

Statička analiza nosivosti duplih ljestvi-skala sa pojačanim gazištima

Bogdan Šimun

Redoviti profesor na Fakultetu Strojstva i računarstva u Mostaru, simun.bogdan.ba

Sažetak: U radu je izvršena statička provjera nosivosti duplih ljestava-skala koja se koristi u građevinarstvu za molerske i električne radove na visini od 2 do 3 metra. Cilj je bio odrediti maksimalnu nosivost ljestvi u naj nepogodnijem položaju kao i prečki -podnica ljestvi, s obzirom na dopušteno naprezanje materijala od kojeg je izrađena konstrukcija a to je jela i smreka i uz istovremenu provjeru stabilnosti vertikalnih nosača na izvijanje. Rad je urađen u sklopu sudskog vještačenja.

Ključne riječi: statički proračun, moment sile, otporni moment, stabilnost na izvijanje, statički neodređeni nosač, momenti uklještenja, Ojlerov obrazac za kritičnu silu izvijanja.

Primljen / Received: 07. jun 2020. / June 07, 2020

Prihvaćen / Accepted: 09. jul 2020. / July 09, 2020

UVOD

Za, danim crtežom definirani niz od šest duplih ljestvi, koje se razlikuju po broju skalina (broj redova od tri do osam) i po debljini uzdužnoga komada, izvršiti provjeru dimenzija.

3 redova

uzdužni komad: 1150x53x22 mm,
dužina skalina: 35, 40, 45 mm,
dužina lanca (ispod druge skaline): 300 mm

4 redova

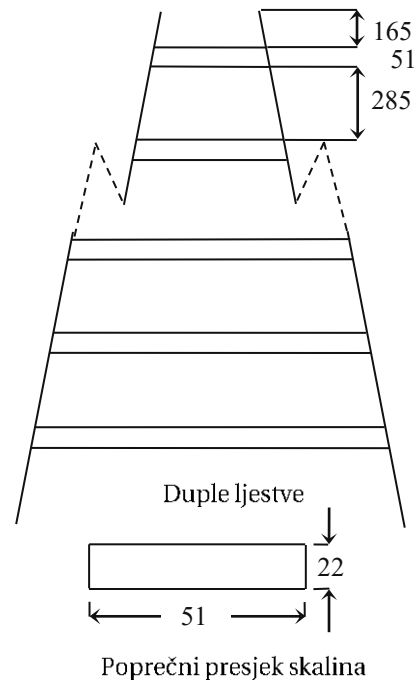
uzdužni komad: 1490x53x22 mm,
dužina skalina: 35, 40, 45, 50 mm,
dužina lanca (ispod treće skaline): 500 mm

5 redova

uzdužni komad: 1845x53x22 mm,
dužina skalina: 35, 40, 45, 50, 55 mm,
dužina lanca (ispod treće skaline): 600 mm

6 redova

uzdužni komad: 2180x63x22 mm,
dužina skalina: 35, 40, 45, 50, 55, 60 mm,
dužina lanca (ispod treće skaline): 580 mm



Bogdan Šimun:

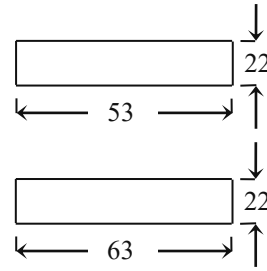
Statička analiza nosivosti duplih ljestvi-skala sa pojačanim gazištima
Static Load Capacity Analysis nn Double Ladder With Reinforced Treads

7 redova

uzdužni komad: 2535x63x22 mm,
dužina skalina: 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65 mm,
dužina lanca (ispod četvrte skaline): 860 mm

8 redova

uzdužni komad: 2875x63x22 mm,
dužina skalina: 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70 mm,
dužina lanca (ispod četvrte skaline): 860 mm



Poprečni presjeci uzdužnih komada

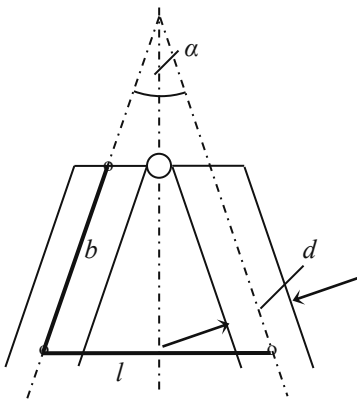
Materijal je jela i smreka.

2. STATIČKA PROVJERA NOSIVOSTI

1. KUT OTVARANJA LJESTVI

Za provjeru dimenzija neophodno je poznavati i kutove otvaranja ljestvi. Ovaj je podatak moguće dobiti na temelju dužine lanca l , položaja lanca u odnosu na zglob koji povezuje krake ljestve b i širine uzdužnoga komada d .

Iz trokuta što čine vertikalna i kosa osa (polumjer zgloba se zanemaruje) bit će



$$2 \left(b + \frac{d}{2 \cos(\alpha/2) \sin(\alpha/2)} \right) \sin(\alpha/2) = l$$

$$2b \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) - l \cos(\alpha/2) + d = 0$$

Koristeći trigonometrijske transformacije za polovične kutove prethodni se izraz može prikazati u obliku jednadžbe četvrtoga stupnja

$$\sin(\alpha/2) = 2 \sin(\alpha/4) \cos(\alpha/4) = \frac{2 \tan(\alpha/4)}{1 + \tan^2(\alpha/4)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos(\alpha/2) = \cos^2(\alpha/4) - \sin^2(\alpha/4) = \frac{1 - \tan^2(\alpha/4)}{1 + \tan^2(\alpha/4)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$4b \frac{t}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2} - l \frac{1-t^2}{1+t^2} + d = 0$$

$$(l+d)t^4 - 4bt^3 + 2dt^2 + 4bt - l + d = 0$$

$$t^4 - 4 \frac{b}{l+d} t^3 + 2 \frac{d}{l+d} t^2 + 4 \frac{b}{l+d} t - \frac{l-d}{l+d} = 0$$

$$t^4 - 4Rt^3 + 2St^2 + 4Rt + 2S - 1 = 0$$

$$R = \frac{b}{l+d}, \quad S = \frac{d}{l+d}$$

Gornja se jednačba smjenom $t = x + R$ svodi na kanonski oblik

$$x^4 - 2(3R^2 - S)x^2 - 4(2R^3 - SR - R)x - 3R^4 + 2SR^2 + 4R^2 + 2S - 1 = 0,$$

$$p_1 = -2(3R^2 - S), \quad q_1 = -4(2R^3 - SR - R), \quad r_1 = -3R^4 + 2SR^2 + 4R^2 + 2S - 1$$

$$x^4 + p_1x^2 + q_1x + r_1 = 0$$

Gornja se jednačba, uvodeći dva nova parametra i dva uvjeta, svodi na kubnu jednačbu

smjene: $p_1 = m_1 - m_2^2, \quad r_1 = n_1^2 - n_2^2$

uvjeti: $m_1 = 2n_1, \quad q_1 = 2m_2n_2,$

daju mogućnost da se jednačba razdvoji na kvadrate dva binoma

$$(x^4 + 2n_1x^2 + n_1^2) = (m_2^2x^2 - 2m_2n_2x + n_2^2) \Rightarrow (x^2 + n_1)^2 = (m_2x - n_2)^2$$

Na ovaj se način mogu dobiti dvije kvadratne jednačbe po x u funkciji novih parametara

$$x_A^2 + m_2x_A + n_1 - n_2 = 0 \Rightarrow x_{A/2} = \frac{1}{2} \left[-m_2 \pm \sqrt{m_2^2 - 4(n_1 - n_2)} \right]$$

$$x_B^2 - m_2x_B + n_1 + n_2 = 0 \Rightarrow x_{B/2} = \frac{1}{2} \left[m_2 \pm \sqrt{m_2^2 - 4(n_1 + n_2)} \right].$$

Iz gornjih smjena i uvjeta mogu se naći novi parametri m_1, n_1 i n_2 u funkciji parametra m_2 i na kraju dobiti zavisnost ovoga u funkciji starih, poznatih parametara p_1, q_1 i r_1 .

$$m_1 = p_1 + m_2^2, \quad n_2^2 = n_1^2 - r_1 = \frac{1}{4}m_1^2 - r_1 = \frac{1}{4}(p_1^2 + 2p_1m_2^2 + m_2^4) - r_1$$

$$q_1^2 = 4m_2^2n_2^2 = m_2^2[p_1^2 + 2p_1m_2^2 + m_2^4 - 4r_1] = m_2^6 + 2p_1m_2^4 + (p_1^2 - 4r_1)m_2^2$$

$$p_2^2 = z \Rightarrow p_2 = \sqrt{z} \quad \text{usvaja se pozitivan predznak}$$

$$z^3 + 2p_1z^2 + (p_1^2 - 4r_1)z - q_1^2 = 0, \quad m_1 = p_1 + z, \quad n_1 = \frac{1}{2}(p_1 + z), \quad n_2 = \frac{q_1}{2\sqrt{z}}$$

Neka je $z = z_1$ prvi koren gornje kubne jednačbe $f(z) = 0$ pri čemu važe proširena Viëteova pravila $-2p_1 = z_1 + z_2 + z_3$ i $q_1^2 = z_1z_2z_3 \Rightarrow q_1 = -\sqrt{z_1z_2z_3}$ (biran je negativan predznak jer na te-melju navedenih pravila za polaznu jednačbu mora biti $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -q_1$ a kad se u taj zbir unesu vrijednosti korijena dobiva se $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = \sqrt{z_1z_2z_3}$) bit će

$$x_{B/2} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{z_1} \pm \sqrt{z_1 - 2p_1 - 2z_1 - 2q_1/\sqrt{z_1}} \right] \quad x_{A/2} = \frac{1}{2} \left[-\sqrt{z_1} \pm \sqrt{z_1 - 2p_1 - 2z_1 + 2q_1/\sqrt{z_1}} \right]$$

$$-2p_1 - z_1 = z_2 + z_3, \quad -2q_1/\sqrt{z_1} = 2\sqrt{z_2z_3} \quad \sqrt{z_1 - 2p_1 - 2z_1 + 2q_1/\sqrt{z_1}} = \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$$

$$\sqrt{z_1 - 2p_1 - 2z_1 - 2q_1/\sqrt{z_1}} = \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \quad \sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} \cdot \sqrt{z_3} = -q_1 \quad (\text{uvjet})$$

$$x_{B_1} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \right] \quad x_{A_1} = \frac{1}{2} \left[-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \right]$$

$$x_{B_2} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \right] \quad x_{A_2} = \frac{1}{2} \left[-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \right]$$

Da bi se dobilo rješenje kubne jednadžbe $f(z) = 0$ ona se također mora svesti na kanonski oblik smjenom $z = y - 2p_1/3$ pa će se dobiti

$$\begin{aligned} y^3 + p_2 y + q_2 &= 0 \\ p_2 &= -\frac{1}{3} p_1^2 - 4r_1 = -16R^2 - \frac{4}{3} S^2 - 8S + 4 \\ q_2 &= -\frac{2}{27} p_1^3 + \frac{8}{3} p_1 r_1 - q_1^2 = -\frac{16S}{27} [72R^2 + S^2 - 18S + 9] \end{aligned}$$

U dobivenu jednadžbu se uvode dvije nove promjenljive smjenom $y = u + v$ uz jedan dodatni uvjet da je $3uv + p_2 = 0$ odnosno da je $v = -p_2/3u$. Na taj se način dobiva jednadžba koja se smjenom može svesti na kvadratnu jednadžbu te se rješenje lako dobiva

$$\begin{aligned} (u^3)^2 + q_2 u^3 - \frac{p_2^3}{27} &= 0 \\ u_{1/2}^3 &= -\frac{q_2}{2} \pm \sqrt{\frac{q_2^2}{4} + \frac{p_2^3}{27}} = -\frac{q_2}{2} \pm \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = \frac{q_2^2}{4} + \frac{p_2^3}{27} \end{aligned}$$

Vrijednosti u_1 i u_2 dobivaju se vađenjem kubnoga korijena. Može se računom dokazati da je pri tome $v_1^3 = u_2^3$ i $v_2^3 = u_1^3$ pa je $y = \sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{u_2}$. Diskriminanta Δ određuje dva odvojena slučaja ako ona nije manja od nule rješenja su

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + u_2 \\ y_2 &= -\frac{1}{2}(u_1 + u_2) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - u_2) \\ y_3 &= -\frac{1}{2}(u_1 + u_2) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - u_2) \end{aligned}$$

gdje se drugi i treći koren mogu dobiti iz kvadratne jednadžbe nastale dijeljenjem kubne jednadžbe sa faktorom $(y - y_1)$. Kada je diskriminanta manja od nule dobivaju se kompleksni izrazi koji se prevode u eksponencijalni oblik pa se lako vade treći koreni. Tako da je

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{3} \arccos \frac{-3\sqrt{3}q_2}{2|p_2|^{3/2}} [^\circ] \\ y_1 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{|p_2|} \cos \varphi, \quad y_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{|p_2|} \cos(\varphi + 120^\circ), \quad y_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{|p_2|} \cos(\varphi - 120^\circ) \end{aligned}$$

Valja zapaziti da u prvom slučaju samo je jedno rješenje kubne jednadžbe realno a druga su dva konjugirano kompleksna dok su u drugom slučaju sva tri rješenja realni brojevi
Na temelju naprijed danih izraza bit će za pojedine ljestve

	3	4	5	6	7 i 8
R	1.66461	1.65461	1.40123	1.42302	1.36403
S	0.15014	0.09584	0.08116	0.09798	0.06826
p_1	-16.29093	-16.23475	-11.61826	-11.95391	-11.02696
q_1	-29.13556	-28.98638	-15.94986	-16.80286	-14.47455
r_1	-11.74759	-11.81822	-4.23042	-4.60893	-3.55244
p_2	-41.47441	-40.58279	-28.07300	-29.19627	-26.32152
q_2	-18.27631	-11.60888	-7.16227	-8.88594	-5.73298
Δ	-2558.76	-2441.80	-806.59	-902.02	-667.20

Kao što se vidi sva su rješenja realni brojevi od kojih će fizički samo jedno zadovoljavati zadane uvjete. Ostala tri su se pojavila samo uslijed manipuliranja sa jednažbama.

Ljestve sa tri redova

$$\varphi = 26.5866101^\circ$$

$$y_1 = 6.650016900$$

$$y_2 = -6.207259490$$

$$y_3 = -0.442757417$$

$$z_1 = 17.51063420$$

$$\sqrt{z_1} = \pm 4.18457097$$

$$z_2 = 4.65335786$$

$$\sqrt{z_2} = \pm 2.15716431$$

$$\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} \cdot \sqrt{z_3} = 29.1355635$$

$$z_3 = 10.41785990$$

$$\sqrt{z_3} = \pm 3.22767097$$

$$x_1 = 4.784703130$$

$$t_1 = 6.447592640 \quad \alpha_1 = 324.735438^\circ$$

$$x_2 = -0.600132155$$

$$t_2 = 1.062757360 \quad \alpha_2 = 186.970521^\circ$$

$$x_3 = -2.627538820$$

$$t_3 = -0.964649297 \quad \alpha_3 = 544.123337^\circ$$

$$x_4 = -1.557032160$$

$$t_4 = 0.105857363 \quad \underline{\alpha_4 = 24.1707050^\circ = 24^\circ 10' 14.5380''}$$

Ljestve sa četiri redova

$$\varphi = 27.7668343^\circ$$

$$y_1 = 6.508941150$$

$$y_2 = -6.222306530$$

$$y_3 = -0.286634625$$

$$z_1 = 17.33210640$$

$$\sqrt{z_1} = \pm 4.16318464$$

$$z_2 = 4.60085869$$

$$\sqrt{z_2} = \pm 2.14496123$$

$$\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} \cdot \sqrt{z_3} = 28.9863770$$

$$z_3 = 10.53653060$$

$$\sqrt{z_3} = \pm 3.24600225$$

$$x_1 = 4.77707400$$

$$t_1 = 6.431685270 \quad \alpha_1 = 324.649594^\circ$$

$$x_2 = -0.61388942$$

$$t_2 = 1.040721790 \quad \alpha_2 = 184.572651^\circ$$

$$x_3 = -2.63211283$$

$$t_3 = -0.977501620 \quad \alpha_3 = 467.300812^\circ$$

$$x_4 = -1.53107181$$

$$t_4 = 0.123539402 \quad \underline{\alpha_4 = 28.1704118^\circ = 28^\circ 10' 13.4825''}$$

Bogdan Šimun:

Statička analiza nosivosti duplih ljestvi-skala sa pojačanim gazištima
Static Load Capacity Analysis nn Double Ladder With Reinforced Treads

Ljestve sa pet redova

$\varphi = 27.6044233^\circ$
 $y_1 = 5.421628790$
 $y_2 = -5.165902890$
 $y_3 = -0.255725900$
 $z_1 = 13.16713760$
 $z_2 = 2.57960592$
 $z_3 = 7.48978291$
 $x_1 = 3.98575851$
 $x_2 = -0.357103445$
 $x_3 = -2.37964335$
 $x_4 = -1.24901173$

$\sqrt{z_1} = \pm 3.62865507$
 $\sqrt{z_2} = \pm 1.60611516$ $\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} \cdot \sqrt{z_3} = 15.9498640$
 $\sqrt{z_3} = \pm 2.73674678$
 $t_1 = 5.386983620$ $\alpha_1 = 317.934951^\circ$
 $t_2 = 1.044121680$ $\alpha_2 = 184.946073^\circ$
 $t_3 = -0.978418230$ $\alpha_3 = 542.499967^\circ$
 $t_4 = 0.152213390$ $\alpha_4 = 34.6190098^\circ = 34^\circ 37' 08.4353''$

Ljestve sa šest redova

$\varphi = 27.1950323^\circ$
 $y_1 = 5.549546730$
 $y_2 = -5.244220030$
 $y_3 = -0.305326700$
 $z_1 = 13.51881980$
 $z_2 = 2.72505309$
 $z_3 = 7.66394642$
 $x_1 = 4.04797581$
 $x_2 = -0.37118103$
 $x_3 = -2.39720233$
 $x_4 = -1.27959245$

$\sqrt{z_1} = \pm 3.67679478$
 $\sqrt{z_2} = \pm 1.65077348$ $\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} \cdot \sqrt{z_3} = 16.8028559$
 $\sqrt{z_3} = \pm 2.76838336$
 $t_1 = 5.470992920$ $\alpha_1 = 318.566789^\circ$
 $t_2 = 1.051836080$ $\alpha_2 = 185.788682^\circ$
 $t_3 = -0.974185223$ $\alpha_3 = 542.996666^\circ$
 $t_4 = 0.143424657$ $\alpha_4 = 32.6478627^\circ = 32^\circ 38' 52.3057''$

Ljestve sa sedam i osam redova

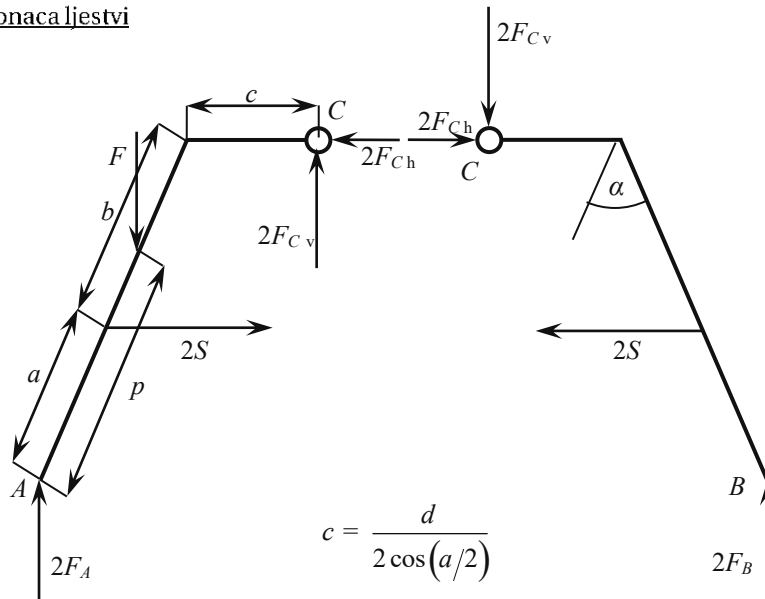
$\varphi = 27.8891764^\circ$
 $y_1 = 5.236069060$
 $y_2 = -5.017868480$
 $y_3 = -0.218200576$
 $z_1 = 12.58737650$
 $z_2 = 2.33343896$
 $z_3 = 7.13310687$
 $x_1 = 3.87310840$
 $x_2 = -0.32523911$
 $x_3 = -2.34554859$
 $x_4 = -1.20232071$

$\sqrt{z_1} = \pm 3.54786929$
 $\sqrt{z_2} = \pm 1.52755981$ $\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} \cdot \sqrt{z_3} = 14.4745543$
 $\sqrt{z_3} = \pm 2.67078769$
 $t_1 = 5.237138730$ $\alpha_1 = 316.759366^\circ$
 $t_2 = 1.038791230$ $\alpha_2 = 184.360046^\circ$
 $t_3 = -0.981518249$ $\alpha_3 = 542.137544^\circ$
 $t_4 = 0.161709631$ $\alpha_4 = 36.7430438^\circ = 36^\circ 44' 34.9577''$

2. ANALIZA SILA

Znajući kut otvaranja ljestvi mogu se naći otpori oslonaca, sila u lancu te momenti i uzdužne odnosno poprečne sile.

Otpori oslonaca ljestvi



$$c = \frac{d}{2 \cos(\alpha/2)}$$

Sustav sila

$$\begin{aligned} \sum M_C^d &= 2Sb \cos(\alpha/2) - 2F_B [(a+b) \sin(\alpha/2) + c] = 0 \\ \sum M_C^l &= 2F_A [(a+b) \sin(\alpha/2) + c] - 2Sb \cos(\alpha/2) - F [(a+b-p) \sin(\alpha/2) + c] = 0 \\ \sum F_v &= 2F_A + 2F_B - F = 0 \end{aligned}$$

Iz gornjih jednažbi mogu se naći otpori oslonaca F_A i F_B te sila u lancu ili lancima S .

$$\begin{aligned} F_A &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{p \sin(\alpha/2)}{2[(a+b) \sin(\alpha/2) + c]} \right\} F \\ F_B &= \frac{p \sin(\alpha/2)}{4[(a+b) \sin(\alpha/2) + c]} F \\ S &= \frac{p \tan(\alpha/2)}{4b} F \\ F_{Cv} &= F_B, \quad F_{Ch} = S \end{aligned}$$

Opterećenje svedeno na glavne ose.

Vanjska sila F te otpori F_A , F_B i sila u lancu S dani su u koordinatnome sustavu x,y,z pri čemu je x -osa u presjeku horizontale i kose ravni kraka ljestve (točke $A-A$), y -osa prolazi kroz točkama $A-B$ i z -osa je vertikalna. Obzirom da su uzdužni elementi ljestvi u kosim ravnima te zbog sužavanja ljestvi prema vrhu još i nagnuti u tim ravnima za kut β to se i poprečni presjeci nalaze u jednome kosom položaju u odnosu na horizontalu.

Koordinatni sustav x,y,z može se prevesti u položaj ξ,η,ζ gdje je treća osa uzdužna osa elementa a druge dvije su glavne ose poprečnog presjeka, sa rotacijom oko x -ose za kut $\alpha/2$ i potom sa rotacijom oko ose η (pri-jašnja osa y) za kut β . Nakon prve rotacije oko x -ose za kut $\alpha/2$ z -osa prelazi u položaj ose u a y -osa u položaj η

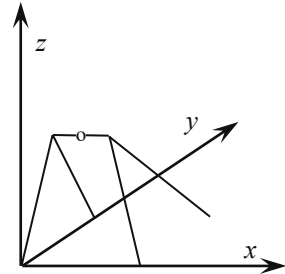
$$\vec{j} = \vec{u}_0 \sin \frac{\alpha}{2} + \vec{j}' \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\vec{k} = \vec{u}_0 \cos \frac{\alpha}{2} - \vec{j}' \sin \frac{\alpha}{2}$$

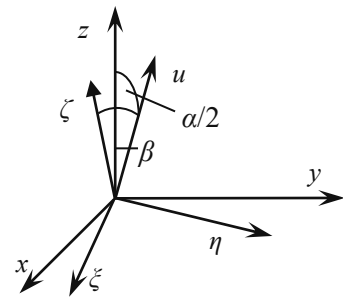
Sljedećom rotacijom za kut β oko ose η sa ortom \vec{j}' osa x će preći u položaj ξ sa ortom \vec{i}' i osa u u položaj ζ sa ortom \vec{k}'

$$\vec{u}_0 = \kappa \cos \beta - \vec{i}' \sin \beta$$

$$\vec{i} = \vec{i}' \cos \beta + \vec{k}' \sin \beta$$



Položaj ljestvi



Rotiranje koordinatnog sustava

Uvrštavanjem orta \vec{u}_0 konačno se dobiva

$$\vec{i} = \vec{i}' \cos \beta + \vec{k}' \sin \beta$$

$$\vec{j} = -\vec{i}' \sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta + \vec{j}' \cos \frac{\alpha}{2} + \vec{k}' \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta$$

$$\vec{k} = -\vec{i}' \cos \frac{\alpha}{2} \sin \beta - \vec{j}' \sin \frac{\alpha}{2} + \vec{k}' \cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta$$

Kut β se može odrediti na temelju skraćivanja dužine skalina koje iznosi 50 mm na dužini od $(285 + 51) = 336$ mm pa će biti (vođeci računa da se skraćenje odnosi na dvostruku vrijednost kuta β)

$$\beta = \arctan \frac{50}{2 \cdot 336} = 4.25523796^\circ = 4^\circ 15' 18.8567''$$

Sada se mogu pisati i izrazi za sile svedene na novi koordinatni sustav

$$\vec{F}_A = F_A \vec{k} = -F_A \cos \frac{\alpha}{2} \sin \beta \vec{i}' - F_A \sin \frac{\alpha}{2} \vec{j}' + F_A \cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta \vec{k}'$$

$$\vec{S} = S \vec{j} = -S \sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta \vec{i}' + S \cos \frac{\alpha}{2} \vec{j}' + S \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \vec{k}'$$

$$\vec{F}'_{Cv} = F'_{Cv} \vec{k} = -F'_{Cv} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \beta \vec{i}' - F'_{Cv} \sin \frac{\alpha}{2} \vec{j}' + F'_{Cv} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta \vec{k}'$$

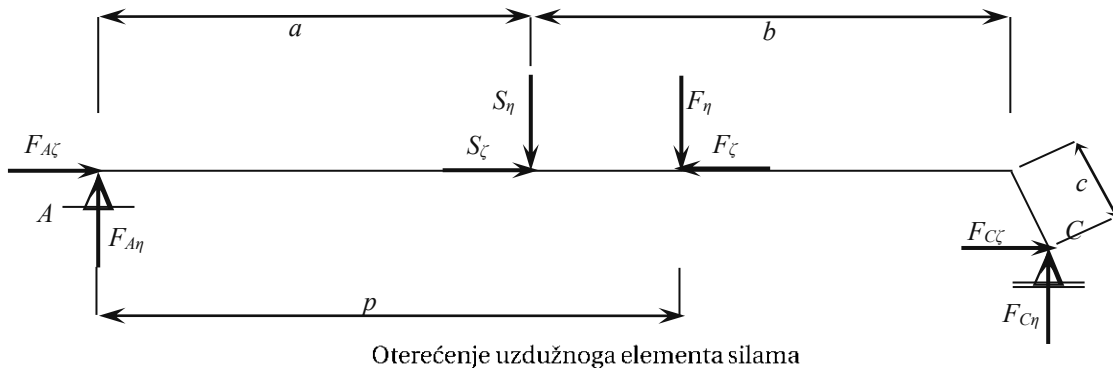
$$\vec{F}'_{Ch} = -S = S \sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta \vec{i}' - S \cos \frac{\alpha}{2} \vec{j}' - S \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \vec{k}'$$

$$\vec{F}'_C = (S \sin \frac{\alpha}{2} - F_{Cv} \cos \frac{\alpha}{2}) \sin \beta \vec{i}' - (S \cos \frac{\alpha}{2} + F_{Cv} \sin \frac{\alpha}{2}) \vec{j}' - (S \sin \frac{\alpha}{2} - F_{Cv} \cos \frac{\alpha}{2}) \cos \beta \vec{k}'$$

$$\vec{F}' = -F \vec{k} = F \cos \frac{\alpha}{2} \sin \beta \vec{i}' + F \sin \frac{\alpha}{2} \vec{j}' - F \cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta \vec{k}'$$

Uzdružni element kraka opterećenog silom.

Razmatrat će se uzdužni element čiji je oslonac u koordinatnome početku. U analizi opterećenja će se zanemariti sile duž ose ξ kao male veličine koje se i inače vrlo brzo uravnotežuju sa istim takvima u drugom uzdužnom elementu istoga kraka



Vrijednosti transverzalnih sila dani su izrazima

$$F_{T_1} = F_{A\eta} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\sin(\alpha/2)}{2[(a+b)\sin(\alpha/2) + c]} p \right\} F \sin(\alpha/2)$$

$$F_{T_2} = F_{A\eta} - S_\eta = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{(a+2b)\sin(\alpha/2) + c}{2b[(a+b)\sin(\alpha/2) + c]} p \right\} F \sin(\alpha/2)$$

$$F_{T_3} = F_{A\eta} - S_\eta - F_\eta/2 = -\frac{(a+2b)\sin(\alpha/2) + c}{4b[(a+b)\sin(\alpha/2) + c]} p F \sin(\alpha/2)$$

Presjek maksimalnoga momenta savijanja je definiran presjekom u kojem transverzalna sila mijenja predznak. To može biti približno pod prvom silom kada je napadna točka sile F $p \approx a$ ili ako je $p \geq \left\{ 2b[(a+b)\sin(\alpha/2) + c] \right\} / [(a+2b)\sin(\alpha/2) + c]$ što je dobiveno iz uvjeta da je $F_{T_2} \leq 0$.

Obzirom da sa porastom p sila u osloncu A opada kritična vrijednost momenta savijanja bit će za $p \approx a$ te se dobiva

$$M_{kr} \approx \frac{a}{2} \left\{ 1 - \frac{a \sin(\alpha/2)}{2[(a+b)\sin(\alpha/2) + c]} \right\} F \sin(\alpha/2)$$

Transverzalna sila će biti ili $F_{A\eta}$ ili $F_{C\eta}$ a uzdužna sila $F_{A\zeta}$ ili $F_{C\zeta}$.

Mogući položaji sile F su (položaji skalina):

Bogdan Šimun:

Statička analiza nosivosti duplih ljestvi-skala sa pojačanim gazištima
Static Load Capacity Analysis nn Double Ladder With Reinforced Treads

$$p_1 = a + 35 + 51 = a + 86 \text{ mm}$$

$$p_2 = p_1 - 285 - 51 = a - 250 \text{ mm}$$

Za ljestve sa pet redova skalina bit će

$$p_1 = a + 86 = 922 + 86 = 1008 \text{ mm}$$

$$p_2 = a - 250 = 922 - 250 = 672 \text{ mm}$$

Za ljestve sa osam redova skalina bit će

$$p_1 = a + 86 = 1616 + 86 = 1702 \text{ mm}$$

$$p_2 = a - 250 = 1616 - 250 = 1366 \text{ mm}$$

Ova rastojanja će za sile F_A i S dati sljedeće vrijednosti

Za ljestve sa pet redova skalina bit će

$$F_{A1} = 0.366783F,$$

$$F_{A2} = 0.411188F$$

$$S_1 = 0.08508687F$$

$$S_2 = 0.05672455F$$

Za ljestve sa osam redova skalina bit će

$$F_{A1} = 0.3546619F,$$

$$F_{A2} = 0.3833538F$$

$$S_1 = 0.11224000F$$

$$S_2 = 0.09008216F$$

Maksimalni momenti savijanja će biti

$$M_{1\max} = p_1 F_{A1} \sin(\alpha/2) - (p_1 - a) S_1 \cos(\alpha/2)$$

$$M_{2\max} = p_2 F_{A2} \sin(\alpha/2)$$

što daje za ljestve sa pet redova skalina

$$M_{1\max} = 103.017F \text{ Nmm}$$

$$M_{2\max} = 82.214F \text{ Nmm}$$

a za ljestve sa osam redova skalina

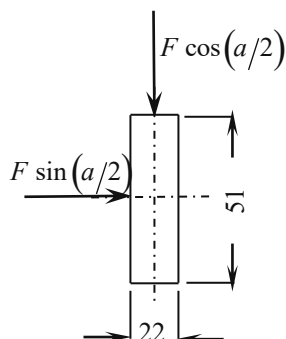
$$M_{1\max} = 181.091F \text{ Nmm}$$

$$M_{2\max} = 165.046F \text{ Nmm}$$

Iz prednjih izraza se vidi da su prvi momenti mjerodavni za proračun pri čemu se sila uvrštava u njutnima.

Skalin opterećen silom.

Za proračun mjerodavan je najduži skalin (svi imaju isti poprečni presjek). Smatrat će se da je skalin obostrano uklješten pa će momenti uklještenja i moment ispod sile biti jednaki $M = Fl/8$ za silu F na sredini skalina. Dužina skalina $l = 70$ cm.



Poprečni presjek

Za silu $F = 1.00$ kN i maksimalnu vrijednost kuta otvaranja ljestvi $\alpha = 36.743^\circ$ sile će biti

$$F_\eta = F \sin(\alpha/2) = 0.315177 \text{ kN}$$

$$F_x = F \cos(\alpha/2) = 0.949033 \text{ kN}$$

Otporni momenti presjeka bit će

$$W_\eta = \frac{2.2 \times 5.1^2}{6} = 9.537 \text{ cm}^3$$

$$W_x = \frac{5.1 \times 2.2^2}{6} = 4.114 \text{ cm}^3$$

Provjera dimenzija.

Otporni moment i površina poprečnog presjeka uzdužnog elementa sa pet redova skalina bit će

$$W_{5\xi} = \frac{2.2 \times 5.3^2}{6} = 10.300 \text{ cm}^3 \quad A_5 = 2.2 \times 5.3 = 11.66 \text{ cm}^2$$

a sa osam redova

$$W_{8\xi} = \frac{2.2 \times 6.3^2}{6} = 14.553 \text{ cm}^3 \quad A_8 = 2.2 \times 6.3 = 13.86 \text{ cm}^2$$

Uzdužna sila u kritičnome presjeku je dan izrazom

$$F_\zeta = F_{A\zeta} + S\zeta = F_A \cos(\alpha/2) \cos \beta + S \sin(\alpha/2) \cos \beta$$

Na temelju ovoga izraza ta će sila biti u uzdužnome elementu sa pet redova

$$F_{\zeta 5} = 0.37437 \text{ kN}$$

a u uzdužnome elementu sa osam redova

$$F_{\zeta 8} = 0.36702 \text{ kN}$$

Maksimalna normalna naprezanja uzdužnih elemenata za silu $F = 1.00$ kN bit će

$$\sigma_{5\max} = \frac{M_{5,1\max}}{W_{5\xi}} + \frac{F_{5\zeta}}{A_5} = \frac{10.3017 \times 1.00}{10.300} + \frac{0.37437}{11.66} = 1.032 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{8\max} = \frac{M_{8,1\max}}{W_{8\xi}} + \frac{F_{8\zeta}}{A_8} = \frac{18.1091 \times 1.00}{14.553} + \frac{0.36702}{13.86} = 1.271 \text{ kN/cm}^2$$

Za crnogoricu klase I je $\sigma_{s.d.} = 1.15 \text{ kN/cm}^2$ pa je prekoračenje u drugom slučaju oko 10% no obzirom da su opterećenja detaljno sračunata može se prihvatiti.

Za skaline najkritičnija je donja skalina najdužih ljestvi. Smatrat će se da je obostrano uklještena. Momenti uklještenja u uzdužnome elementu će se vrlo brzo uravnotežiti preko susjednih skalina sa istim takvima u drugome uzdužnom elementu istoga kraka pa se tako mogu smatrati lokalnim opterećenjem uzdužnoga elementa koji se svode na moment savijanja i moment uvijanja uzdužnoga elementa. Skalin u kritičnome presjeku je za 40% kraći pa samim tim su i momenti za toliko manji. Vrijednosti momenata savijanja će biti

$$M_x = \frac{F_\eta l}{8} = \frac{0.315177 \times 70}{8} = 2.7578 \text{ kNcm}$$

$$M_\eta = \frac{F_x l}{8} = \frac{0.949033 \times 70}{8} = 8.3040 \text{ kNcm}$$

Maksimalno normalno naprezanje će biti

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_\eta}{W_\eta} = \frac{2.7578}{4.114} + \frac{8.3040}{9.537} = 1.541 \text{ kN/cm}^2$$

što prelazi dopuštenu vrijednost za 34% no za nekoliko prvih skalina se može koristiti i bukva sa dopuštenim normalnim naprezanjem $\sigma_{s.d.} = 1.40 \text{ kN/cm}^2$ pa je prekoračenje samo 10%.

ZAKLJUČAK

Provjera niza duplih ljestvi od tri do osam redova skalina vršena je sa silom od

$$F = 1 \text{ kN odnosno masom } m \approx 100 \text{ kg}$$

Provjerene su dvije kritične ljestve – jedna s pet redova skalina i visine poprečnog presjeka uzdužnoga elementa (bočne strane) $d_1 = 53 \text{ mm}$ i druga s visinom $d_2 = 63 \text{ mm}$, širine su u oba slučaja iste $e_1 = e_2 = 22 \text{ mm}$. Izvršena je, također, i provjera najduljeg skalina.

Provjere su pokazale da su u ovim kritičnim slučajevima maksimalna naprezanja u uzdužnim elementima na granici dopuštenoga sa jednim blagim prekoračenjem u drugome slučaju (pretpostavljajući dovoljno čvrst spoj između skalina i uzdužnih elemenata tako da može prenijeti naprezanja). Pri tome treba istaći da je provjera vršena na konzervativan način, tj. smatrajući da su ljestve na idealno glatkim površinama (bez imalo trenja). Na ovaj je način isključena sila trenja koja, između ostalog, smanjuje maksimalne momente savijanja u kritičnim pre-sjecima.

Provjera skalina je pokazala da u najduljim skalinama maksimalno naprezanje od momenata savijanja, pri maksimalnom kutu otvaranja ljestvi $\alpha = 36.743^\circ$, prekoračuje dopuštene napone za crnogoricu te se **predlaže da skalini duljine 55 cm i dulji rade od bukve.**

Drugo rješenje je da se povećaju dimenzije skalina za 15% u kom bi slučaju te dimenzije bile $25 \times 60 \text{ mm}^2$ sa otpornim momentima $W_x = 6.25 \text{ cm}^3$ i $W_\eta = 15.00 \text{ cm}^3$, te maksimalnim normalnim naprezanjem

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_\eta}{W_\eta} = \frac{2.7578}{6.25} + \frac{8.3040}{15.00} = 0.995 \text{ kN/cm}^2 < \sigma_{dop.}$$

LITERATURA:

- Bogdan, Š., Vesna R. Zbirka riješenih zadataka iz Nauke o čvrstoći.
- Določek, V., Bogdan, Š. i dr. (2003). Elastostatika I i II, Sarajevo.
- Megson, T.H.G. (1972). Aircraft Structures for Engineering Students, Edward Arnold, London.
- Osman, M. i suradnici, (2002). Osnovi ergonomije, Sarajevo.
- Roark, R.J.(1965). Formulas for Stress and Strain, 4th edition, Mc Graw – Hill Book Company, New York.
- Stankov, D. (1963). Proračun avionskih konstrukcija, Mašinski fakultet, Beograd.
- Timoschenko, J. (1983). Teorija elastičnosti: Tehnička enciklopedija VII, JLZ, Zagreb.
- Timoshenko, S. and Goodier J. M., (1951). Theory of Elasticity, 2nd edition, Mc Graw – Hill Book Company, New York.
- Wang, C.T. (1953). Applied Elasticity, Mc Graw – Hill Book Company, New York.
-

Static Load Capacity Analysis nn Double Ladder With Reinforced Treads

Šimun Bogdan

Full professor at the Faculty of Mechanical Engineering and Computing in Mostar, simun.bogdan.ba

Abstract: The paper performs a static check of the load-bearing capacity of double ladders used in construction for painting and electrical works at a height of 2 to 3 meters. The aim was to determine the maximum load-bearing capacity of the ladder in the most unsuitable position as well as ladder crossbars, allowed stressing of the material from which the structure is made, which is fir and spruce, and at the same time checking the stability of the vertical beams to bending. The paper was done as part of the forensic expertise.

Keywords: static calculation, moment of force, resistance moment, buckling stability, statically indeterminate support, clamping moments, Euler's pattern for critical buckling force.