



[1] 2013 1[1]

AGG+ časopis za arhitekturu, građevinarstvo, geodeziju i srodne naučne oblasti
ACEG+ Journal for Architecture, Civil Engineering, Geodesy and other related scientific fields

248-256 **Pregledni naučni rad** | Review paper
UDK | UDC 624.073.8.046
DOI 10.7251/AGGPLUS1301248M
Rad primljen | Paper received 16/11/2013
Rad prihvaćen | Paper accepted 02/12/2013

Dijana Majstorović

Arhitektonsko-građevinski fakultet Univerziteta u Banjaluci, Vojvode Stepe Stepanovića 77/3, Banjaluka

Milorad Došenović

Integral Inženjering a. d., Trg Republike Srpske 8/XII, Banja Luka

Nataša Mrđa

Arhitektonsko-građevinski fakultet Univerziteta u Banjaluci, Vojvode Stepe Stepanovića 77/3, Banjaluka

Dragan Milašinović

Arhitektonsko-građevinski fakultet Univerziteta u Banjaluci, Vojvode Stepe Stepanovića 77/3, Banjaluka

ELASTO-PLASTIČNO
IZVIJANJE I OSTALI EFEKTI
MEMBRANSKIH SILA U
TANKOZIDNIM NOSAČIMA

ELASTIC-PLASTIC BUCKLING
AND OTHER EFFECTS OF
MEMBRANE FORCES IN
THIN-WALLED
STRUCTURES

Pregledni naučni rad

Review paper

Rad primljen | Paper accepted

02/12/2013

UDK | UDC

624.073.8.046

DOI

10.7251/AGGPLUS1301248M

Dijana Majstorović

Arhitektonsko-građevinski fakultet Univerziteta u Banjaluci, Vojvode Stepe Stepanovića 77/3, Banjaluka

Milorad Došenović

Integral Inženjering a. d., Trg Republike Srpske 8/XII Banja Luka

Nataša Mrđa

Arhitektonsko-građevinski fakultet Univerziteta u Banjaluci, Vojvode Stepe Stepanovića 77/3, Banjaluka

Dragan Milašinović

Arhitektonsko-građevinski fakultet Univerziteta u Banjaluci, Vojvode Stepe Stepanovića 77/3, Banjaluka

ELASTO-PLASTIČNO IZVIJANJE I OSTALI EFEKTI MEMBRANSKIH SILA U TANKOZIDNIM NOSAČIMA

APSTRAKT

Nelinearna elasto-plastična GBT (Generalised Beam Theory) se koristi uglavnom za analizu stabilnosti tankozidnih elemenata od čelika i aluminijuma. Analiza se sastoji od proračuna deformacije poprečnog presjeka (lokalna) i elemenata (globalna), i pokazala se kao vrlo efikasna za analizu lokalne i globalne stabilnosti tankozidnih hladnooblikovanih čeličnih (izotropnih) i kompozitnih (ortotropnih) elemenata. U ovom radu posebna pažnja je posvećena potrebi definisanja problema stabilnosti u zavisnosti od trenutnih modula elastičnosti. Potvrđivanje predložene GBT, njene jedinstvene karakteristike i mogućnosti ilustrovani su na primjeru ravnomjerno pritisnute pravougaone ploče od nerđajućeg čelika.

Ključne riječi: *generalisana teorija grede, plastična bifurkacija, tankozidni nosači, kritičan napon.*

ELASTIC-PLASTIC BUCKLING AND OTHER EFFECTS OF MEMBRANE FORCES IN THIN-WALLED STRUCTURES

ABSTRACT

A non-linear elastic-plastic Generalised Beam Theory (GBT) is formulated and used to investigate the buckling behaviour of aluminium and stainless steel thin-walled members. The analysis consists of calculation cross-section (local) and member (global) deformations and has been shown to be a very efficient tool for analyzing local and global stability behavior of thin-walled cold-formed steel (isotropic) and composite (orthotropic) members. In this work particular attention is paid to the need to define the stability problem in terms of instantaneous elastic moduli. Verification of the proposed GBT, its unique features and capabilities are illustrated by the example of uniformly compressed rectangular plate of stainless steel.

Keywords: *Generalised Beam Theory (GBT), plastic bifurcation, thin-walled structures, critical stress.*

1. UVOD

Upotreba elemenata od nerđajućeg čelika doživljava brz rast posljednjih godina, najviše zbog toga što pokazuje mnoge prednosti, kao što su: strukturalna efikasnost, otpornost na rđu, lako i jednostavno održavanje, poboljšana otpornost na vatru, prijatan izgled kao i konkurentna cijena. Sa druge strane, finansijska efikasnost i estetski zahtjevi često vode do izbora poprilično vitkih tankozidnih nosača, što ih čini veoma osjetljivim na lokalna i/ili globalna izvijanja. Naravno, efikasna (sigurna i ekonomski isplativa) rješenja se mogu postići samo ako su poznati i razumljivi svi fenomeni nestabilnosti, te tačno predviđeni.

Za razliku od ugljeničnih čelika, elasto-plastično ponašanje nerđajućeg čelika odlikuje: (1) nedostatak dobro definisanog napona tečenja i (2) izrazito nelinearna jednoaksijalna kriva napon-deformacija (i prije napona tečenja pri deformaciji od 0.2%), koja često uključuje i značajnu količinu deformacijskog ojačanja. Ova razlika u ponašanju podrazumijeva da fenomen izvijanja (bifurkacije), bilo lokalnog ili globalnog, često se javlja u nelinearnom (elasto-plastičnom) domenu. To znači da se moraju riješiti problemi koji uključuju plastičnu bifurkaciju elasto-plastične materije, koja je (1) u potpunosti regulisana aktivnim (trenutnim) modulima elastičnosti, i (2) u ravnomjerno pritisnutim elementima se uvijek odvija nakon elastičnog domena i sa porastom opterećenja [1,2]. Dakle, bifurkaciono opterećenje elasto-plastičnih dijelova može se odrediti izvođenjem analize stabilnosti njenih „nelinearno-elastičnih dijelova“.

Membranske sile u pločama i ljuskama mogu izvesti izvijanje. One djeluju u srednjoj ravni, a izvijanje se dešava kada konstrukcija pretvara membransku energiju u energiju deformacije savijanja. Tankozidne konstrukcije sa malom krutosti na savijanje, ali sa velikom membranskom krutosti, mogu biti kritične jer se u slučaju iznenadno velikih deformacija savijanja akumulirana energija otpušta izvijanjem. Kako bi se tačno analiziralo i lokalno (presjek) i globalno (element) ponašanje pri izvijanju tankozidnih elemenata od nerđajućeg čelika, praktično sve analize nelinearnosti moraju se izvršiti putem analize metodom konačnih elementa (MKE) ili metodom konačnih traka (MKT), usvajanjem mreža konačnih elemenata ili traka i korištenjem računarskih numeričkih metoda. Poštujući ovo, važno je spomenuti „paradoks izvijanja ploča“, kako što je objasnio Hatčinson (Hutchinson) [3] na slijedeći način: „Otkriveno je da su bifurkaciona opterećenja izračunata najjednostavnijom plastičnom teorijom, teorijom tečenja, precijenila opterećenja pri izvijanju ploča i ljuski dobijenih eksperimentalnim putem. Računanje na osnovu manje poštovane plastične teorije deformacije dalo je bolje slaganje sa rezultatima eksperimenata“. Takođe, kako će biti pokazano u ovom radu, reološko-dinamička analogija (RDA), koju je razvio Milašinović [4], numerički potvrđuje ovu tvrdnju.

GBT je razvijena od strane Šradta (Schradt) sredinom 1980-ih i kasnije dopunjena od strane Dejvisa (Davies) i saradnika, uglavnom za analizu linearne stabilnosti hladnooblikovanih čeličnih elemenata. Analiza se sastoji od proračuna deformacije poprečnog presjeka (lokalna) i elemenata (globalna), i pokazala se kao vrlo efikasna za analizu lokalne i globalne stabilnosti tankozidnih hladnooblikovanih čeličnih (izotropnih) i kompozitnih (ortotropnih) elemenata. GBT se pokazala kao prilično pogodno analitičko sredstvo za procjenjivanje lokalnog i globalnog ponašanja pri savijanju tankozidnih prizmatičnih elemenata. Treba naglasiti da je GBT usvojena kao važeća i često povoljna alternativa od potpuno numeričke MKE i numeričko-analitičke MKT analize.

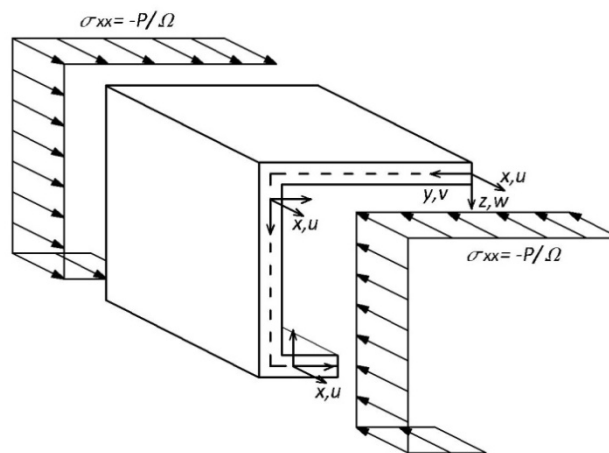
Cilj ovog rada je da prikaže kratak pregled formulacije GBT koja se može primijeniti za analizu ponašanja pri izvijanju otvorenih i zatvorenih tankozidnih nosača koji su napravljeni od nelinearno elasto-plastičnih materijala kao što su aluminijum ili nerđajući čelik. Dalje, pažnja je posvećena procjeni trenutnih modula elastičnosti prema teoriji tečenja, teoriji deformacije i reološko-dinamičkoj analogiji. Konačno, prezentovani su i diskutovani neki numerički rezultati, kako bi se testirala i ilustrovala primjena i sposobnost predložene GBT. Ovi rezultati bave se ravnomjerno pritisnutom pravougaonom pločom od nerđajućeg čelika.

2. GBT JEDNAČINE ZA ELASTO-PLASTIČNO PONAŠANJE MATERIJALA

2.1. FUNDAMENTALNE JEDNAČINE

2.1.1. Analiza poprečnog presjeka

Izvođenje analize poprečnog presjeka podrazumijeva prilično dugačak i relativno kompleksan niz operacija, i možemo je podijeliti na analizu otvorenih i analizu zatvorenih poprečnih presjeka. U slučaju otvorenih presjeka, deformacioni modovi su predstavljeni kao linearna kombinacija funkcije pomjeranja, koja potiče od podužnih (u) i poprečnih (w) pomjeranja u čvorovima presjeka (zadovoljena je Vlasova (Vlassov) hipoteza o nultoj vrijednosti deformacije smicanja u srednjoj ravni ploče) (Slika 1). Kod zatvorenih presjeka, osim navedenih funkcija pomjeranja, u linearnu kombinaciju ulaze i funkcije koje potiču od poprečnih pomjeranja (v) (uključena je i deformacija smicanja, tako da ne važi Vlasova hipoteza) [5, 6].



Slika 1. Tankozidna greda: geometrija i lokalne ose

2.1.2. Analiza elemenata

Na osnovu karakteristika poprečnog presjeka (modalnih mehaničkih i geometrijskih, dobijenih analizom poprečnog presjeka), dužine elementa i uslova oslanjanja na krajevima nosača, mogu se formirati GBT diferencijalne jednačine ravnoteže (jedna za deformacioni mod i druga za granične uslove) izražene u formi „funkcije amplituda“ koje definišu promjenu stepeni slobode poprečnog presjeka u podužnom pravcu. Ovim sistemom jednačina definisan je standardni problem svojstvenih vrijednosti i njegovim rješenjem, analitičkim ili numeričkim postupkom, dolazi se do bifurkacionih/kritičnih napona (eigenvalues) i oblika izvijanja (eigenfunctions).

2.1.3. Nelinearno-elastičan materijal

U slučaju nelinearno-elastičnog materijala potrebno je sprovesti obje analize, uglavnom zbog potrebe da se utvrdi trenutni modul elastičnosti. *Bifurkaciona analiza* podrazumijeva pronalaženje „susjednog stanja ravnoteže“. Ovakva konfiguracija se nalazi u neposrednoj blizini osnovnog napregnutog stanja i takođe zadovoljava neutralni uslov ravnoteže izražen u formi principa virtualnog rada:

$$\delta\dot{W} = \delta\dot{W}_E + \delta\dot{W}_I = 0 \tag{1}$$

gdje su $\delta\dot{W}_E$ i $\delta\dot{W}_I$ mjera spoljašnjeg i unutrašnjeg virtuelnog rada.

U slučaju kada je element izložen ravnomjernom pritisku $\sigma_{xx} = -P/\Omega$ (linijsko opterećenje pritiska P i površina poprečnog presjeka Ω), spoljašnji i unutrašnji virtualni rad su definisani sa:

$$\begin{aligned} \delta\dot{W}_E &= \int_V \sigma_{xx} \delta\dot{u}_{,x} dV = -\int_V \frac{P}{\Omega} \delta\dot{u}_{,x} dV, \\ \delta\dot{W}_I &= -\int_V (\sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}) \delta\dot{\epsilon}_{ij} dV = -\int_V \left(-\frac{P}{\Omega} \delta\dot{\epsilon}_{xx}^M + \dot{\sigma}_{ij} \delta\dot{\epsilon}_{ij} \right) dV, \end{aligned} \tag{2}$$

pri tome zarez označava diferencijaciju, σ_{ij} su komponente osnovnog tenzora napona ($\sigma_{xx} = -P/\Omega$ je jedina različita od nule), $\dot{\sigma}_{ij}$ komponenta tenzora napona povezana sa tenzorom deformacije $\dot{\epsilon}_{ij}$ preko trenutnog modula elastičnosti, $\delta\dot{\epsilon}_{ij}$ je varijacija tenzora deformacije, i varijacija membranske deformacije je definisana sa

$$\delta\dot{\epsilon}_{xx}^M = \delta\dot{u}_{,x} + \delta(\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2)/2 \tag{3}$$

Nakon zamjene (2) i (3) u (1), dobija se

$$\begin{aligned} \delta\dot{W} &= -\int_V \frac{P}{\Omega} \delta\dot{u}_{,x} dV - \int_V \left(-\frac{P}{\Omega} \frac{\delta(\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2)}{2} + \dot{\sigma}_{ij} \delta\dot{\epsilon}_{ij} \right) dV \\ &= \int_V \left(\frac{P}{\Omega} \frac{\delta(\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2)}{2} - \dot{\sigma}_{ij} \delta\dot{\epsilon}_{ij} \right) dV = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

izraz u formi virtualnog rada, iz kojeg se definiše stanje ravnoteže nelinearno-elastičnog elementa.

Inkrementalna veza napon-deformacija, u slučaju elementa opterećenog jednoaksijalnim pritiskom, data je sa:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{xx}^B \\ \dot{\sigma}_{yy}^B \\ \dot{\sigma}_{xy}^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{12} & 0 \\ \dot{C}_{21} & \dot{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{C}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx}^B \\ \dot{\epsilon}_{yy}^B \\ \dot{\epsilon}_{xy}^B \end{Bmatrix}, \quad \dot{\sigma}_{xx}^M = E_T \dot{\epsilon}_{xx}^M \tag{5}$$

gdje su \hat{C}_{ij} i E_T trenutni moduli elastičnosti i uzdužni (jednoaksijalni) tangenti modul, respektivno, a $(^B)$ i $(^M)$ označavaju savijanje i membransko naprežanje i deformaciju.

Zamjenom izraza (5) u (4) dolazi se do GBT jednačina ravnoteže i graničnih uslova (problemi svojstveni vrijednosti)

$$\mathbf{C}\{\dot{\phi}_{,xxx}\} - \mathbf{D}\{\dot{\phi}_{,xx}\} + \mathbf{B}\{\dot{\phi}\} + \mathbf{P}\mathbf{X}^1\{\dot{\phi}_{,xx}\} = \{0\} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \{\delta\dot{\phi}_{,x}\}^T (\mathbf{C}\{\dot{\phi}_{,xx}\} + \mathbf{D}^2\{\dot{\phi}\}) \Big|_0^L &= 0, \\ \{\delta\dot{\phi}\}^T (\mathbf{C}\{\dot{\phi}_{,xxx}\} + (\mathbf{D}^2 - \mathbf{D}^1 + \mathbf{P}\mathbf{X}^1)\{\dot{\phi}_{,x}\}) \Big|_0^L &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

pri čemu su komponente vektora $\{\dot{\phi}\}$ funkcije koje definišu amplitude deformacionih modova i GBT matrice \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{B} i \mathbf{X}^1 (geometrijske matrice za ravnomjerni pritisak) date sa

$$\begin{aligned} C_{ij} &= C_{ij}^1 + C_{ij}^2 = \int_s t E_T u_i u_j dy + \int_s \frac{t^3}{12} \dot{E}_{11} w_i w_j dy, \\ D_{ij} &= D_{ij}^1 - D_{ij}^2 - D_{ij}^3 = \int_s \frac{t^3}{6} \dot{E}_{33} w_{i,y} w_{j,y} dy - \int_s \frac{t^3}{12} \dot{E}_{12} (w_i w_{j,yy} + w_{i,yy} w_j) dy, \\ B_{ij} &= \int_s \frac{t^3}{12} \dot{E}_{22} w_{i,yy} w_{j,yy} dy, \quad X_{ij}^1 = \int_s \frac{t^3}{\Omega} (v_i v_j + w_i w_j) dy, \end{aligned} \quad (8)$$

integracijom duž srednje linije poprečnog presjeka (zavisne od opterećenja preko trenutnog modula elastičnosti).

Za povezane elemente čiji se krajevi mogu slobodno izvijati, kombinacija amplituda deformacionih modova data je funkcijom

$$\dot{\phi}_k = \bar{\phi}_k \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (9)$$

koja daje tačna rješenja svojstvenih problema. Vrijednosti $\bar{\phi}_k$ su nepoznate (pojedinačni faktori učešća deformacionih modova u modu izvijanja elementa), m je broj podužnih polutalasa izvijanja i L je dužina elementa. Ako posmatramo samo jedan mod izvijanja, napon izvijanja na osnovu izraza (6) i (9) je dat sa

$$\sigma_{cr,k} = \frac{1}{X_{kk}^1 \Omega} \left[C_{kk} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + D_{kk} + B_{kk} \left(\frac{L}{m\pi}\right)^2 \right] \quad (10)$$

2.2. KONSTITUTIVNE VEZE

2.2.1. Elastično rješenje

Konstitutivna matrica u slučaju elastičnih deformacija, po Sent Venan-Kirchofovom (St. Venant-Kirchhoff) materijalnom zakonu između napona i deformacije, za ravno stanje napona je [4]:

$$C_t = \begin{bmatrix} \frac{E_0}{1-\nu^2} & \frac{\nu E_0}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E_0}{1-\nu^2} & \frac{E_0}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad (11)$$

gdje su E_T i G Jungov (Young) modul i modul smicanja, a ν Poasonov (Poisson) koeficijent.

2.2.2. Teorija tečenja

U slučaju jednoaksijalnog napona, izrazi za \dot{C}_{ij} po teoriji tečenja su dati sa [7]:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{11} &= \frac{(\Lambda_T + 3)E_0}{(5 - 4\nu)\Lambda_T - (1 - 2\nu)^2} \\ \dot{C}_{22} &= \frac{4\Lambda_T E_0}{(5 - 4\nu)\Lambda_T - (1 - 2\nu)^2} \\ \dot{C}_{12} = \dot{C}_{21} &= \frac{(4\nu + 2\Lambda_T - 2)E_0}{(5 - 4\nu)\Lambda_T - (1 - 2\nu)^2} \\ \dot{C}_{33} = 2G &= \frac{E_0}{1 + \nu} \end{aligned} \quad (12)$$

2.2.3. Teorija deformacije

Trenutni moduli elastičnosti u teoriji deformacije imaju slijedeći oblik [7]:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{11} &= \frac{(\Lambda_T + 3\Lambda_S)E_0}{(2 + 3\Lambda_S - 4\nu)\Lambda_T - (1 - 2\nu)^2} \\ \dot{C}_{22} &= \frac{4\Lambda_T E_0}{(2 + 3\Lambda_S - 4\nu)\Lambda_T - (1 - 2\nu)^2} \\ \dot{C}_{12} = \dot{C}_{21} &= \frac{(4\nu + 2\Lambda_T - 2)E_0}{(2 + 3\Lambda_S - 4\nu)\Lambda_T - (1 - 2\nu)^2} \\ \dot{C}_{33} &= \frac{2E_0}{2\nu - 1 + 3\Lambda_S} \end{aligned} \quad (13)$$

gdje je $\Lambda_T = E_0 / E_T$ i $\Lambda_S = E_0 / E_S$.

U zavisnosti od veličine napona koji djeluje na ploču mijenjaju se tangentni i sekantni modul elastičnosti E_T i E_S , a samim tim i Λ_T i Λ_S . Vrijednost tangentnog i sekantnog modula, u zavisnosti od vrijednosti napona kojim je ploča pritisnuta, dobijaju se sa odgovarajuće napon-deformacija krive koja opisuje ponašanje materijala. U ovom radu je korištena Ramberg-Osgudova (Ramberg-Osgood) kriva [8]:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + 0.002 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} \right)^n \quad (14)$$

gdje je $\sigma_{0.2}$ napon plastičnog tečenja za deformaciju 0.2%, dok je n parametar deformacijskog ojačanja materijala.

Elastično rješenje se može takođe dobiti iz navedenih teorija plastičnosti stavljajući $E_T = E_S = E_0$, odnosno $\Lambda_T = \Lambda_S = 1$.

2.2.4. Reološka teorija

Konstitutivna matrica u slučaju reološko-dinamičke teorije, dobijena iz matrice ravnog stanja napona, ima slijedeći oblik [4]:

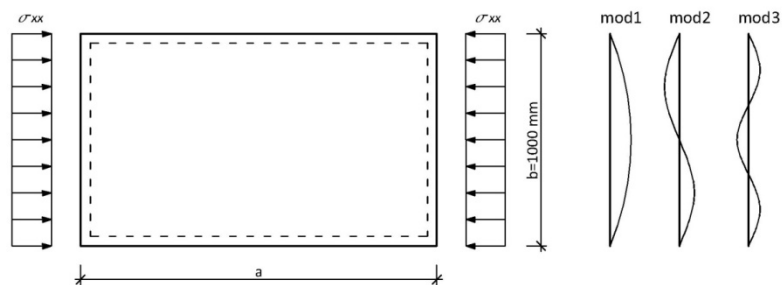
$$C_t = \begin{bmatrix} \frac{E_R}{1-\nu^2} & \frac{\nu E_R}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E_R}{1-\nu^2} & \frac{E_0}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_0}{1+\nu} \end{bmatrix} \quad (15)$$

pri čemu je E_R reološko-dinamički modul elastičnosti, a ϕ^* reološko-dinamički parametar materijala. Reološko-dinamički modul elastičnosti se dobija na osnovu izraza:

$$E_R = \frac{3E_0}{(5-4\nu)+2(1+\nu)\phi^*} \quad (16)$$

3. ILUSTRATIVNI PRIMJER

Primjer pokazuje elasto-plastičnu pravougaonu ploču slobodno oslonjenu duž svih ivica, dužine a i širine b , pritisnuta ravnomjernim pritiskom u podužnom pravcu (Slika 2). S obzirom na to da su pomjeranja u y pravcu na bočnim stranama ($y = 0$ i $y = b$) spriječena, u ploči se javljaju i poprečni membranski naponi σ_{yy}^M .



Slika 2. Geometrija pravougaone ploče i GBT deformacioni modovi

Problem gubitka stabilnosti pomenute ploče istraživali su Handelman (Handelman) i Prager (Prager), te postavili analitičko rješenje [9]:

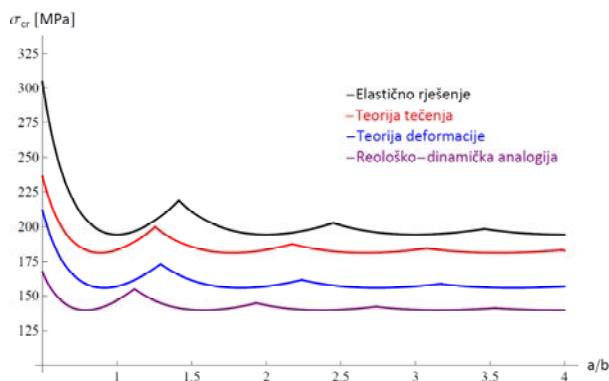
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 m^2}{t a^2} \left[K_{22} \left(\frac{a^2}{m^2 b^2} + \frac{K_{12}}{K_{22}} \right)^2 + K_{11} - \frac{K_{12}^2}{K_{22}} \right] \quad (17)$$

$$K_{11} = \frac{t^3}{12} \dot{C}_{11}, K_{22} = \frac{t^3}{12} \dot{C}_{22}, K_{12} = \frac{t^3}{12} [\dot{C}_{12} + \dot{C}_{33}] \quad (18)$$

gdje je t debljina ploče i m broj uzdužnih polu-talasa.

Rezultati prikazani u primjeru odnose se na ploču slijedećih geometrijskih i materijalnih karakteristika: $t = 16\text{mm}$, $b = 1000\text{mm}$, $E_0 = 210\text{GPa}$, $\sigma_y = 311.609\text{MPa}$, $\nu = 0.3$ i $n = 5$.

Na slici 3 prikazane su vrijednosti kritičnih napona σ_{cr} dobijenih analitički po četiri teorije: a) linaerno-elastična, b) elasto-plastična teorija deformacije, c) elasto-plastična teorija tečenja i d) elasto-plastična reološko-dinamička teorija.



Slika 3. Vrijednost kritičnih napona pravougaone ploče

Posmatrajući rezultate dobijene prikazanim teorijama, možemo uočiti da su razlike između vrijednosti kritičnih napona veće za kraće ploče, tj. za ploče sa odnosom strana $a/b < 1$. Razlike koje se pojavljuju po primijenjenim teorijama opravdavaju ovu analizu u smislu izbora neke od metoda u konkretnom primjeru.

4. ZAKLJUČAK

Pošto je uzet u obzir Hatčinsonov „paradoks izvijanja ploča“ [3], u ovom radu je pokazano da bifurkaciona opterećenja izračunata najjednostavnijom plastičnom teorijom, poznatom kao teorija tečenja, precjenjuju opterećenja pri izvijanju ploča približavajući ih elastičnom rješenju. Proračuni na osnovu manje poštovane plastične teorije deformacije kao i primjenom reološko-dinamičke analogije (RDA), koju je razvio Milašinović [4], daju približna rješenja koja se bolje slažu sa rezultatima eksperimenata.

5. BIBLIOGRAFIJA

- [1] R. Hill, "A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids," *J Mech Phys Solids*, 6: 236–49, 1958.
- [2] V. Tvergaard, A. Needleman, "On the foundations of plastic buckling," in *Developments in thin-walled structures-1*, Rhodes J. and Walker AC., eds. London: Elsevier Applied Science, pp. 205–33, 1982.
- [3] J. W. Hutchinson, "Plastic buckling," in *Advances in Applied Mechanics*, Yih CS, ed., New York: Academic Press, vol. 4, pp. 67–144, 1974.
- [4] D. D. Milašinović, *The Finite Strip Method in Computational Mechanics*. Subotica, Budapest, Belgrade: Faculties of Civil Engineering: University of Novi Sad, Technical University of Budapest and University of Belgrade, 1997.
- [5] R. Gonçalves and D. Camotim, "GBT local and Global Buckling Analysis of Aluminium and Stainless Steel Columns," *Computers and Structures*, vol. 82, pp. 1473–1484, 2004.
- [6] N. Silvestre and D. Camotim, "Nonlinear Generalized Beam Theory for Cold-Formed Steel members." *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 3, No.4 2003, pp. 461–490.
- [7] R. Gonçalves, P. Le Grogneć and D. Camotim, "GBT-based semi-analytical solutions for the plastic bifurcations of thin-walled members," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, 2010, pp. 34-50.
- [8] D. Camotim and R. Gonçalves, "GBT-based local and global buckling analysis of C-section and RHS stainless steel columns," 2003.
- [9] W. Ramberg and W. R. Osgood, "Description of Stress-strain Curves by Three Parameters," *NACA Technical Note*, No. 902, pp. 1–29, 1943.
- [10] G. H. Handelman and W. Prager, "Plastic Buckling of a rectangular Plate Under Edge Thrust," *NACA Technical Note*, No. 1530, pp. 1–99, 1948.

ΑΓ
Γ+