\phi M_{J_2} + SM_N &= R \frac{F_q L_1}{4}
 \end{aligned}$$

gdje je sa indeksom 1 označen moment u gornjem a sa 2 moment u donjem štapu u promatranom čvoru. Četvrta i peta jednadžba postaju iste kada se stavi da je $M_{H_1} = M_{H_2}$ pa se mogu promatrati samo prve četiri jednadžbe.

Determinanta danog sustava je Jacobijeva determinanta obzirom da postoje elementi, različiti od nule, samo na glavnoj dijagonali i dvjema susjednim dijagonalama. Ova se determinanta razvija prema formuli

$$J_n = a_{nn}J_{n-1} - a_{n-1,n}a_{n,n-1}J_{n-2}; \quad J_{11} = a_{11}, \quad J_0 = 1.$$

prema tomu bit će



$$\begin{aligned}
 J_0 &= 1; \quad J_1 = S; \quad J_2 = S^2 - \phi^2; \quad J_3 = S(S^2 - \phi^2) - 9R^2S = S(S^2 - \phi^2 - 9R^2); \\
 J_4 &= S(S + 3R)(S^2 - \phi^2 - 9R^2) - \phi^2(S^2 - \phi^2) = S^4 + 3RS^3 - 9R^2S^2 - \\
 &\quad - 27R^3S - \phi^2(2S^2 + 3RS - \phi^2).
 \end{aligned}$$

Uvrštavajući izraz S dobiva se

$$J_4 = 8\psi [27R^3 + 36R^2\psi + 15R\psi^2 + 2\psi^3] - \phi^2 [27R^2 + 30R\psi + 8\psi^2 - \phi^2]$$

Rješenje jednadžbe $J_4 = 0$ je

Slika 9. Slučaj rama sa četiri petlje

$$2u = 4.39205276 = 1.39803381\pi; \psi(u) = -0.0710910829; \phi(u) = -1.75036264$$

Kritična sila izvijanja bit će

$$F_{kr} = \left(\frac{2u}{L}\right)^2 EI = 79.41 \text{ kN} \quad (p)$$

Ram na slici Sl. 8. je prethodni ram sa slike Sl. 07. sa dodatnim opterećenjem na gredi GH . Razlika je u tome što vertikalne stranice donje dvije petlje trpe djelovanje udvostručene tlačne sile $2F$ što znači da je vrijednost parametra u u njima $\sqrt{2}$ puta veća nego što je u vertikalnim štapovima gornje dvije petlje.

U ovom slučaju opterećenje više nije antimetrično a sustav jednačbi će biti

$$\begin{aligned} S_1 M_B - \phi_1 M_{D_1} &= R \frac{F_q L_1}{4} \\ -\phi_1 M_B + S_1 M_{D_1} + 3RM_{D_2} &= 0 \\ 3RM_{D_1} + S_1 M_{D_2} - \phi_1 M_{H_1} &= 0 \\ -\phi_1 M_{D_2} + S_1 M_{H_1} + 3RM_{H_2} &= R \frac{F_q L_1}{4} \\ 3RM_{H_1} + S_2 M_{H_2} - \phi_2 M_{J_1} &= R \frac{F_q L_1}{4} \\ -\phi_2 M_{H_2} + S_2 M_{J_1} + 3RM_{J_2} &= 0 \\ 3RM_{J_1} + S_2 M_{J_2} - \phi_2 M_N &= 0 \\ -\phi_2 M_{J_2} + S_2 M_N &= R \frac{F_q L_1}{4} \end{aligned}$$

Razvijanjem determinante Jacobija dobivaju se izrazi

$$\begin{aligned} J_1 &= S_1; J_2 = S_1^2 - \phi_1^2; J_3 = S_1(S_1^2 - \phi_1^2 - 9R^2); \\ J_4 &= (S_1^2 - \phi_1^2)^2 - (3RS_1)^2; \\ J_5 &= S_2(S_1^2 - \phi_1^2)^2 - 9R^2 S_1(S_1 S_2 + S_1^2 - \phi_1^2 - 9R^2); \\ J_6 &= (S_2^2 - \phi_2^2) \left[(S_1^2 - \phi_1^2)^2 - (3RS_1)^2 \right] - 9R^2 S_1 S_2 (S_1^2 - \phi_1^2 - 9R^2); \\ J_7 &= S_2(S_2^2 - \phi_2^2 - 9R^2) \left[(S_1^2 - \phi_1^2)^2 - 9R^2 S_1^2 \right] - 9R^2 S_1(S_2^2 - 9R^2)(S_1^2 - \phi_1^2 - 9R^2); \end{aligned}$$

te konačno

$$J_8 = \left[(S_2^2 - \phi_2^2)^2 - (3RS_2)^2 \right] \left[(S_1^2 - \phi_1^2)^2 - (3RS_1)^2 \right] - 9R^2 S_2 S_1 (S_2^2 - \phi_2^2 - 9R^2)(S_1^2 - \phi_1^2 - 9R^2).$$

Za slučaj izvijanja determinanta J_8 treba da je ravna nuli.

Uvrštavajući vrijednosti za S_1 i S_2 dobiva se

$$J_8 = \left[6R\psi(u_2) + 4\psi^2(u_2) - \phi^2(u_2) \right] \left[6R\psi(u_1) + 4\psi^2(u_1) - \phi^2(u_1) \right] \times \\
 \left[18R^2 + 18R\psi(u_2) + 4\psi^2(u_2) - \phi^2(u_2) \right] \left[18R^2 + 18R\psi(u_1) + 4\psi^2(u_1) - \phi^2(u_1) \right] - \\
 -9R^2 \left[3R + 2\psi(u_2) \right] \left[3R + 2\psi(u_1) \right] \left[12R\psi(u_2) + 4\psi^2(u_2) - \phi^2(u_2) \right] \left[12R\psi(u_1) + 4\psi^2(u_1) - \phi^2(u_1) \right]$$

pri čemu je

$$u_1 = \frac{k_1 L}{2} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{F}{EI}}; \quad u_2 = \frac{k_2 L}{2} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{2F}{EI}} = \sqrt{2} \frac{L}{2} \sqrt{\frac{F}{EI}} = \sqrt{2} u_1.$$

Rješenje jednačbe $J_8 = 0$ je $2u_1 = 3.24865366$ odnosno $2u_2 = 4.59429006$ odnosno

$$\psi(u_1) = -8.30830468; \quad \psi(u_2) = 0.0646522741 \\
 \phi(u_1) = -17.85260694; \quad \phi(u_2) = -1.5993886799$$

pa je

$$F_{kr} = \left(\frac{2u_2}{L} \right)^2 EI = 86.90 \text{ kN} \quad (q)$$

Uspoređivanjem kritične sile izvijanja ramova na slikama Sl. 05., 06., 08. i 09. vidi se da su one praktično jednake sa malim varijacijama intenziteta, koje zavise od načina opterećivanja što donekle utječe na elastičnu liniju vertikalnih štapova, i iznose $F_{kr} \approx 86.9$ kN. Iz tih razloga se može usvojiti da je dopuštena sila F_{dop} , uzimajući za koeficijent sigurnosti $\nu = 3.5$ (vitkost $\lambda = 123.625$), ravna

$$F_{dop} = \frac{F_{kr}}{3.5} = \frac{87}{3.5} \approx 24.86 \text{ kN} \quad (r)$$

Nepoznati momenti dani su izrazima:

$$M_{H_1} = \left\{ \left[S_1^3 - S_1(\phi_1^2 + 9R^2) - 3R\phi_1^2 \right] \left[(S_2^2 - \phi_2^2)^2 - 9R^2 S_2^2 \right] - \right. \\
 \left. - 3RS_1 \left[S_2^3 - S_2(\phi_2^2 + 9R^2) - 3R\phi_2^2 \right] (S_1^2 - \phi_1^2 - 9R^2) \right\} \frac{R}{4J_8} F_q L_1 \\
 M_{D_2} = \frac{\phi_1}{S_1(S_1^2 - \phi_1^2 - 9R^2)} \left[(S_1^2 - \phi_1^2) M_{H_1} - \frac{3R^2}{4} F_q L_1 \right] \quad (s1) \\
 M_{D_1} = \frac{R}{S_1^2 - \phi_1^2} \left(\frac{\phi_1}{4} F_q L_1 - 3S_1 M_{D_2} \right) \\
 M_B = \frac{1}{S_1} \left(\phi_1 M_{D_1} + \frac{R}{4} F_q L_1 \right)$$

odnosno

$$\begin{aligned}
M_{H_2} &= \left\{ \left[S_2^3 - S_2(\phi_2^2 + 9R^2) - 3R\phi_2^2 \right] \left[(S_1^2 - \phi_1^2)^2 - 9R^2 S_1^2 \right] - \right. \\
&\quad \left. - 3RS_2 \left[S_1^3 - S_1(\phi_1^2 + 9R^2) - 3R\phi_1^2 \right] (S_2^2 - \phi_2^2 - 9R^2) \right\} \frac{R}{4J_8} F_q L_1 \\
M_{J_1} &= \frac{\phi_2}{S_2(S_2^2 - \phi_2^2 - 9R^2)} \left[(S_2^2 - \phi_2^2) M_{H_2} - \frac{3R^2}{4} F_q L_1 \right] \quad (s2) \\
M_{J_2} &= \frac{R}{S_2^2 - \phi_2^2} \left(\frac{\phi_2}{4} F_q L_1 - 3S_2 M_{J_1} \right) \\
M_N &= \frac{1}{S_2} \left(\phi_2 M_{J_2} + \frac{R}{4} F_q L_1 \right)
\end{aligned}$$

Za slučaj da djeluje dopuštena sila $2F = F_{dop} = 24.86$ kN u vertikalama donje dvije petlje bit će

$$\begin{aligned}
J_8 &= 26546.31; \\
M_{H_1} &= 0.0224229312 F_q L_1; & M_{H_2} &= -0.0120242476 F_q L_1; \\
M_{D_2} &= 0.00621150805 F_q L_1; & M_{J_1} &= -0.0107359078 F_q L_1; \\
M_{D_1} &= 0.01018408 F_q L_1; & M_{J_2} &= 0.0182976668 F_q L_1; \\
M_B &= 0.0291609526 F_q L_1; & M_N &= 0.0283189308 F_q L_1.
\end{aligned}$$

Normalno naprezanje poprečnih nosača je u granicama dopuštenog kao što se to vidi iz jednačbe (l).

Drugi slučaj:

Do izvijanja vertikalnih štapova ramova, koji nisu ukrućeni leđnicama, može doći i u ravnini okomitoj na ravninu rama. Smatrajući poprečne grede kruto ukliještenima u ravnini leđnica to se izvijanje može računati kao izvijanje sa rubnim uvjetima elastičnog oslanjanja.

Da bi se mogla naći kritična sila izvijanja, pod navedenim uvjetima, nužno je naći torzijsku krutost horizontalnog štapa rama. Ona je po definiciji dana izrazom

$$C = \frac{GI_0}{L_1} = \frac{2.15 \times 10^{11} \times 2 \times 7.6592 \times 10^{-8}}{2.6 \times 0.732} = 17.3048 \times 10^3 \text{ Nm/rad}$$

Za ram sa slike Sl. 9 sustav jednačbi se može pisati na temelju jednakosti kutova obrtanja kao što je već rađeno, vidi sliku Sl. 10. Za čvor H, na primjer, mogu se pisati dvije jednačbe

$$\left. \begin{aligned} \frac{M'_H L}{3EI} \psi(u_1) + \frac{M''_D L}{6EI} \phi(u_1) &= -\frac{M'_H + M''_H}{C} \\ \frac{M''_H L}{3EI} \psi(u_2) + \frac{M'_J L}{6EI} \phi(u_2) &= -\frac{M'_H + M''_H}{C} \end{aligned} \right\},$$

nakon sređivanja može se pisati

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 M''_D + U_1 M'_H + 3TM''_H &= 0 \\ 3TM'_H + U_2 M''_H + \phi_2 M'_J &= 0 \end{aligned} \right\}$$

gdje su

$$3T = \frac{6EI}{LC} = \frac{3}{2} \frac{L_1}{L} \frac{I}{I_0} = 0.2745; \quad U = 3T + 2\psi$$

Kao što se može zapaziti dobiva se sustav sa determinantom koja je analogna determinanti J_8 iz prethodnog slučaja pa se može pisati

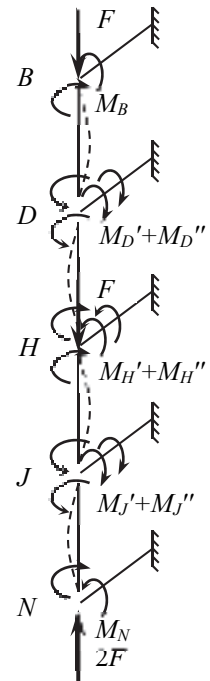
$$\begin{aligned} J'_8 = & \left[6T\psi(u_2) + 4\psi^2(u_2) - \phi^2(u_2) \right] \left[6T\psi(u_1) + 4\psi^2(u_1) - \phi^2(u_1) \right] \times \\ & \left[18T^2 + 18T\psi(u_2) + 4\psi^2(u_2) - \phi^2(u_2) \right] \left[18T^2 + 18T\psi(u_1) + 4\psi^2(u_1) - \phi^2(u_1) \right] - \\ & - 9T^2 \left[3T + 2\psi(u_2) \right] \left[3T + 2\psi(u_1) \right] \left[12T\psi(u_2) + 4\psi^2(u_2) - \phi^2(u_2) \right] \left[12T\psi(u_1) + 4\psi^2(u_1) - \phi^2(u_1) \right] \end{aligned}$$

Rješenje jednačbe $J'_8 = 0$ je $2u_1 = 3.39904364$ odnosno $2u_2 = 4.80697361$ pa je

$$F_{kr} = \left(\frac{2u_2}{L} \right)^2 EI = 95.13 \text{ kN} \quad (t)$$

Može se usvojiti da je dopuštena sila F_{dop} , uzimajući za koeficijent sigurnosti $\nu = 3.5$ (vitkost $\lambda = 123.625$), ravna

$$F_{dop} = \frac{F_{kr}}{3.5} = \frac{95.13}{3.5} \approx 27.18 \text{ kN} \quad (u)$$



Slika 10. Izvijanje u ravnini okomitoj na ravninu rama

ZAKLJUČAK

Dimenzije podnice dozvoljavaju maksimalno korisno opterećenje u vidu kontinuiranog opterećenja od $q_{\max} = 1.3$ kN/m ili u vidu koncentrirane sile od $G_{\max} = 1.70$ kN po jednoj podnici

Uspoređujući oba slučaja izvijanja vidi se da su dopuštene sile odnosno opterećenja približno jednaka.

Poprečne dimenzije elemenata čeličnih okvira dozvoljavaju maksimalnu uzdužnu silu (silu tlaka) u vertikalnim elementima od $F_{\max} = 22.70$ kN a da ne dođe do izvijanja. niti prekoračenja normalnih naprezanja u horizontalnim gredama pri maksimalnome opterećenju podnica.

Broj nivoa (broj petlji) n i broj maksimalno opterećenih podnih dasaka p od njih, za jedan segment, treba da zadovolje izraz: $(0.5 \cdot n + 3.4 \cdot p) \leq 45$ kN, ako su opterećena dva ili više susjednih segmenata. Za slučaj da je opterećen samo jedan segment opterećenje može biti udvostručeno.

Sve leđnice – ograde treba da su montirane jer služe za sigurnost radnika ali jednako tako i za krutost skele u uzdužnom pravcu.

LITERATURA:

Določek, V., i dr. (2003). *Elastostatika I i II*, Sarajevo.

Bogdan, Š., i dr. (2002). *Zbirka riješenih zadataka iz Nauke o čvrstoći*, Osnovi ergonomije, Sarajevo.

Timoschenko, J. (1983). *Teorija elastičnosti*, Tehnička enciklopedija VII, Zagreb: JLZ.

Timoshenko, S. and Goodier, J. M. (1951). *Theory of Elasticity*, 2nd edition, New York: Mc Graw – Hill Book Company.

Wang, C. T. (1953). *Applied Elasticity*, New York: Mc Graw – Hill Book Company.

Megson, T. H. G. (1972). *Aircraft Structures for Engineering Students*, London: Edward Arnold.

Roark, R. J. (1965). *Formulas for Stress and Strain*, 4th edition, New York: Mc Graw – Hill Book Company.

Stankov, D. (1963). *Proračun avionskih konstrukcija*, Beograd: Mašinski fakultet.

Static Analysis of Prefabricated Structure - Scaffolding in Civil Engineering

Šimun Bogdan

Full Professor at the Faculty of Mechanical Engineering and Computing in Mostar, Mostar, Bosnia and Herzegovina, simun.bogdan sve-mo.ba

Abstract: This paper includes the static load test of prefabricated scaffolding - structure used in the civil engineering for building facades. The aim was to determine the maximum load of the floor of prefabricated scaffolding, given the allowable stress of material the structure is made of, with the simultaneous testing of stability of vertical supports of scaffolding against buckling. The work was done as the part of the expertise of the building in Mostar.

Keywords: static analysis, buckling stability, statically undetermined supports, moments of entrapment, Euler form for critical buckling force, Tetmajer`s buckling form.