ACTA ECONOMICA
Година XI, број 19 / јул 2013.
ISSN 1512-858X, e-ISSN 2232-738X

ПРЕГЛЕДНИ ЧЛАНАК

УДК: 336.781.5:330.14
DOI: 10.7251/ACE1319067K
COBISS.BH-ID 3826200

Миливоје Крчмар[1]

Модели амортизације зајма исподгодишњим варијабилним ануитетима

Models of loan amortization under annual variable annuities

Резиме

У овом раду презентовани су модели амортизације зајма исподгодишњим варијабилним ануитетима уз фиксну каматну стопу. Овде се разматрају два модела:

- *а) ануитети током године су једнаки, а сваке сљедеће већи (мањи) у односу на претходну годину за q пута и*
- *б) ануитети се мијењају циклично, гдје се полази од претпоставке да су исподгодишњи ануитети у току првих k година по* a_1*, у току наредних k година по* a_1q *,..., у току посљедњих k година по* a_1q^{s-1} *новчаних јединица, гдје је s број циклуса (серија) у току n година.*

За сваки модел амортизације зајма приказана су три начина обрачуна и плаћања камате:

- *а) камата се обрачунава и плаћа годишње на бази релативне каматне стопе,*
- *b) камата се обрачунава и плаћа у исподгдишњим интервалима на бази конформне каматне стопе и*
- *c) камата се обрачунава и плаћа у исподгодишњим интервалима на бази релативне каматне стопе.*

[1] Економски факултет Универзитета у Бањој Луци, milivoj.krcmar@efbl.org

Кључне ријечи: *модели амортизације зајма, варијабилни исподгодишњи ануитети, релативна каматна стопа, конформна каматна стопа.*

Summary

This paper presents models of annuity which either increase or decrease a fixed factor q and which are paid m times in year. The payments (annuity) increase (decrease) in such a way that

a) *each payment in the year is equal but each payment in the next year is q times than the payment in previous years and*
b) *each payment in the k years is equal but each payment in the next k years is q times than the payment in previous k years.*

Keywords: *models of amortization of loan; variable annuity wich are paid m times in year; nominal annual rate of interest compounded m times in year; annual effective rate of interest*

Увод

Овдје се полази од претпоставке да се зајам амортизује у току н година по моделу варијабилних исподгодишњих декурзивних ануитета, уз каматну стопу која је фиксна за све вријеме амортизације зајма. Варијабилност ануитета се може изразити на безброј начина. Међутим, битно је да варијабилност ануитета кореспондира с варијабилношћу будућих прихода потенцијалних корисника зајма. (Крчмар, М., 2007) Такође је битно нагласити да се камата може обрачунавати и плаћати у годишњим и исподгодишњим интервалима.

1. Ануитети су у току године једнаки, а сваке сљедеће већи (мањи) у односу на претходну годину за *q* пута

У овом моделу амортизације зајма полази се од претпоставке да исподгодишњи ануитети (мјесечни, тромјесечни, ...) износе у првој години амортизације зајма по a_1, у другој по $a_1 q$, у трећој по $a_1 q^2$, ... , у n-тој по $a_1 q^{n-1}$ новчаних јединица, а да је номинална каматна стопа p.

Величина ануитета зависи од величине зајма, рока отплате, каматне стопе, модела амортизације и начина обрачуна и плаћања камате.

1.1. Камата се обрачунава и плаћа годишње на бази релативне каматне стопе

У овом случаји камата се обрачунава и плаћа на крају године на промијенљиве основице у току године (основице се из периода у период смањују у току године за износ ануитета) по релативној каматној стопи p/m (гдје је m број ануитета у току године) (Тркља, Б., 1978).

По принципу еквиваленције, зајам мора бити једнак дисконтованој вриједности свих ануитета. То ће, у овом моделу, бити:

$$K = a_1\left(m + \frac{p(m-1)}{200}\right)v + a_1 q\left(m + \frac{p(m-1)}{200}\right)v^2 + a_1 q^2\left(m + \frac{p(m-1)}{200}\right)v^3 +$$

$$+\ldots + a_1 q^{n-1}\left(m + \frac{p(m-1)}{200}\right)v^n$$

То ће, даље, бити:

$$K = a_1\left(m + \frac{p(m-1)}{200}\right)\left(v + qv^2 + q^2v^3 + \ldots + q^{n-1}v^n\right),$$

односно

$$K = a_1\left(m + \frac{p(m-1)}{200}\right)S,$$

гдје је

$$S = v + qv^2 + q^2v^3 + \ldots + q^{n-1}v^n$$

Када се ова једначина помножи са qv, и од полазне одузмемо добијену једначину, добије се:

$$S = \frac{v(1-q^n v^n)}{1-qv}$$

Ако се v замјени са $\frac{1}{r}$, добије се:

$$S = \frac{r^n - q^n}{r^n(r-q)}, \text{ за } r \neq q,$$

а ако је $r = q$, онда је

$$S = nv$$

Коначно, можемо написати да је

$$K = a_1\left(m + \frac{p(m-1)}{200}\right)\frac{r^n - q^n}{r^n(r-q)};\quad \text{за } r \neq q, \tag{1}$$

и $$K = a_1\left(m + \frac{p(m-1)}{200}\right)nv;\quad \text{за } r = q. \tag{1a}$$

1.2. Камата се обрачунава и плаћа у исподгодишњим интервалима на бази конформне каматне стопе

У овом случају камата се обрачунава и плаћа у исподгодишњим интервалима, дакле *m* пута у години, увијек на различиту основицу, на бази конформне каматне стопе.

По принципу еквиваленције, биће:

$$K = a_1\left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}} + \ldots + v^{\frac{m-1}{m}} + v\right) + a_1 q\left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}} + \ldots + v^{\frac{m-1}{m}} + v\right)v +$$

$$+ a_1 q^2\left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}} + \ldots + v^{\frac{m-1}{m}} + v\right)v^2 +$$

$$+ \ldots + a_1 q^{n-1}\left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}} + \ldots + v^{\frac{m-1}{m}} + v\right)v^{n-1}$$

То ће, даље, бити:

$$K = a_1\left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}} + \ldots + v^{\frac{m-1}{m}} + v\right)\left(1 + qv + q^2v^2 + \ldots + q^{n-1}v^{n-1}\right).$$

То се може написати као:

$$K = a_1 S_1 S_2,$$

гдје је

$$S_1 = v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}} + \ldots + v^{\frac{m-1}{m}} + v$$

Када се ова једначина помножи са $v^{\frac{1}{m}}$ и од полазне одузмемо добијену једначину, а v замјенимо са $1/r$, добије се:

$$S_1 = \frac{r-1}{r\left(r^{\frac{1}{m}} - 1\right)} \quad \text{и}$$

$$S_2 = 1 + qv + q^2v^2 + \ldots + q^{n-1}v^{n-1}.$$

Када се ова једначина помножи са qv и од полазне одузмемо добијену једначину, а v замјенимо са $\frac{1}{r}$, добије се:

$$S_2 = \frac{r(r^n - q^n)}{r^n(\mathrm{r} - \mathrm{q})}, \qquad \text{za } r \neq q,$$

а ако је $r = q$, онда је:

$$S_2 = n$$

Коначно, можемо написати да је:

$$K = a_1 \frac{r-1}{r^{\frac{1}{m}} - 1} \frac{\left(r^n - q^n\right)}{r^n\left(r-q\right)}; \text{ за } r \neq q \tag{2}$$

и $$K = na_1 \frac{r-1}{r\left(r^{\frac{1}{m}} - 1\right)}; \text{ за } r = q \tag{2a}$$

1.3. Камата се обрачунава и плаћа у испогодишњим интервалима на бази релативне каматне стопе

У овом случају камата се обрачунава и плаћа м пута годишње увијек на различите основице на бази релативне каматне стопе (p/m).

По принципу еквиваленције, то ће бити:

$$K = a_1\left(v_m + v_m^2 + v_m^3 + \ldots + v_m^{m-1} + v_m^m\right) + a_1 q\left(v_m + v_m^2 + v_m^3 + \ldots + v_m^{m-1} + v_m^m\right)v_m^m +$$

$$+ \ldots + a_1 q^2\left(v_m + v_m^2 + v_m^3 + \ldots + v_m^{m-1} + v_m^m\right)v_m^{2m} +$$

$$+ \ldots + a_1 q^{n-1}\left(v_m + v_m^2 + v_m^3 + \ldots + v_m^{m-1} + v_m^m\right)v_m^{mn-m}$$

То се, даље, може записати као:

$$K = a_1 \frac{r_m^m - 1}{r_m^m\left(r_m - 1\right)}\left(1 + qv_m^m + q^2 v_m^{2m} + \ldots + q^{n-1} v\right)$$

Ако са S означимо:

$$S = 1 + qv_m^m + q^2 v_m^{2m} + \ldots + q^{n-1} v_m^{mn-m}$$

Када ову једначину помножимо са qv_m^m и од полазне одузмемо добијену једначину, а v замијенимо са $1/r$, добићемо:

$$S = \frac{r_m^m(r_m^{mn} - q^n)}{r_m^{mn}(r_m^m - q)}$$

Коначно, можемо написати да је:

$$K = a_1 \frac{r_m^m - 1}{r_m^m (r_m - 1)} \frac{r_m^m (r_m^{mn} - q^n)}{r_m^{mn} (r_m^m - q)} \tag{3}$$

гдје је: $r_m = 1 + \frac{p/m}{100}$

$$v_m = \frac{1}{r_m}$$

2. Ануитети се мијењају циклично

Овдје се полази од претпоставке да су исподгодишњи ануитети у току првих *k* година по a_1, у току наредних *k* година по $a_1 q$,...., а у току посљедњих *k* година по $a_1 q^{s-1}$ новчаних јединица, гдје је *s* број циклуса односно серија у току *n* година ($n = ks$) (Arcones, M., 2009).

2.1. Камата се обрачунава и плаћа годишње на бази релативне каматне стопе

На бази претпоставке наведене под 1.1. може се директно написати, на бази принципа еквиваленције, да је

$$K = a_1 \left(m + \frac{p(m-1)}{200} \right) \frac{r^k - 1}{r^k (r-1)} + a_1 q \left(m + \frac{p(m-1)}{200} \right) \frac{r^k - 1}{r^k (r-1)} \frac{1}{r^k} +$$

$$+ a_1 q^2 \left(m + \frac{p(m-1)}{200} \right) \frac{r^k - 1}{r^k (r-1)} \frac{1}{r^{2k}} + \ldots + a_1 q^{s-1} \left(m + \frac{p(m-1)}{200} \right) \frac{r^k - 1}{r^k (r-1)} \frac{1}{r^{sk-k}}$$

То ће, даље, бити:

$$K = a_1 \left(m + \frac{p(m-1)}{200} \right) \frac{r^k - 1}{r^k (r-1)} \left(1 + q v^k + q^2 v^{2k} + \ldots + q^{s-1} v^{ks-k} \right).$$

Након неопходне трансформације овог израза, добије се:

$$K = a_1 \left(m + \frac{p(m-1)}{200} \right) \frac{r^k - 1}{r^k (r-1)} \frac{r^k \left(r^{ks} - q^s \right)}{r^{ks} \left(r^k - q \right)} =$$

$$K = a_1 \left(m + \frac{p(m-1)}{200} \right) \frac{r^k - 1}{r - 1} \frac{\left(r^{ks} - q^s \right)}{r^{ks} \left(r^k - q \right)} \tag{4}$$

2.2. Камата се обрачунава и плаћа у исподгодишњим интервалима на бази конформне каматне стопе

На бази напомена датих под 1.2. може се директно написати да је

$$K = a_1\left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}} + \ldots + v^{\frac{km-1}{m}} + v^{\frac{km}{m}}\right) + a_1 q\left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}} + \ldots + v^{\frac{km-1}{m}} + v^{k}\right)v^{k} +$$

$$+\, a_1 q^2\left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}} + \ldots + v^{\frac{km-1}{m}} + v^{k}\right)v^{2k} + \ldots +$$

$$+\, a_1 q^{s-1}\left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}} + \ldots + v^{\frac{m-1}{m}} + v^{k}\right)v^{ks-k}$$

То ће, даље, бити:

$$K = a_1\left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}} + \ldots + v^{\frac{km-1}{m}} + v^{k}\right)\left(1 + qv^{k} + q^2 v^{2k} + \ldots + q^{s-1}v^{ks-k}\right).$$

Након неопходних трансформација овог израза, добије се:

$$K = a_1 \frac{r^k - 1}{r^k\left(r^{\frac{1}{m}} - 1\right)} \; \frac{r^k\left(r^{ks} - q^s\right)}{r^{ks}\left(r^k - q\right)}, \quad \text{а то је}$$

$$K = a_1 \frac{r^k - 1}{r^{\frac{1}{m}} - 1} \; \frac{r^{ks} - q^s}{r^{ks}\left(r^k - q\right)}. \tag{5}$$

2.3. Камата се обрачунава и плаћа у исподгодишњим интервалима на бази релативне каматне стопе

На бази напомене под 1.3. може се директно написати да је

$$K = a_1\left(v_m + v_m^2 + v_m^3 + \ldots + v_m^{mk-1} + v_m^{mk}\right) + a_1 q\left(v_m + v_m^2 + v_m^3 + \ldots + v_m^{mk-1} + v_m^{mk}\right)v_m^{mk}$$

$$+ \ldots + a_1 q^2\left(v_m + v_m^2 + v_m^3 + \ldots + v_m^{mk-1} + v_m^{mk}\right)v_m^{2mk} +$$

$$+ \ldots + a_1 q^{s-1}\left(v_m + v_m^2 + v_m^3 + \ldots + v_m^{mk-1} + v_m^{mk}\right)v_m^{mks-mk}$$

То ће, даље, бити:

$$K = a_1\left(v_m + v_m^2 + v_m^3 + \ldots + v + v_m^{mk}\right)\left(1 + qv_m^{mk} + q^2 v_m^{2mk} + \ldots + q^{s-1}v_m^{mks-mk}\right)$$

Након неопходних трансформација овог израза, добије се да је

$$K = a_1 \frac{r_m^{mk} - 1}{r_m - 1} \; \frac{r_m^{mks} - q^s}{r_m^{mks}\left(r_m^{mk} - q\right)}. \tag{6}$$

Закључак

Циљ овог рада је да се презентују нови модели амортизације зајма када се ануитети плаћају у исподгодишњим интервалима, с тим да се ануитети мијењају годишње или у серијама (циклично). Битно је нагласити да варијабилност ануитета кореспондира са варијабилношћу будућих прихода потенцијалних корисника зајма. У раду су презентована два модела амортизације зајма исподгодишњим варијабилним ануитетима и то:

а) ануитети су у току године једнаки, а сваке сљедеће већи (мањи) у односу на предходну годину за q пута и

б) ануитети се мијењају циклично (у серијама).

За сваки модел амортизације зајма приказана су три начина обрачуна камате:

а) камата се обрачунава и плаћа годишње на бази релативне каматне стопе,

б) камата се обрачунава и плаћа у исподгодишњим интервалима на бази конформне каматне стопе и

в) камата се обрачунава и плаћа у исподгодишњим интервалима на бази релативне каматне стопе.

Сматрамо да је најкоректнији обрачун камате за исподгодишње интервале на бази конфомне каматне стопе.

Литература

Arcones, M. (2009), *Financial Mathematics*, New York, Spring,

Крчмар, М. (2007), Модели ануитета и ефекти њихове примјена, Сарајево, Свјетлост,

Тркља, Б. 1978, *Модели ануиᴛеᴛа и ефекᴛи њихове ӣримјене*, Сарајево, Свјетлост,