

OBLIK I PROSTOR U RANOM UČENJU MATEMATIKE

*Neva Slani, dr.sc., Učiteljski fakultet Sveučilišta u Rijeci²²⁴
Teodora Tomić, mag. prim. educ., Dječji vrtić „Potok“, Rijeka²²⁵*

Sažetak: Rad daje pregled dijela teorija i radova značajnih za promišljanje nastave oblika i prostora, posebice u ranom učenju. Pritom upućuje na nove mogućnosti koje mogu mijenjati krajolik obrazovanja geometrije. Cilj je suvremeniji, kvalitetniji kurikulum i nastava oblika i prostora, s boljim postignućima učenika i manje prouzrokovane tjeskobe u učenika. Tu spadaju: istraživanje shvaćanja oblika i prostora, njegove povezanosti sa školskom matematikom i geometrijom, važnost geometrije preslikavanja u nastavnom planu uključujući simetriju i druge izometrije, funkcija crtanja, modeliranja, igre, opisivanja u konstrukciji geometrijskog znanja, uloga digitalnih tehnologija i mogućnost proširenja geometrije osnovne škole od njezinog tipičnog naglaska na rječniku do rada na sastavljanju, rastavljanju, razvrstavanju, uspoređivanju i mentalnom upravljanju dvodimenzionalnim i trodimenzionalnim figurama. Promjena pristupa u poučavanju geometrije kompatibilna je s naglaskom na konstruktivistički pristup u poučavanju i kreiranju kurikula.

Ključne riječi: oblici, geometrijsko mišljenje, transformacije, manipulacija, vizualizacija

Uvod

Matematika se kao znanost i nastavni predmet nerijetko smatra frustrirajućom. Uobičajen je to doživljaj matematike čiju su utemeljenost pokazala mnoga znanstvena ispitivanja osjećaja stresa i nelagode u odnosu na matematički test, pa i samo učenje matematike, kao primjerice Gough (1954) ili Hembree (1990). Ispitivanja su se u najvećoj mjeri odnosila na uzrast studenata i srednjoškolaca, no ona novija ukazuju da je takav osjećaj raširen i među mlađom populacijom, čak u razrednoj nastavi (Witt, 2012). Upravo Witt (2012) osim uobičajenog ispitivanja tjeskobe kao posljedice loše matematičke izvedbe pokazuje da loša matematička izvedba može biti posljedica tjeskobe, s obzirom da ista djeluje na kratkoročno pamćenje. Dakle, odnos to dvoje je dvosmjern i kompleksan. S druge strane, matematičku tjeskobu može pobuditi i samo prikazivanje podataka znamenkama (Witt, 2012). Veća uspješnost u matematici, među ostalim bolji rezultati testova i druge pozitivne povratne informacije svakako smanjuju navedeni osjećaj tjeskobe (Hembree, 1990). Smanjiti tjeskobu i povećati uspješnost učenika u matematici može se sagledati i pokušati na više načina – utjecanjem na nastavnike povećavajući njihovu spremnost i predavačke vještine, utjecanjem na roditelje koji će pozitivno utjecati na djecu, pogotovo u mlađem uzrastu, te utjecanjem na same učenike (Wang, 2021). U slučaju nezadovoljavajućih rezultata na nacionalnom nivou, ili naprosto potrebe za poboljšanjem, očita je mjera izmjena nacionalnog kurikula za predmet Matematika. Naravno, nisu to jedine mjere, mentalno zdravlje učenika i motivacija za rad mogu se popravljati i mikropauzama, meditacijama i sličnim aktivnostima, neovisno o specifičnostima predmeta, konkretno matematike. Jenifer, Rozek, Levine i Beilock (2022) najnovijim istraživanjem pokazuju da učenici koji osjećaju tjeskobu od

²²⁴ neva.slani@uniri.hr

²²⁵ teodorat21@gmail.com

matematike sami pribjegavaju neefikasnim metodama učenja i vježbanja, primjerice ponavljaju sheme učeći ih napamet, izbjegavaju problemske zadatke i slično, čime se dodatno zapetljavaju u magični krug tjeskobe i loših matematičkih rezultata.

Veza izbjegavanja problemskih zadataka i tjeskobe spram matematike može se uočiti i u području geometrije (Sunardi, Yudianto, Susanto, Kurniati, i Dwi Cahyo, 2019; Soewardini, Sukrisno i Meilantifa, 2019) – problemski zadaci iz geometrije nisu intuitivniji od drugih, dapače, često zahtijevaju veliki nivo formalnosti i matematičke strogosti. Studenti učiteljskih studija sveučilišta u Córdoba u Gutiérrez-Rubio, León-Mantero, Maz-Machado i Madrid-Martín (2020) ispitani su o njihovim stavovima prema važnosti i razlozima podučavanja geometrije. Također, iskazali su subjektivni osjećaj vlastite matematičke anksioznosti. Istraživanje je pokazalo da je većina ispitanika istaknula važnost geometrije zbog razvijanja sposobnosti vizualnog karaktera kao što su prostorni zor, prepoznavanje oblika i povezivanje s oblicima iz svakodnevnice, dok ih je manje istaknulo važnost u razvoju problemskog i logičkog mišljenja. Studenti s nekim oblikom matematičke tjeskobe više su naglasili proceduralne aspekte učenja geometrije i važnost razlikovanja prostornih i ravninskih oblika te računanja udaljenosti, površina i volumena. To znači da će vjerojatno ti studenti naglašeno poučavati geometriju proceduralnim načinom. Studenti koji su iskazali da nemaju osjećaj tjeskobe spram matematike značajno su češće istaknuli da geometrija potiče razvoj prostornog zora, pomaže u rješavanju svakodnevnih problema te je sveprisutna u našim životima.

Geometrija, odnosno područja domena *Oblik i prostor* i *Mjerenja* prema hrvatskom nacionalnom Kurikulumom za nastavni predmet Matematika usvojenom 2019. godine, uz aritmetiku jedna je od dvije osnovne grane matematike koje su povijesno inicirale razvoj same matematike. Razvoji tih grana u Starome svijetu pak vezani su uz prelazak na sjedalački način života i poljodjelstvo, potrebu za preciznim mjerenjima radi jasnih određivanja granica vlasništva, pravednijeg oporezivanja i većih mogućnosti trgovine. Dug je put bio od prvih razmišljanja o oblicima i njihovim veličinama do prve aksiomatski zasnovane matematičke teorije, antologijskog Euklidovog djela *Elementi*. Gotovo jednako dugo to je djelo bilo najvažniji izvor geometrijskog znanja te najvažniji smjerokaz za podučavanje geometrije.

Metode, osnovne smjernice i ideje u poučavanju geometrije predmetom su intenzivnog proučavanja od druge polovice 20. stoljeća do danas. Te ideje, u najvećoj se mjeri radi o konstruktivističkom pristupu, trebale su utjecati i utječu na nacionalne matematičke kurikule. U hrvatskom Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika (2019) došlo je do nekih poboljšanja u pristupu geometriji, ali i smanjenja vremena i prostora posvećenog geometriji. Umjesto isticanja (geometrijskih) koncepata i njihovog povezivanja u nastavi Matematike, često se ona svede na rješavanje rutinskih zadataka, u ovom slučaju iz geometrije (Glasnović Gracin, Kuzle, 2019). Glasnović Gracin i Kuzle ističu potrebu analize različitih nacionalnih kurikula. Tako ćemo bolje sagledati dobro i loše i vidjeti koliko smo se s kurikulumom uspjeli približiti konstruktivističkom pristupu poučavanja, te ugrađivanju fundamentalnih, ili velikih ideja u tkivo školske geometrije. Pritom moramo imati na umu svu aktualnost geometrije, njezine važnosti u svakodnevnici – osim „klasičnih“ primjera svih inženjerskih struka te vizualnih umjetnosti, dovoljno je da primjerice osvijestimo koliko su sveprisutni GPS, odnosno globalni navigacijski sustavi, te GIS, odnosno geografski informacijski sustavi. Također, trebamo se vratiti na odnos matematike i našeg mentalnog znanja, te se podsjetiti da kvalitetna nastava i matematičko znanje itekako podižu kvalitetu života i doprinose mentalnom zdravlju (Zios i Kirchgasser, 2021).

Cilj rada je postaviti osnove za daljnja istraživanja unapređivanja kurikuluma i nastavne prakse domene *Oblika* i *prostora*, u smislu razvoja i povezivanja koncepata oblika i prostora, pozitivnog utjecaja takve nastavne prakse na učenička postignuća i cjeloviti psihofizički razvoj učenika.

Oblik i prostor u nastavnom kurikulumu

Prostor i oblik prirodno su mjesto i sredstvo za razvijanje intelektualnih, društvenih, estetskih, stvaralačkih, moralnih, tjelesnih i drugih sposobnosti, praktičnih vještina i odlika osobnosti. To su ujedno temeljni cijevi i zadaće usmjerene na razvoj učenika određene hrvatskim nacionalnim Kurikulumom za nastavni predmet Matematika usvojenom 2019. godine. Putem učenja sadržaja unutar domene *Oblik* i *prostor* i interakcijom s ostalim domenama te matematičkim argumentiranjem prostornih veza, rabeći prostorni zor i modeliranje, učenici pronalaze primjenu matematičkih rješenja

u različitim životnim situacijama. Prepoznaju ravninske i prostorne oblike i njihova svojstva u svakodnevnome okruženju te ih upotrebljavaju za opis i analizu svijeta oko sebe. Putem shvaćanja prostora, oblika u prostoru, oblika likova i tijela, te njihovih odnosa u prostoru, učenici grade temelj za rješavanje problema, kako u matematici tako i u ostalim predmetima, i konačno, u životu. Pojmovi oblika i prostora iz ovog rada pripadaju geometriji, posebnoj grani matematike koja se bavi oblicima u prostoru, njihovim veličinama i odnosima među njima.

Da bismo odgovorili na važna pitanja: Kako i zašto poučavati geometriju? Koje metode i oblike poučavanja koristiti? Koliko geometrijskih sadržaja je uopće potrebno u nastavi matematike? U kojoj je mjeri potrebna korelacija s drugim školskim predmetima? prvo se trebamo zapitati: Što želimo postići nastavom geometrije? S kakvim sposobnostima i predznanjima dolaze naši učenici u školu? Koje kvalitete kod učenika želimo razviti (a uključuju razvijanje matematičkog mišljenja, formiranje osobnosti, razvijanje kreativnosti i stjecanje praktičnih znanja i osposobljavanje za primjenu geometrije u svakodnevnom životu)?

Ako se učeničkom radu pristupa problemski i istraživački razvija se kod učenika logičko zaključivanje, analiziranje i sistematiziranje. Rješavanje problema jedan od temelja učenja matematike. Razvijanjem prostornog zora potiče se važna sposobnost vizualnog predočavanja apstraktnih sadržaja, a time i specifičan oblik rješavanja problema. Učenjem geometrije razvijamo sposobnosti vizualizacije, posebno deduktivno zaključivanje i obrazlaganje te sposobnost dokazivanja, kritičko mišljenje, intuiciju, percepciju i maštu (Jones, 2002). Time se ujedno olakšava i rješavanje algebarskih i aritmetičkih problema te razvija matematičke kreativnosti i kreativnosti. Geometrija tako igra ključnu ulogu u učenju drugih područja matematike, ali i ostalih predmeta. Na primjer, koncepti razlomaka povezani su s geometrijom, a pomoću njih možemo objasniti i glazbu (usporediti Tymoczko, 2011). Pomoću geometrije možemo promatrati odnose ulaznih i izlaznih podataka, odnosno uspoređivati grafove funkcija i grafičke prikaze podataka u statistici. Omjeri i razmjeri direktno su povezani s geometrijskim konceptima sličnosti i, naravno, mjerenja (Jones, 2002). Geometrija pruža kulturološki i povijesno bogat kontekst unutar kojeg se može poučavati matematika te doprinijeti, osim intelektualnom, također i duhovnom, moralnom, društvenom i kulturnom razvoju učenika (Jones, 2002). Dalje, geometrija je bogat izvor mogućnosti za razvijanje ideje dokazivanja. Vrijedno je naglasiti da vizualne slike, među njima i one kojima se može manipulirati na ekranu računala, pozivaju studente na promatranje i pretpostavke generalizacije. Dokazivanje pretpostavki zahtijeva od učenika da razumiju kako su promatrane slike povezane jedna s drugom i povezane s temeljnim „građevnim blokovima“. Razvijati razumijevanje povezanosti prostornih pojava i primjenjivati to razumijevanje u interpretaciji smisla nove situacije i rješavanju problema mora biti dio obrazovnog iskustva svih učenika. Manipuliranje slikama u glavi može potaknuti samopouzdanje i razviti intuitivno razumijevanje prostornih situacija. Dijeljenje osobnih vizualnih slika može pomoći razvijanju komunikacijskih vještina, kao i omogućavanju učenicima da vide da često postoji mnogo načina tumačenja slike ili pismenog ili govornog opisa (Jones, 2002).

Oblik je odnos krivih i ravnih površina u vanjskom izgledu, reljef, vidljiva uobličena dijelova, konfiguracija, način na koji nešto percipiramo, a može biti obris predmeta, tijela ili osobe. Oblik objekta smještenog u nekom prostoru odnosi se na dio prostora koji taj objekt zauzima, a koji je određen njegovom vanjskom granicom — izdvojeno od ostalih aspekata toga objekta, poput boje, sadržaja ili tvari od koje je građen, ili njegova položaja i orijentacije u prostoru i veličine. Jednostavne oblike moguće je opisati geometrijski kao točke, pravce, krivulje, ravnine, likove, tijela itd. Oblici koji se pojavljuju u fizičkome svijetu obično su poprilično složeni; mogu biti proizvoljno zakrivljeni, kad su predmet diferencijalne geometrije, ili fraktalni, kao kod biljaka i obalnih crta. Nadalje, oblik je osnovni konstrukt prilikom kognitivnog shvaćanja geometrije, ali i poimanja svijeta općenito. Na primjer, mala su djeca u jednom istraživanju kategorizirala objekte samo po svojstvima oblika (Jones, 2002). Kada uče imena objekata, također ih mentalno povezuju s oblicima. O oblicima u nižim razredima osnovne škole posredno i neposredno učimo kroz sve nastavne predmete, što je vidljivo iz predmetnih kurikula, te razgovaramo i opisujemo ih.

Oblici se nužno nalaze u prostoru. Kada je čovjek počeo razvijati svijest, započelo je i njegovo shvaćanje prostora u kojem postoji. U početku ljudske povijesti to shvaćanje je bilo ograničeno na onaj prostor u kojem se čovjek kretao, lovio i živio. Tijekom vremena spoznaja o prostoru se proširivala, prije svega u čovjekovoj svijesti. Euklidski prostor koji se često spominje u matematici je

najjednostavnije rečeno, onaj prostor koji intuitivno svakodnevno zamišljamo (Merzbach i Boyer, 2011), odnosno, prostor u kojem primjenjujemo aksiome i postulate euklidskog prostora (Britannica).

U radu se ispituje razvoj spoznaje prostora djeteta od predškolske dobi i mogućnost proširivanja te spoznaje te geometrijskog mišljenja i prostornog zora tijekom nastavnog procesa. Prostorni zor intuitivni je osjećaj za oblike i odnose među njima, a zajedno s geometrijskim rasuđivanjem razvija sposobnost misaone predodžbe objekta i prostornih odnosa (Odluka o donošenju kurikulumu za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, 2019). Unutar nastavnog predmeta Priroda i društvo već u drugom razredu učenik uspoređuje organiziranost različitih zajednica i prostora dajući primjere iz neposrednoga okružja te se snalazi u prostoru, izrađuje, analizira i provjerava skicu kretanja (Odluka o donošenju kurikulumu za nastavni predmet Priroda i društvo za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, 2019) za što je potrebno znanje o prostoru, a može i poslužiti kao podloga za učenje geometrije. U tjelesnoj i zdravstvenoj kulturi, na primjer, možemo se služiti raznim igrama gdje prostor označavamo poljima, dok u likovnoj kulturi učenik nužno stvara u prostoru (Clements i Battista, 1992).

Jean Piaget i Bärbel Inhelder autori su mnogih radova i tvorcji vjerojatno najutjecajnije teorije kognitivnog razvoja, a unutar toga i one (Piaget i Inhelder, 1956) o dječjoj koncepciji prostora. Prikazi prostora stvaraju se kroz progresivnu organizaciju djetetovih motoričkih i internaliziranih radnji, što rezultira operativnim sustavima. Reprerentacija prostora, dakle, nije perceptivno očitavanje prostornog okruženja, već je izgrađena iz prethodnih aktivnih manipulacija tim okolišem. Progresivna organizacija geometrijskih ideja slijedi određeni redoslijed. Dijete prvo spoznaje topološke odnose (npr. povezanost, zatvorenost i kontinuitet), a kasnije projektivne (uglatost, ortogonalnost, oblost) i naposljetku euklidske (kutnost, paralelnost i udaljenost) odnose. To je nazvano tezom topološke primarnosti. Piaget i Inhelder tvrde da je percepcijski prostor konstruiran u senzomotoričkom razdoblju, dakle približno do druge, treće godine života. Razvoj percepcijskog prostora prednjači razvoju konceptualnog, tako što njegov razvoj također utjelovljuje tezu topološke primarnosti i on je također konstruiran, to jest, ne postoji od samog početka razvoja. Znanje o spoznavanju oblika i prostora dodirom te stvaranju slike oblika može nam poslužiti da osmislimo aktivnost u razredu gdje će djeca zatvorenih očiju opipavati predmete i opisivati ih. Budući da je crtanje djelo koje utjelovljuje shvaćanje konceptualnog prostora, a ne percepcije, Piaget i Inhelder tvrde da su netočni crteži odraz neadekvatnosti mentalnih alata za prostornu reprerentaciju (doista, nesposobnost male djece da nacrtaju kopiju čak i jednostavnih oblika uzima se kao pokazatelj da je koordinacija radnji, a ne pasivna percepcija, temelj temelja konceptualnog razvoja prostora). Opet, tvrde i da nacrtane kopije geometrijskih oblika prvo predstavljaju topološka obilježja. Na primjer, u dobi od oko 3. godine krug se crta kao nepravilna zatvorena krivulja, a kvadrati i trokuti se ne razlikuju od krugova. Iako djeca ne razlikuju ravne i zakrivljene figure, ispravno prikazuju topološka svojstva (npr. zatvorene staze s malim zatvorenim stazama unutar njih, na njima ili izvan njih). Netočnosti u crtanju zato bi se mogle pripisati motoričkim poteškoćama. Međutim Piaget i Inhelder pružaju protuprimjere, poput djeteta koje je moglo crtati bor s granama pod pravim kutom, ali ne i kvadrat. Oko 4. godine dolazi do progresivne diferencijacije euklidskih oblika. Kriterij za ovu fazu uspješna je reprodukcija kvadrata ili pravokutnika. Euklidski odnosi, poput kuta i nagiba, razvijaju se, no sporo. Tek s oko 6-7 godina svi su problemi prevladani (Clements i Battista, 1992).

Prema Piagetu i Inhelder razlika između topoloških i projektivnih ili euklidskih odnosa odnosi se na način na koji su različite figure ili objekti povezani s drugim. Prve su unutar određenog lika; potonje uključuju odnose između figure i subjekta (projektivni) ili između samih figura (euklidski). Projektivni odnosi počinju psihološki u trenutku kada se lik više ne promatra izolirano, već se počinje sagledavati u odnosu na gledište. Djeca konstruiraju referentne sustave iz operativnog povezivanja i koordinacije svih mogućih točaka gledišta, svih kojih su svjesni. Takva je globalna koordinacija prostornog stajališta osnovni preduvjet u konstrukciji jednostavnih projektivnih odnosa, iako takvi odnosi ovise o određenom gledištu. Ipak, jedno gledište ne može postojati na izolirani način, već nužno uključuje izgradnju cjelovitog sustava koji povezuje sva gledišta. Izgradnja sličnih figura, primjerice, nastaje u razvoju predodžbi koje se pretpostavlja da su posredne između projektivnog i euklidskog prostora. Intuicija prostora nije "čitanje" ili urođeno poimanje svojstava predmeta, već sustav odnosa povezanih s radnjama izvršenim na tim objektima (Clements i Battista, 1992).

Erich Christian Wittmann (1999) ponudio je sedam fundamentalnih ideja o geometriji koje je preporučila krovna svjetska matematička organizacija za nastavu matematike *International*

Commission on Mathematical Instruction ICMI (Mammana i Villani, 1998). ICMI grupi za poboljšanje nastave geometrije je cilj identificirati važne izazove i nove trendove za budućnost u području nastave geometrije te teži implementaciji novih tehnoloških otkrića u nastavu geometrije u svrhu poboljšanja metoda poučavanja (Mammana i Villani, 1998, prema Miloš, 2018). Wittmannove polazne točke za kurikulum geometrije su: 1. podjela oblika prema prostornim dimenzijama (a te oblike imenujemo, prikazujemo i konstruiramo); 2. transformacije geometrijskih oblika preslikavanjima u ravnini i prostoru; 3. koordinatni sustav uvodi se opisivanjem pozicije točaka geometrijskog oblika te međuodnosa objekata pomoću koordinata; 4. pomoću mjernih jedinica mjeri se duljina, površina, oplošje i volumen geometrijskih oblika, veličina kutova (čije mjerenje vodi u trigonometriju); 5. geometrija omogućava povezivanje više točaka, linija, likova i tijela da bi tako nastali novi geometrijski uzorci i strukture, sukladno sa sadržajem i razinom koja se poučava u školi; 6. oblicima iz okruženja smatraju se svi objekti iz svakodnevice na kojima se mogu primjenjivati razne operacije, a međusobni odnosi među stvarnim objektima mogu se opisati pomoću geometrije; 7. geometrijske činjenice vezane za prostor i ravninu, ali i apstraktni odnosi između veličina i količina mogu se prevesti u jezik geometrije i pomoću same geometrije opisati, a rješenje je moguće ponuditi kao praktično (Wittmann, 1999, prema Miloš, 2018).

Naš je posljednji kurikulum puno više „wittmannovski“ nego prethodni (Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, 2019), no sigurno može i vjernije pratiti navedenih sedam fundamentalnih ideja. Primjetno je, naime, da se određene ideje javljaju tek u višim razredima osnovne škole i kasnije, dok su u razrednoj nastavi zanemarene. U razrednoj nastavi ističu se ideje oblika u prostoru i ravnini i mjerenja, a u relativno maloj pa i zanemarivoj mjeri integrirani su oblici iz svakodnevice, koordinatni sustavi, povezivanje u nove uzorke i strukture, preslikavanja i geometrizacija.

Kurikul, svaki pa tako i naš, prati i unapređuje razinu geometrijskog mišljenja učenika. U tome se najveći broj istraživača i praktičara ravna životnim djelom supružnika van Hiele, baziranom na njihovim doktorskim disertacijama. Van Hiele su definirali pet razina geometrijskog mišljenja i razumijevanja te istraživali razvoj geometrijskog mišljenja, karakteriziran prelaskom s niže razine znanja na višu (van Hiele, 1957). Pritom su razine sekvencijalne i hijerarhijski posložene, pojmovi koje se dosegne u nižoj razini postaju predmetom proučavanja u višoj, a jezik, simboli i odnosi među njima specifični su za svaku razinu te učenici s niže razine geometrijskog mišljenja ne mogu razumjeti učitelja koji koristi možda iste pojmove, ali u kontekstu više razine. Prelazak na višu razinu odgovara usvajanju pojmova i procesa koji karakteriziraju tu višu razinu. Redoslijed razina je nepromjenjiv, one su redom: razina prepoznavanja – učenici prepoznaju i klasificiraju oblike prema izgledu odnosno nekim svojstvima; razina analize – svojstva se analiziraju i opisuju; razina neformalne dedukcije – na osnovu svojstava oblici se stavljaju u odnose; razina formalne dedukcije – učenici dokazuju tvrdnje o oblicima i svojstvima; razina strogosti – uspoređivanje teorija odnosno aksiomatskih sustava. Za svaku razinu već su bogato opisane aktivnosti koje toj razini odgovaraju i pomažu prelasku na sljedeću, npr. u Crowley (1087). Razne analize pokazale su da učenici, pogotovo u američkim i europskim obrazovnim sustavima, u pravilu po završetku srednjoškolskog obrazovanja nisu postigli posljednje dvije razine, a nerijetko ostaju na prvoj (nultoj) (Usiskin, 1982; Sunardi i sur., 2019).

Velike ideje - uzorci, relacije, simetrije, transformacije, promjene

Djeca mogu rano raspoznavati različite oblike (Piaget i Inhelder, 1956; Clements, 1999), no što je s jednakim (sukladnim) i sličnim oblicima? Neka isprva matematički irelevantna svojstva kao što su kosina, omjer lika i u nekim situacijama orijentacija (Hannibal i Clements, 2000) igraju ulogu u kategorizaciji likova. Neka djeca prihvaćaju trokut i kad njegova stranica („baza“) nije vodoravna, no ono što je mnogo zanimljive je da su mnogima od njih često bitniji nagnutost i simetrija. Tako često odbacuju trokut „jer točka na vrhu nije u sredini“ (Clements, 1999). Kod trokuta preferiraju omjer 1:1, to jest, da su duljina „baze“ i visina trokuta otprilike iste duljine. Odbacuju sve trokute koji su, dječjim riječima, „premršavi“ ili „nedovoljno široki“ (Hannibal i Clements, 2000). Za pravokutnike, s druge strane, neka prihvaćaju paralelogram i jednakokračan trapez. Istraživanja provedena u prvim razredima u Sjedinjenim Američkim Državama podržavaju činjenicu da se učenici koriste raznim kognitivnim procesima u raspoznavanju oblika, od raspoznavanja svojstava kao što su „širok“ ili

„uzak“ do izravnog manipuliranja oblikom kako bi ga transformirala u drugi (Clements i Battista, 2000, prema Lehrer i dr., 1998). Pokazalo se da se dječje prostorno rasuđivanje ne mijenja mnogo učeći geometriju kako učenici napreduju kroz razrede, čak naprotiv, prvašići će i prije od srednjoškolaca određivati svojstva oblika brojeći stranice ili kutove lika (Lehrer i dr., 1998).

Mala djeca, također, vrlo brzo razvijaju i ideje o sličnosti, no prvenstveno ju uočavaju ako su likovi slično položeni (Beilin, 1984). Prema Rosseru (1994) učenici srednjih razreda (kod nas učenici od četvrtog do šestog razreda) u obrazlaganju geometrijskih ideja koriste se dosad naučenim geometrijskim svojstvima o likovima i koriste transformaciju i pomiču likove u ravnini, iako nisu uvijek precizni.

Mlađa djeca često ne mogu zamisliti kako bi oblik izgledao kada bismo ga preokrenuli ili zarotirali, odnosno izometrično preslikali. Kada je ispitivana grupa četverogodišnjaka prakticirala presavijanja kvadrata napola i rezanje kvadrata dijagonalno, smiješili su se sa iznenađenjem kada bi otkrivali da su dobiveni oblici trokuti. Slično, kada preokrenu polovicu jednakokrakog trokuta kako bi dobila paralelogram oduševljena su transformacijama i pokušavaju preokrenuti dobivene pravokutne trokute na sve moguće načine (Copley, 2000).

Willifordovo istraživanje (Williford, 1972) pokazalo je da su učenici drugih razreda u Sjedinjenim Američkim Državama mogli fizički geometrijski preslikavati likove, ali nisu mogli mentalno zamišljati tu radnju. Na testovima prostornih sposobnosti dokazano je da učenici mogu naučiti mnogo o geometrijskom preslikavanju i u početnoj nastavi matematike i internalizirati iste radnje (Clements, Battista, 1997, prema Del Grande, 1986). Zamišljanje lika da „klizi po površini“ mnogo im je jednostavnije od rotiranja i bilo kakvog preokretanja lika (Perham, 1978), dok sposobnost da lik preokrenu ili zarotiraju može otežati smjer transformacije (Shultz i Austin, 1973).

Kada se igraju takozvanim kockicama djeca će prvo pokušavati spojiti dva oblika na temelju svojstva simetričnosti, onda će ih usporediti (staviti jedan do drugoga) i napose sastaviti od njih neki jednostavan oblik (Clements i Battista, 1992). Djeca posjeduju intuitivno shvaćanje simetrije od najranije dobi koje im pomaže prilikom manipulacije oblicima u prostoru. Primjerice, jasno razlikuju kocku od ostalih kvadara jer je kocka simetričnija – kakogod ju se okrene, ona jednako stoji, dok ostali kvadri pridonose konstrukciji ovisno o položaju. Prva faza u razumijevanju simetrije je razumijevanje osi simetrije brzom analizom simetrične slike u svim smjerovima. Djeca preferiraju vertikalne, a ponekad i vodoravne osi jer se koncept „gore i dolje“ razvija brzo. Također, djeca će lakše shvatiti simetriju rotacijom objekta. Predškolci su u jednom američkom vrtiću objašnjavali kako su jednakostranični trokuti simetrični u svojim stranicama „jer ako ga okreneš on je isti“ (Gallou-Dumiel, 1989).

Kako bi os simetrije lakše razumjeli, učenicima možemo zadati zadatak da nacrtaju samo polovicu crteža (polovica jabuke, polovica čovjeka, polovica stabla i sl.), motivirati ih na promatranje zrcalne slike u ogledalu (ako ogledalo postavimo na os simetrije crteža) i razgovarati o uočenim svojstvima.

Kompjuterski softveri danas učenicima olakšavaju shvaćanje simetrije i transformacija. Clements i sur. (2001) spominju kako je Logo program pomogao učenicima da stvore bogate slike geometrijskih transformacija te da se osvrnu i opišu te transformacije, moguće i njihova svojstva. Logo programi također od učenika traže da izražavaju svoje radnje mnogo preciznije, nego na primjer, što to čine na crtežima. Stoga računala u nastavi mogu poslužiti prilikom shvaćanja simetrije, čak osne i centralne, te translacije, gradiva koja će biti potrebna u kasnijim razredima, kroz igru. Jedna je studija potvrdila da su Logo programi pomogli, vježbanjem sortiranja likova i translacijama u ravnini, u prelasku učenika na 2. Van Hiele razinu (Johnson – Gentile, Clements i Battista, 1994). EPoC (Evaluation of Potential Creativity) pak test kreativnosti (T. Lubart i suradnici, internetska stranica Crealude) ispituje razvoj matematičke kreativnosti u geometriji i aritmetici. Osnova geometrijskih zadataka su manipulacije likovima u ravnini i prepoznavanje međusobno sukladnih. Manipulacije se izvode korištenjem miša.

Chaille i MacCormick Davis (2016) uspješno ugrađuju teme sukladnosti i sličnosti oblika, relacija, simetričnosti i transformacija oblika u konstruktivistički kurikulum integriranih matematičko-prirodoslovnih sadržaja. Posebno naglašavaju konstruktivističku paradigmu i koncept velikih ideja te aktivnosti orijentiraju oko velikih ideja: uzorci, relacije, simetrija i balans, transformacije, gibanje. Iskustvenim učenjem i kroz konstrukciju znanja i rješenja problema koji se odnose na više tema, a zajedničkih koncepata, usvajamo i više od samih koncepata, srž. Postulirajući simetriju, relacije,

uzorke i transformacije kao velike ideje (matematike i prirodoslovlja), daju smjer obrazovne prakse u kojoj navedene u osnovi geometrijske ideje imaju suštinsku važnost za razumijevanje drugih tema prirodoslovlja i matematike.

Primjeri aktivnosti za poticanje geometrijskog mišljenja

U kurikulumu razredne nastave geometrija je jedno vrijeme predstavljala jedinu vizualnu usmjerenu matematiku ponuđenu učenicima. Često zbog toga odustaju od matematike u srednjim školama ili na fakultetima oni učenici koji bi u tome bili izuzetno dobri. Na taj način društvo ostaje bez potencijalnih kreativnih arhitekta, geodeta, inženjera, topologa i općenito matematičara (Goldenberg, Cuoco, Marko 1998). Za neke pak učenike vizualni pristup je neophodan za učenje matematike. Onim učenicima koji sebe smatraju lošima u matematici vizualni je pristup ključ za poimanje matematike i prva prilika za sudjelovanjem. Značajke matematičkih procesa često su otkrivene istraživanjem putem vizualnih pristupa - i upravo je to ono što moramo imati na umu (Goldenberg i sur., 1998). Kurikulum mora pomoći kod razvoja prostornoga zora i geometrijskog mišljenja. Geometrija zahtijeva pronalaženje uzoraka, sličnosti i različitosti, simetrija i pravilnosti između određenih oblika u prostoru. Preduvjet je sposobnost da oblik umno rastavimo, promotrimo njegove pojedine elemente i stvorimo dovoljno dobre zaključke o njihovim vezama kako bismo iz toga izveli daljnju analizu i eksperimentiranje (Goldenberg i sur., 1998). Učenje stoga može uključivati bogatu i zabavnu kombinaciju crtanja, manipulacije, zamišljanja, presavijanja papira, slaganja kocaka i korištenja kompjuterski dizajniranih alata i simulacija svih ili nekih od gorenavedenih radnji. Primjerice, učenici mogu naučiti pratiti i zapažati veličinu i odnose među djelovima pomoću mjerenja, skiciranja lica ili izrade maketa, tlocrta i plana. Po uzoru na Senechal (1991), kurikulum mora poticati na razvoj vizualizacije kao i razmišljanja u slikama. S ciljem da pomognemo djeci da stvaraju, zadrže i manipuliraju mentalnim slikama moramo učenicima omogućiti rad koji uključuje fizičku manipulaciju, stvaranje i igranje s oblicima u prostoru. Cilj geometrije treba biti pružiti djeci osjećaj za to „što taj oblik može učiniti za mene“ (Goldenberg i sur., 1998). Isti autori uočili su da su struktura i dizajn oblika mnogo bitniji od nomenklature i mjerenja oblika prilikom učenja manipuliranja oblicima i samim time i razvoja prostorne inteligencije. Ovdje se nalaze neki od primjera pitanja na koje djeca trebaju moći afirmativno odgovarati u svrhu razvijanja prostornog rasuđivanja, sposobnosti mentalne manipulacije predmetima (oblicima) i razvijanja prostorne inteligencije: Mogu li prepoznati predmet samo prema dodiru? Mogu li prepoznati oblik predmeta uz pomoć njegovih određenih sjena? Mogu li predvidjeti te sjene gledajući samo oblik predmeta? Mogu li nacrtati ono što vidim? Mogu li nacrtati ono što ti vidiš ako zamislim da gledam iz tvojeg kuta? Kakve oblike struktura mogu izgraditi rabeći taj predmet (taj oblik)? Kako bi izgledao presjek kada bi predmet presjekao po pola? Mogu li ga zamotati u poklon? Mogu li ga sastaviti od čačkalica i gumica? Mogu li ga izgraditi gledajući samo njegovu fotografiju? Mogu li ga prepoznati ako je naopako okrenut ili prepoznati neki njegov rotirani dio? Prema ovim pitanjima možemo formulirati puno jednostavnih aktivnosti za predškolu i razrednu nastavu. Koliko će oblik biti složen, hoće li se u njemu moći prepoznati jednostavniji geometrijski likovi poput trokuta, pravokutnika i kruga ovisi zapravo o cilju koji želimo postići (da li on uključuje raspoznavanje prirodnih oblika poput fraktalnih uzoraka biljaka ili oblike klasične geometrije). Također, u praksi ćemo često uočiti da djeca radije biraju složenije „prirodne“ oblike za rekonstrukciju. Lego kockice na primjer pomažu kreiranju, manipulaciji i čitanju mentalnih slika, a služeći se njima u učionici možemo oživjeti i neke složenije (prirodne) oblike. Na Slici 1 prikazani su uratci petogodišnjaka, gdje je zadatak bio od zadanih Lego dijelova složiti oblike od kojih su neki bili zadani (gitara, helikopter, jedrilica), drugi nisu (trkaći automobil, gliser).

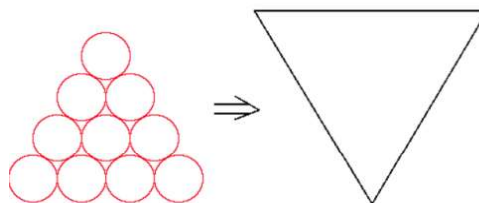


Slika 1. Slobodno imitiranje stvarnih oblika zadanom skupom Lego kockica

Služeći se sljedećim zadacima možemo postići bolje poimanje simetrije i kongruencije. Koja slova abecede u ravnini mogu biti izrezana u dva identična dijela? Postoje li neka koja mogu biti izrezana u tri ili čak četiri simetrična ili identična dijela? Neki učenik može zamisliti slovo T prepolovljeno vertikalno u njegovom središtu te na taj način može riješiti problem dobivši tako dva identična djela. Drugi pak učenik rješava problem tako da neko slovo (primjerice B) siječe horizontalno. Na koliko različitih načina možeš presaviti četverokut (pravokutnik, kvadrat, peterokut i slično) kako bi jedan dio ležao u potpunosti na drugom? Kakve oblike stvaraš kad to činiš? Na koliko načina možeš položiti jedan ravan rez kroz pravokutan list papira tako da dobiješ dva dijela koja mogu biti složena i zalijepljena tako da tvore trokut? Vidimo da je za odgovore na ovakva pitanja potrebno dosta mentalne manipulacije slikama odnosno fizičke manipulacije – crtanje, rezanje, lijepljenje, skiciranje, rotiranje i slično. Sve to daje nam do znanja da je za napredovanje u prostornom rasuđivanju potrebnu uistinu dosta praktičnog iskustva koje onda uključuje misaonu manipulaciju predmetima.

Neke pak oblike, učenici najbolje mogu izraditi sastavljanjem te kombiniranjem i pomicanjem drugih oblika. Prvi od ovih primjera uključuju slike s kojima se učenici često susreću u nastavi, ali nikad ih nisu vježbali stvarati u glavi. U udžbenicima iz matematike za razrednu nastavu rijetko ćemo naići na zadatak koji traži „stvaranje i rotiranje oblika u glavi“ (Goldenberg i sur., 1998, str. 10): Rotiraj kvadrat, pravokutnik, peterokut ili trokut oko njihovih stranica dok ne dobiješ konačan oblik. Kakav trag ostavljaju i koji lik zapažaš? Kada bi uzeo lizaljku za njezinu dršku i rotirao je oko drške koji oblik (lik) bi ostavio njezin obris u prostoru? Prereži ravnom crtom kvadrat počevši od jedne stranice kvadrata prema suprotnoj. Kakve oblike možeš dobiti od dvoje oblika koje si upravo izrezao slažući ih na dva podudarajuća kraja? Napravi ravan rez kroz slamčicu na različite načine. Kako izgleda prerez? Napravi isto s kockom. S jabukom. S krafnom. S narančom. Kako izgleda prerez? Koristeći prirodno svjetlo sunca ili neki umjetni izvor (lampicu) osvjetli limenku soka. Ili neki drugi predmet. Kakvih sve oblika može biti sjena limenke? Kockina sjena? Je li moguće poznavati oblik predmeta ako imamo dovoljan broj njegovih sjena? Mora li sjena pravokutnika ili kvadrata na ravnom zidu uvijek biti četverokut? Ili paralelogram? Što se dogodi ako kreiramo te sjene koristeći neki obližnji izvor svjetlosti? U tom smislu predložimo neke aktivnosti, kao što su:

- Ako prerežeš kvadrat dijagonalno od ugla do ugla dobiješ četiri pravokutna trokuta. Koliko različitih likova možeš sastaviti koristeći se trokutima, tako da paziš da se trokuti dodiruju samo jednakim stranicama? (prikažemo crtežom dozvoljene položaje)
- Krugovi su poslagnani tako da lik nalikuje na trokut. Koliko i koje krugove možeš pomaknuti tako da dobiješ suprotno okrenuti trokut? Koliko najmanje? (Slika 2.) Cilj aktivnosti je vježbati transformaciju nad likovima i vizualno zamišljanje. Možemo također ostvariti i dobru unutarpredmetnu korelaciju s domenom Mjerenje.



Slika 2. Zadatak transformacije skupa krugova prema zadanom obliku

- Koji je najveći broj kvadrata koji možeš dobiti presjekom tri kvadrata? Aktivnost zahtjeva mentalnu manipulaciju nad oblicima i razvija sposobnost vizualizacije i transformacije nad oblicima.
- Nacrtna je dio koordinatne mreže s istaknutim točkama. Nacrtnaj sve trokute/pravokutnike/paralelograme... tako da su im vrhovi u istaknutim točkama, i unutar njih je točno jedna istaknuta točka. Vježbom provjeravamo razumijevanje sadržaja pojmova – različite oblike, veličine i orijentacije likova.
- Od zadanih likova (trokuta, pravokutnika,...) sastavi što više nesukladnih likova (trokuta, pravokutnika,...). Vježbamo transformacije i mentalne vizualizacije u ravnini.
- Od zadanih likova (trokuta, pravokutnika,...) sastavi lik najvećeg (najmanjeg) opsega (duljine ruba).

Aktivnosti koje uključuju slaganje i razlaganje modela geometrijskih oblika te slaganje različitih slagalica geometrijskim oblicima, poput tangrama, pomažu u razvijanju geometrijskog mišljenja, logičkog zaključivanja, povezivanja i argumentiranja unutar i među sadržajima geometrije, matematike i ostalim predmetima. Razne igre imaju isti efekt, tako primjerice igra potapanja brodova razvija snalaženje u prostoru i približava ideju koordinatizacije, kao i vizualnog reprezentiranja objekata u ravnini.

Chaille i MacCormick Davis (2016) predlažu niz praktičnih aktivnosti vezano za najranije integrirano podučavanje matematike i prirodnih znanosti. Ne nude samo izvor aktivnosti već jasno razrađenu konstruktivističku paradigmu i razradu dolaska do takozvanih velikih ideja. U tom kontekstu predložene vježbe uspoređivanja raznih oblika i uzoraka stvorenih od oblika, konkretnom manipulacijom u prostoru kao i mentalnim transformacijama, uklapaju se u širu prirodnoznanstvenu sliku. Tu spadaju i vježbe kojima će učenici, kako opisuju Goldenberg i suradnici (1998), „vidjeti nevidljivo“, odnosno: 1. vidjeti količinu – prikazivati grafički količine piktogramima i slično, kako bi se kasnije količine lakše zamišljale; 2. vidjeti promjenu – procjenjivati veličine, količine koje su rezultat promjene, mjeriti, uočavati promjene jednog svojstva dok druga ostaju nepromijenjena i slično; 3. vidjeti proces – sastavljati, rastavljati, crtati, prikazivati i slično.

Zaključak

Istraživanja koja u centar stavljaju razvoj prostornog rasuđivanja i prostornog zora te njihovu utjecaj na razvoj drugih oblika mišljenja identificiraju niz čimbenika tih razvoja. U skladu s tim u manjoj ili većoj detaljnosti sugeriraju odgovarajuće osnovne, konstruktivističkim jezikom rečeno velike ideje i odgovarajuće aktivnosti. Neke konkretne aktivnosti predložene su u ovom radu, no očito je da se radi o neizmjerljivo bogatom području. Rad otvara pitanja dovoljne uključenosti navedenih aktivnosti u kurikulum, formalni i implicitni, kao i organiziranost kurikula u skladu s rezultatima znanstvenih istraživanja današnjice. Kurikuli bi trebali biti organizirani oko onog što je prihvaćeno da su osnovne (fundamentalne, velike...) ideje u geometriji, odnosno nastavi geometrije. Citirana istraživanja najčešće su izrasla na konstruktivističkoj paradigmi čime se razmišljanja o unapređenju nastave geometrije kroz aktivnosti upravo idealno uklapaju u suvremene pedagoške tendencije. U daljnjim istraživanjima valjalo bi usporediti nacionalne matematičke kurikule u više država te njihovu organiziranost oko fundamentalnih ideja u podučavanju oblika i prostora. Uz mogućnost promatranja eksperimentalnih razreda, longitudinalnom studijom trebalo bi usporediti uspješnost učenika, najlakše već poznatim testovima postignutih van Hiele razina. Također, trebalo bi usporediti zadovoljstvo i osjećaj tjeskobe učenika takvom nastavom oblika i prostora, u odnosu na onu koja se izvodi prema postojećem kurikulumu. S obzirom da među predloženim aktivnostima ima zajedničkih s onima predloženima za konkretne van Hiele razine geometrijskog mišljenja (Crowley, 1987), ovakav kurikulum morao bi dati veću uspješnost učenika analizirajući postignute van Hiele razine. Osjećaj zadovoljstva time bi kod učenika trebao biti veći, već i samim tim što bi se intenzivnije razvijalo geometrijsko mišljenje van uobičajenog kolosjeka formalnog dokazivanja.

Literatura

1. Beilin, H.(1984). *Cognitive theory and mathematical cognition: Geometry and space*. In B. Gholson i T.L. Rosenthal (Ur.) Applications of cognitive development theory (Str. 49-93). New York Academic press.
2. Chaille, C. i McCormick Davis, S. (2016). *Integrating Math and Science in Early Childhood through Big Ideas*. Pearson.
3. Clements, D.H. i Battista, M. T. (1989). *Learning of geometric concepts in a Logo environment*. Journal for research in Mathematic Education, 20, 450 – 467
4. Clements, D.H. (1999). *Concrete manipulatives. Concrete ideas*. Contemporary issues in early childhood, 1(1), 45-60
5. Clements, D.H. i Battista, M.T. (1992). *Geometry and spatial reasoning*. U D.A. Grows (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (str. 420 – 464). New York: Macimillian
6. Clements, D.H. i Battista, M.T. (2000). *Developing effective software*. U A.E. Kelly i R.A. Lesh (Ur.), Handbook of research design in mathematics and science Education (Str 761-766). Mahwah. New York:Erlbaum
7. Clements, D.H., Battista, M.T. i Sarama, J. (2001). *Logo and geometry*. Journal For Mathematics Education, Monograph Series, 10
8. Copley, J.V. (2000). *The young child and mathematics*. Reston, VA and Washington, DC: National Council for Teachers of Mathematics and the National Assosiation for the Education of the Young Children.
9. Crowley, M.L. (1987). *The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought*. Learning and Teaching Geometry, K-12, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, ur. Mary Montgomery Lindquist, str.1-16.
10. Gallou – Dumiel, E. (1989). *Reflections, points simmetry and Logo*. U C.A. Maher, G.A. Goldin i R.B. Davis (EDS.) Proceedings of the 11th annual meeting, Nort AmericanChapter of the International Group of Psychology of Mathematics Education (str. 149-157). New Brunswick: New York: Rudgers University
11. Glasnović Gracin, D. i Kuzle, A. *Fundamentalne ideje za nastavu geometrije*. Matematika i škola, 99.
12. Goldenberg, E.P., Cuoco, A.A. i Mark J. (1998) *A role of geometry in general education*. U Lehrer R. i Chazan D. (Ur.) (str. 4 – 30) Designing learning environmnets for developing understanding of geometry and space. Routledge: New York
13. Gough, M. F. (1954). *Mathemaphobia: Causes and treatments*. Clearing House (Menasha, Wis.), 28, 290-294.
14. Gutiérrez-Rubio, D., León-Mantero, C., Maz-Machado, A. i Madrid-Martín, M.J. (2020). *Relationship between Math Anxiety and Perception of the Utility of Geometry in Primary Education in Prospective Teachers*. Universal Journal of Educational Research 8(3): 731-738.
15. Hannibal, M.A.Z. i Clements, D.H. (2000). *Young children's understanding of basic geometric shape*. Journal for reasearch in Mathematics Education, 30, 192 – 212.
16. Hembree, R. (1990). *The nature, effects and relief of mathematics anxiety*. Journal for Research in Mathematics Education,21(1), 33-46
17. van Hiele, Pierre (1985) [1959], *The Child's Thought and Geometry*, Brooklyn, NY: City University of New York. English translation of selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele, 243–252.
18. Imamoglu, E. O. i Imamoglu, V. (1983). *Children's plan – drawings of their houses*. In D. R. Rougers i J.A. Slboda (Ur.), The aquisition of symbolic skills (str. 367 – 379). New York: Plenum press
19. Jenifer, J., Rozek, C., Levine, S. i Beilock, S. (2022). *Effort(less) exam preparation: Math anxiety predicts the avoidance of effortful study strategies*. Journal of Experimental Psychology General.
20. Jones, K. (2002) *Issues in the teaching and learning of geometry*. In: Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice. Routledge, pp. 121-139. ISBN 0415266416
21. Johnson – Gentile, K., Clements, D.H. i Battista, M.T. (1994). *The effects of computer and non – computer environments on students' conceptualization of geometric motion*. Journal of Educational Computing Research. 11(2), 121-140
22. Lehrer, R., Jenkins, M., i Osana, H. (1998). *Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry*. U Lehrer i D. Chazan (Eds.) , Designing learning environments for developing understanding of geometry and space (str. 137 – 167). Mahwah: NJ: Erlbaum.
23. Mammana, C., Villani, V. (1998). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an ICMI study*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.
24. Merzbach, U.C. i Boyer, C.B., (2011). *A history of Mathematics*. Third edition. John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Yrsey
25. Miloš, A. (2018) *Fundamentalne ideje u geometriji i nastavi geometrije*. Diplomski rad. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu.

26. Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (2019). NN 7/2019. Dostupno na: https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html
27. Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Priroda i društvo za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (2019). NN 7/2019. Dostupno na: https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_147.html
28. Perham, F. (1978). *An investigation into the effect of instruction on the acquisition of the transformation geometry in first grade children and subsequent transfer to general spatial ability*. U R. Laesh i D. Mierkewitz (Ur.), Concerning the development of the spatial and geometric concepts (str. 229 – 241). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, mathematics and Environmental Education
29. Piaget, J. i Inhelder, B. (1956). *The Child's Conception of Space*. The Northon Library: New York
30. Rosser, R.A. (1994). *Children's solution practices and mental rotation problems*. The differential silence of stimulus components. Child study Journal, 24, 153-168
31. Senechal, M. (1991). *Visualization and Visual Thinking*. In J Malkevitch (ed.) Geometry's Future. Conference Proceedings. Compac Inc. Lexington, Massachusetts.
32. Schultz, K.A., Austin, J.D. (1983). *Directional effects in transformational tasks*. Journal for research in Mathematics education., 14, 95-101
33. Soewardini, H.M.D., Sukrisno, H. i Meilantifa (2019). *Detection of College Students' Anxiety in Carrying Out Mathematical Argumentation about Geometry Problems*. Advances in Social Science, Education and Humanities Research, br. 349
34. Sunardi, Yudianto, E., Susanto, Kurniati, D. i Dwi Cahyo, R. (2019). *Anxiety of Students in Visualization, Analysis, and Informal Deduction Levels to Solve Geometry Problems*. International Journal of Learning, Teaching and Educational Research vol. 18, br. 4, str. 171-185.
35. Tomić, T. (2020). *Oblik i prostor u početnoj nastavi matematike*. Diplomski rad. Sveučilište u Rijeci, Učiteljski fakultet. Dostupno na: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:189:524689>
36. Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. University of Chicago. (dostupno na: http://www.blog.republicofmath.com/wp-content/uploads/2011/04/Van_Hiele_Levels_Usiskin.pdf)
37. Tymoczko, D. (2011). *A Geometry of Music - Harmony and Counterpoint in the Extended Common Practice*. Oxford Studies in Music Theory.
38. Wang, Li. (2021). *The Analysis of Mathematics Academic Burden for Primary School Students Based on PISA Data Analysis*. Frontiers in Psychology, 12.
39. Williford, H.J. (1972). *A study of transformational geometry instruction in the primary grades*. Journal for research in Mathematics Education, 3, 260 – 271
40. Witt, M. (2012). *The Impact of Mathematics Anxiety on Primary School Children's Working Memory*. Europe's Journal of Psychology, 263-274.
41. Wittmann, E. Ch. (1999). *Konstruktion eines Geometrieunterrichts ausgehend von Grundideen der Elementargeometrie*. U H. Henning (Ed.), Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung. Festschrift zum 75. Geburtstag von Heinrich Besuden, 205–223. Oldenburg: Bueltmann und Gerriets.
42. Zios, R. i Kirchgasser, K.L. (2021). *Health and pathology: a brief history of biopolitics of US mathematics education*. Educ Stud Math 108, 123-142.

SHAPE AND SPACE IN THE EARLY TEACHING OF MATHEMATICS

Abstract: *The paper provides an overview of theories and papers relevant to the reflection on the teaching of shape and space, especially early teaching. It thereby points to new possibilities that may change the landscape of geometry education. The goal is a more modern, higher-quality curriculum and higher-quality teaching of shape and space, with better student achievements and less anxiety caused in students. These include: research into the understanding of shape and space and its relationship to school mathematics in general and school geometry in particular, the importance of transformational geometry in the curriculum including symmetry and other isometries, the function of drawing, modeling, games, describing in construction of geometrical knowledge, the role of digital technologies and the ability to expand elementary school geometry from its typical vocabulary emphasis to work on composing, decomposing, sorting, comparing, and mentally managing two-dimensional and three-dimensional figures. The change of approach in teaching geometry is compatible with the emphasis on the constructivist approach in teaching and creating curricula.*

Keywords: *shape, geometric thinking, transformations, manipulation, visualization*