DOI: 10.7251/EMC1202336M
Datum prijema rada: 6. novembar2012.
Datum prihvatanja rada: 30. novembar 2012.

UDK: 336.761(497.11)
Časopis za ekonomiju i tržišne komunikacije

Godina **II** • broj **II**
str. 336-356

STRUČNI RAD

MODELIRANJE VOLATILNOSTI TRŽIŠNIH INDEKSA AKCIJA BEOGRADSKE BERZE: BELEX15 I BELEXLINE

Borjana B. Mirjanić,[1] Nenad B. Branković[2]
Predavač, Magistar ekonomskih nauka, Beogradska poslovna škola – Visoka škola strukovnih studija, Beograd. (borjana.mirjanic@bbs.edu.rs)
[2]Predavač, Magistar ekonomskih nauka Beogradska poslovna škola – Visoka škola strukovnih studija, Beograd. (nenad.brankovic@bbs.edu.rs)

Rezime: *Za ocenu rizika portfolija finansijskih instrumenata, pojedinačnih hartija od vrednosti ili valuta koristi se predviđanje drugih momenata u vremenskim serijama. Brojne empirijske studije pokazale su heteroskedastičnost finansijskih vremenskih serija. Stoga su u pokušaju da se prevaziđu manjkavosti standardne devijacije kao mere rizika, razvijeni su GARCH modeli, kao alatka prilikom upravljanja rizicima, koji efekte heteroskedastičnosti uzimaju u obzir. U radu je izvršeno ispitivanje ponašanja prinosa berzanskih indeksa na novonastajućem tržištu kapitala i predstavljeni rezultati empirijske analize volatilnosti srpskog tržišta kapitala, odnosno Beogradske berze. U radu je sprovedena komparativnu analiza GARCH (1,1) i E-GARCH (1,1)-GED modela na dnevnim prinosima Belex15 i Belexline radi utvrđivanja njihovih implikacija prilikom predviđanja volatilnosti u uslovima postojanja asimetričnih šokova u volatilnosti i empirijskih distribucija koje odstupaju od normalnog Gaussovog rasporeda karakterističnim za novonastajuća tržišta kapitala.*

Ključne reči: *volatilnost, uslovna standardna devijacija, GARCH (1,1) model, E-GARCH (1,1)-GED, Beogradska berza.*

JEL klasifikacija: *C22, C52,G10, G12.*

UVOD

Regulatorni organi, akademska javnost i istraživači u oblasti finansijske ekonomije fokus svog interesovanja usmerili su na volatilnost cena akcija ubrzo nakon devastirajućeg berzanskog sloma 1987. godine. I nakon četvrt veka od dramatičnog pada berze, predviđanje volatilnosti je i dalje predmet velikog broja debata i empirijskih istraživanja akademske i stručne javnosti iz oblasti finansija. Izučavanje i predviđanje volatilnosti finansijskih tržišta posebno dobija na značaju u kontekstu aktuelne finansijske krize.

Finansijske odluke se zasnivaju na odnosu između rizika i prinosa. Predviđanje volatilnosti cena akcija, kao kvantitativna reprezentacija rizika, od posebnog je značaja prilikom investicionog odlučivanja, utvrđivanja cene finansijskih derivata, upravljanja rizikom, selekcije portfolija i oblikovanja strategija trgovanja i hedžinga. Volatilnost nije sinonim za rizik, te je razumevanje volatilnosti od presudnog značaja prilikom donošenja finansijskih odluka zasnovanih na fluktuacijama prinosa. Predviđanje volatilnosti hartija od vrednosti jedan je od najvažnijih ulaznih parametara za određivanje cene finansijskih instrumenata, a posebno finansijskih derivata. Prilikom utvrđivanja prave, ili tzv. fer vrednosti opcije, Black-Scholes su koristili volatilnost osnovnog finansijskog instrumenta kao osnovni ulazni parametar opcionog modela. Pristup koji pretpostavlja vremensku konstantnost volatilnosti i vrši projekciju na osnovu volatilnosti iz prošlosti, osim što je uprošćen, nerealističan, on je i opasan, jer zamagljuje investitorovu sliku o riziku sa kojim je suočen.

Pored toga, upravljanje rizikom postalo je obavezna procedura finansijskih institucija nakon usvajanja Bazelskog sporazuma I 1996. godine, koji definiše zahtevani minimalni iznos rezervi kapitala koje finansijske institucije drže proporcionalno veličini procenjenog rizika. U poslednjoj deceniji, predviđanje volatilnosti dobija poseban značaj u finansijsko-ekonomskoj praksi prevashodno kao posledica njegove dominantne uloge prilikom obračuna vrednosti u riziku (engl. Value at Risk, VaR).

U protekle dve decenije, sprovedena su brojna istraživanja na razvijenim tržištima kapitala koja upućuju na mogućnost predviđanja volatilnost kroz kraće vremenske horizonte (Tim Bollerslev, Robert F. Engle, Daniel B. Nelson, 1993: strana 3038). Pored razvijenih tržišta kapitala, koja prednjače u primeni razvijenih ekonometrijskih modela u investicionom odlučivanju, poslednjih desetak godina pažnju globalnih portfolio menadžera privukla su tzv. novonastajuća tržišta kapitala, u koje svrstavamo tržište kapitala Republike Srbije. Važnu specifičnost novonastajućih tržišta kapitala predstavlja činjenica da hartije od vrednosti na ovim tržištima, pored prilike za ostvarenje visokih prinosa, u sebi kriju i visok rizik. Skromna tradicija emitovanja hartija od vrednosti, plitko, nelikvidno tržište i problem nesinhronog trgovanja, nedostatak tržišne transparentnosti, visoki transakcioni troškovi, problemi u punoj primeni međunarodnih računovodstvenih standarda i slabo korporativno upravljanje predstavljaju zajedničke odlike novonastajućih tržišta kapitala.

Treba imati u vidu činjenicu da su svi, u literaturi i praksi široko primenjeni modeli merenja tržišnog rizika razvijeni i testirani na zrelim tržištima kapitala (izrazito likvidnim tržištima na kojima se trguje različitim vrstama i velikim brojem finansijskih instrumenata). Međutim, pomenute karakteristike novonastajućih tržišta predstavljaju izazov za teoriju i praksu modelovanja tržišnog rizika, te se neophodnim čini testiranje aplikativne validnosti široko prihvaćenih GARCH modela u uslovima koji vladaju na novonastajućim tržištima kapitala. Stoga je cilj empirijskog istraživanja da se na osnovu istorijskih prinosa tržišnih indeksa Beogradske berze – Belex15 i Belexline, korišćenjem ekonometrijske aparature, predloži specifikacija koja se može koristiti za predviđanje volatilnosti u budućem vremenskom periodu.

ISPITIVANJE SPECIFIKACIJA FINANSIJSKIH VREMENSKIH SERIJA

Volatilnost se javlja kao posledica slučajnih promena cena finansijskih instrumenata. Ona predstavlja meru disperzije prinosa finansijske aktive u nekom vremenskom intervalu i odnosi se na varijansu (σ^2) ili standardnu devijaciju (σ) uzorka opservacija.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(r_t - \bar{r})^2 \quad (1)$$

Pri čemu je r_t prinos finansijske aktive u vremenu t, dok je $\bar{r}$ prosečan prinos u toku vremenskog intervala, a N broj dana trgovanja. U istraživanjima se koriste logaritamske serije prinosa.[1]

$$r_t = \log P_t - \log P_{t-1} = \log\frac{P_t}{\log P_{t-1}} = \log\left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}\right), t = 1,2,\ldots,n \quad (2)$$

Prinosi akcija, berzanskih indeksa, kao i deviznih kurseva često pokazuju sledeće karakteristike: (Mandelbrot, B., 1963, str. 394 – 419).

- *leptokurtozis:* funkcija raspodele finansijske aktive ima „teže“ repove, tj. veću verovatnoću nastanka ekstremnih vrednosti u odnosu na standardnu normalnu Gaussovu raspodelu. Fenomen „težih“ repova poznat je i kao prevelika

1 Umesto relativnih prinosa koji nemaju svojstvo aditivnosti, koriste se logaritamski prinosi, zbog osobine aditivnosti. Pored toga, GARCH model zahteva prinose umesto cena, tako da se logaritmovanjem prinosa vrši transformacija podataka u stacionarnu vremensku seriju. Na osnovu Stephen J. Taylor-ovog razvoja (1994), vidimo da je logaritamski prinos, r_t, t = 1,2, ..., n približno jednak relativnom prinosu $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$, t = 1,2, ..., n.

spljoštenosti (engl. excess kurtosis). Ove osobine funkcije raspodele nazivaju se leptokurtozis.

- *heteroskedastičnost finansijskih vremenskih serija:* osnovna pretpostavka klasičnog modela najmanjih kvadrata je pretpostavka o konstantnoj varijansi slučajne greške (homoskedastičnost). U modelima u kojima varijanse slučajnih greški nisu jednake, odnosno kada se očekuje rast varijabiliteta slučajne greške za različite vrednosti ili intervale vrednosti analiziranih podataka, prisutan je problem heteroskedastičnosti.[2] Drugim rečima, volatilnosti nisu vremenski konstantne, tj. velike i male vrednosti logaritamskih prinosa imaju tendenciju grupisanja u klastere, što pokazuje da postoji zavisnost u krajevima distribucije. Benoit Mandelbrot je rekao: „Velike promene u prinosu prate velike promene prinosa i male promene prinosa prate male promene prinosa" (Mandelbrot, B., 1967, str. 396). Prisustvo heteroskedastičnosti doprinosi pojavi leptokurtozisa raspodele kratkoročnih prinosa, ali se ispravnim modeliranjem volatilnosti dobija uslovna raspodela prinosa koja ne odstupa previše od Gaussove raspodele.

- *efekat leveridža*; promene cene finansijske aktive pokazuju negativnu korelisanost sa promenama u volatilnosti. Fisher Black je preko efekta leveridža objasnio tendenciju volatilnosti da više raste sledeći veliki cenovni pad nego sledeći cenovni rast iste apsolutne vrednosti (Black, F., 1976, str. 179). Za prinose finansijske aktive, negativni šok ima veću uticaj na volatilnost nego pozitivan šok istog intenziteta.

- *dugoročna zavisnost u podacima:* autokorelacija apsolutnih i kvadriranih vrednosti logaritamskih prinosa značajno je različita od nule čak i na velikim lagovima, što pokazuje prisustvo vremenski uslovljene zavisnosti u dugom roku.

- *tendencija Gaussovom rasporedu sa produženjem vremenskog horizonta:* distribucije logaritamskih prinosa u dužem vremenskom periodu (mesečni, polugodišnji i godišnji podaci) približavaju se normalnom Gausovom rasporedu u odnosu na frekventnije podatke (dnevni i intradnevni logaritamski prinosi).

Imajući u vidu zaključke o karakteristikama finansijskih vremenskih serija, ekonometrijski izazov je na osnovu informacija iz prošlosti predložiti specifikaciju koja se može koristiti za predviđanje sredine i varijanse prinosa finansijske aktive. U teoriji i praksi se primenjuje veliki broj specifikacija za opisivanje i predviđanje srednje

2 Iako su ocene dobijene primenom metoda najmanjih kvadrata u prisustvu heteroskedastičnosti nepristrasne, ocena varijanse slučajne greške je potcenjena i intervali poverenja uži nego što bi trebalo da budu i samim tim nepouzdani.

vrednosti prinosa aktive. Međutim, tek sa uvođenjem ARCH/GARCH modela dolazi do razvoja specifikacija za opisivanje uslovne varijanse tih prinosa. Ovi modeli prisustvo heteroskedastičnosti ne tretiraju kao problem koji je neophodno otkloniti ili korigovati, već kao nejednake varijanse koje je moguće modelirati. Primena ovih modela otklonila je manjkavost metode najmanjih kvadrata i potvrdila mogućnost predviđanja varijanse svake od slučajnih greški.

MATEMATIČKO MODELIRANJE VOLATILNOSTI

Pre uvođenja ARCH modela korišćen je metod klizeće standardne greške (engl. rolling standard error) koji je izračunavao standardnu grešku na osnovu informacija koje najskorije prethode trenutku posmatranja. Na primer, standardna greška se za svaki dan izračunava korišćenjem podataka iz prethodnog meseca (poslednja 22 dana). Metod pretpostavlja da je varijansa sutrašnjih prihoda ponderisan prosek kvadrata reziduala poslednja 22 dana, pri čemu je ponder za svaki dan isti. Međutim, kako su događaji iz bliže prošlosti relevantniji za sadašnju vrednost prihoda, to je neophodno dodeliti im veći ponder. Pored toga, nedostatak modela je i u pretpostavci da opservacije stare više od mesec dana treba ponderisati nulom (Engle, 2001: strana 160).

Robert F. Engle (1982) je dao prvu formulaciju tzv. ARCH (engl. Autoregresive Conditional Heteroskedasticity - Autoregresivna uslovna heteroskedastičnost) modela kojim je eksplicitno prikazao vremenski promenljivu uslovnu varijansu. ARCH model opisane pondere posmatra kao parametre koje je potrebno oceniti i omogućava da se na osnovu podataka iz uzorka odrede najbolji ponderi za potrebe predviđanja varijanse.

GARCH parametrizacija, koju je predložio Tim Bollerslev (1986) (Bollerslev, T, 1986. str. 307-327) (engl. Generalized Autoregresive Conditional Heteroskedasticity – Generalizovana autoregresivna uslovna heteorskedastičnost) predstavlja uopšteniji model u odnosu na ARCH model[3], autoregresivan je jer opisuje feedback mehanizam koji povezuje prošle sa sadašnjim vrednostima, uslovni jer varijansa zavisi od prošlih informacija i obuhvata vremensku nestabilnost varijanse (tj. za vreme nekih perioda varijansa može biti relativno niska, dok za vreme drugih

3 GARCH model volatilnost opisujemo preko grešaka modela iz prošlosti (kao i kod ARCH modela), ali i preko prošlih varijansi, što i predstavlja generalizaciju ARCH modela.

može biti relativno visoka). GARCH je tehnika modeliranja vremenskih serija, koja koristeći se prošlim vrednostima varijansi i prošlim predviđanjima varijanse, predviđa vrednosti varijanse u budućnosti. Model pretpostavlja ponderisani prosek kvadrata reziduala iz prošlosti, pri čemu opadajuća vrednost pondera za podatke u prošlosti ne dostiže vrednost nula.

Najčešće primenjivana specifikacija GARCH modela afirmisala je predviđanje varijanse u narednom periodu pomoću ponderisanog proseka dugoročnog kretanja varijanse, varijanse predviđene za tekući period i nove informacije sadržane u kvadratu reziduala poslednje opservacije. Navedeno pravilo ažuriranja informacija predstavlja primer adaptivnog ponašanja i može se tretirati kao Bajesov pristup ažuriranja informacija.

Osnovna ideja GARCH modela je razlikovanje uslovne i nezavisne varijanse inovacionog procesa (ε_t). Termin uslovna govori o eksplicitnoj zavisnosti od prošlih operacija, dok se nezavisnost varijanse odnosi na nepostojanje eksplicitnog znanja o prošlosti koje bi značajno uticala na dugoročna ponašanja u budućnosti. Uslovna varijansa, prema GARCH modelu, ima autoregresivnu strukturu i pozitivnu korelisanost sa prošlim vrednostima. Stoga se uslovna varijansa GARCH modela (σ_t – standardna devijacija u trenutku t) definiše kao funkcija odsečka (ω – konstantni član), šoka iz prethodnog perioda (α – parametar koji određuje koliko jako promena prinosa utiče na volatilnost) i varijanse iz prethodnog perioda (β – parametar koji određuje promenu volatilnosti u vremenu).

GARCH model ima fleksibilniju parametarsku strukturu nego ARCH i pripada klasi determinističkih uslovnih heteroskedastičnih modela u kojima je uslovna varijansa funkcija promenljivih koje su dostupne u trenutku t. Za vremensku seriju kažemo da poseduje GARCH efekat ako je vremenska serija heteroskedastična, tj. ako joj se varijansa menja u vremenu, a ko je varijansa konstantna u vremenu vremenska serija je homoskedastična.

ARCH (1) model

ARCH model uslovnu varijansu predstavlja kao linearnu kombinaciju grešaka iz prošlosti, ε_t, t = 1, 2 ..., gde je r_t – prinos u trenutku t, dok je ε_t – greška koja se pravi prilikom linearne regresije (Engle, R, 1982, str. 987-1008).

$$r_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t \quad (3)$$
$$\mu_t = \mu$$

$$\text{ARCH}(1): \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon^2{}_{t-1} \quad (4)$$

$$\text{ARCH}(m): \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon^2{}_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon^2{}_{t-2} + \ldots + \alpha_m \varepsilon^2{}_{t-m} \quad (5)$$

$$\alpha_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad (6)$$
$\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, i.i.d.[4]

Uslovna varijansa šoka u trenutku t je funkcija kvadrata šokova (novosti ili grešaka, ε) iz prošlosti, pri čemu je potrebno da uslovna varijansa bude nenegativna. Ako je $\alpha_1 = 0$, uslovna varijansa je konstantna i uslovno homosekdastična. Pretpostavka da α_m budu nenegativni je lako narušiva. Primetno je da pozitivni i negativni šokovi imaju isti efekat na volatilnost, odnosno da ne postoji efekat leveridža.

GARCH (1,1) model

Bollerslev (1986) je razvio realniji GARCH model, kao odgovor na teškoće prilikom ocenjivanja ARCH(p) modela, i što $\rho(\varepsilon^2_{t-2}, \varepsilon^2_{t-3})$, $\rho(\varepsilon^2_{t-3}, \varepsilon^2_{t-4})$, itd. opadaju veoma sporo.[5] (Bollerslev, T, 1986, str. 307-327)

$$\text{GARCH}: \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon^2{}_{t-1} + \beta_1 \sigma^2{}_{t-1}, \quad \varepsilon_t \big| I_{t-1} \succ N(0, \sigma^2) \quad (7)$$

$$\text{GARCH}(p,q): \sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varepsilon^2{}_{t-j} + \sum_{k=1}^{q} \beta_k \sigma^2{}_{t-k} \quad (8)$$

Uslovna varijansa se predviđa na osnovu prošlih predviđanja varijanse (σ^2_{t-1}) i realizacija same varijanse u prošlosti (ε^2_{t-1}). Jednačina (7) opisuje GARCH (p,q) model. Kada je p = 0, imamo ARCH (q) model, koga je razvio Engle. Kada je p = 0 i q = 0, varijansa procesa je beli šum sa varijansom ω.

4 Skraćenica i.i.d. označava "independently and identically distributed", odnosne slučajne promenljive ε_t imaju istu raspodelu i nezavisne su.

5 Da bi ARCH model bio precizniji i bolje potrebno je dosta veliko q (broj sabiraka u ARCH modelu), dok je praksa pokazala je dovoljan GARCH (1,1) da bi se prilično tačno opisao veliki broj finansijskih serija.

Jednačine (7) i (8) matematički prikazuju i fenomen grupisanja volatilnosti, kada veliki poremećaji bilo kog znaka, imaju tendenciju postojanosti i uticaja na predviđanja volatilnosti. Kašnjenje (docnje, lagovi) dužine p i q, određeno je intenzitetima koeficijenata α_j i β_k koji utiču na stepen postojanosti.

GARCH model sa manjim brojem članova ima bolje performanse nego ARCH model sa mnogo parametara. Korisnost GARCH specifikacije je da takva specifikacija dozvoljava da se varijansa razvije u vremenu na sveobuhvatniji način nego što je to u jednostavnoj specifikaciji ARCH modela. Najpoznatiji model, koji ima i najveću primenu je GARCH (1,1) model koji sadašnju volatilnost povezuje sa volatilnošću iz prethodnog perioda, kao i sa kvadratom prinosa: (Bollerslev, T, 1986. str. 307-327)

$$\text{GARCH}(1,1): \sigma^{2}{}_{t+1} = \omega + \alpha r^{2}{}_{t} + \beta\ {}^{2}{}_{t} \quad (9)$$

On se može napisati i u drugačijem obliku koji je nekada lakši za primenu:

$$\text{GARCH}(1,1): \sigma^{2}{}_{t} = \omega + \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i-1}^{k} \left(\alpha_1 \varepsilon^{2}{}_{t-i} + \beta_1\right)\right] \quad (10)$$

Oznaka (1,1) je standardna notacija, u kojoj prvi broj označava broj uključenih autoregresionih lagova, odnosno ARCH članove jednakosti, dok se drugi broj odnosi na broj uključenih lagova pokretnih proseka i predstavlja broj GARCH članova u jednakosti.[6] Da bismo obezbedili ograničenost i pozitivnost nezavisne varijanse uvodimo ograničenja na parametre: $\omega > 0$, $\alpha + \beta < 1$. Pored toga, potrebno je da ograničimo moguće vrednosti GARCH parametara tako da uslovna varijansa uvek bude pozitivna: (Bollerslev, T, 1986. str. 307-327)

Uslov stabilnosti GARCH (1,1) procesa je: $\omega > 0,\ \alpha, \beta \geq 0,\ (\alpha + \beta) < 1$ (11)

Odsečak (ω) je jednak γV_L pri čemu je V_L prosečna varijansna stopa.

$$\gamma + \alpha_1 + \beta_1 = 1 \quad (12)$$

6 Ponekad je za modele u koje je uključeno više od jednog laga neophodno pronaći adekvatnu prognozu varijanse.

Prosečna varijansa stopa u dugom roku je:

$$V_L = \frac{\omega}{1-\alpha_1-\beta_1} \quad (13)$$

Na osnovu prethodnih obrazaca možemo da zaključimo da se prosečna varijansna stopa povećava sa povećanjem odsečka, uslovne varijanse i varijanse iz prethodnog perioda. Parametri u GARCH modelu se najčešće ocenjuju metodom maksimalne verodostojnosti[7] (engl. maximum-likelihood) koji uključuje iterativnu proceduru da bi se odredile vrednosti parametara maksimizirajući funkciju verodostojnosti. Procedura ocenjivanja parametara zasnovana na maksimizaciji funkcije verodostojnosti pretpostavlja da je raspodela za ε_t, t=1,2 ... takva da sve slučajne promenljive imaju isto očekivanje i disperziju i da su međusobno nezavisne. Neka je L verovatnoća da se uz date parametre α, β i ω dogodi određena vremenska serija prinosa. U obrnutom slučaju, parametre možemo pronaći ako nađemo maksimum funkcije L, uz ograničenja definisana uslovima (11). Maksimizacija funkcije L po parametrima modela vrši se pomoću numeričkog algoritma za traženje maksimuma funkcije uz zadate uslove na parametre (Alexander, C., 2008, str. 137).

$$\ln L(\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\ln(\sigma^2{}_t) + \left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}\right)^2\right] \quad (14)$$

pri čemu θ predstavlja parametre iz jednačine uslovne varijanse. Potpuno ekvivalentno, problem možemo svesti na postupak minimizacije: (Alexander, C., 2008, str. 138).

$$-2\ln L(\theta) = \sum_{t=1}^{T}\left[\ln(\sigma^2{}_t) + \left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}\right)^2\right] \quad (15)$$

U simetričnom GARCH modelu θ = (ω, α i β). Zavisnost logaritamske verodostojnosti od ω, α i β se javlja jer je σ_t data jednačinom (6).

Pored navedenih prednosti GARCH modela, neophodno je istaći i ograničenja modela: prinosi nisu uvek ili za sve serije stacionarni, ne opisuju efekat leveridža (te

7 Metoda maksimalne verodostojnosti predstavlja metodu izbora jedne vrednosti parametara modela kao ocene parametara, ali tako da funkcija verodostojnosti ima što je moguće veću vrednost.

se u tu svrhu preporučuje korišćenje E-GARCH) i fraktalnost u serijama. Budući da su ovi modeli parametarski modeli oni bolje rezultate daju u stabilnim tržišnim uslovima. Velike i nagle promene tržišnih uslova (poput tržišnih kriza) zahtevaju strukturne promene modela. Heteroskedastičnost ne opisuje sva ponašanja karakteristična za debele repove. Prema tome, ARCH/GARCH modele treba koristiti u sklopu većih sistema za podršku finansijskom odlučivanju.

IGARCH model sa dugom memorijom

Obrazac (7) možemo napisati u donekle izmenjenoj formi: (Alexander, C., 2008, str. 157).

$$\text{GARCH}(1,1): \sigma_{t+1}^{2} = \omega + \alpha(r^{2}_{t} - \sigma^{2}_{t}) + (\alpha + \beta)\,\sigma^{2}_{t} \quad (16)$$

Pri čemu član ($r^2_t - \sigma^2_t$) predstavlja šok u seriji, dok parametar α određuje jačinu tog šoka na volatilnost u budućnosti. Recipročna vrednost sume parametara $\alpha + \beta$ pokazuje kolikom se brzinom taj efekat guši. Ukoliko je $\alpha + \beta$ mali broj, tada se procena varijabilnosti brzo približava bezuslovnoj varijabilnosti. Kada je $\alpha + \beta = 1$, to ukazuje da će se pojaviti jedinični koren u uslovnoj varijansi i dobijamo IGARCH model (engl. Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). Drugim rečima, šokovi iz prošlosti neće iščeznuti već će ostati perzistentni veoma dugo u vremenu (Alexander, C., 2008, str. 121).

$$\text{IGARCH}: \sigma^{2}_{t+1} = \omega + (1-\beta_{1})\,\varepsilon^{2}_{t-1} + \beta_{1}\,\sigma^{2}_{t-1} \quad (17)$$

Model koji se često u praksi koristi za kratkoročna predviđanja je nešto jednostavniji metod eksponencijalno ponderisanih pokretnih proseka (engl. Exponentially Weighted Moving Average, EWMA). Poznata metodologija J.P. Morgan / Reuters RISKMETRICS koristi ovaj model prilikom određivanja rizika (J. P. Morgan, 1996). Polazna pretpostavka modela je da skorije inovacije više utiču na volatilnost u trenutku t+1. Inovacijama iz prošlosti se dodeljuju različiti ponderi (J. P. Morgan, 1996, str. 79):

$$\text{EWMA}: \sigma^{2}_{t+1} = \lambda\sigma^{2}_{t} + (1-\lambda)\,\varepsilon^{2}_{t} \quad (18)$$

Parametar λ predstavlja faktor gušenja, tj. njena recipročna vrednost pokazuje koliko daleko inovacija ili slučajni šok u jednom periodu utiče na volatilnost u budućim periodima. EWMA model predstavlja specijalni slučaj IGARCH modela, uz $\omega = 0$.

E-GARCH (1,1)-GED

Daniel B. Nelson je 1991. godine predstavio eksponencijalni ili E-GARCH model koji dozvoljava pojavu asimetričnih šokova u volatilnosti. (Nelson, D. B., 1991, str. 347-370)

$$E-GARCH\,(1,1): \log(\sigma^2{}_t) = \omega + \beta \log(\sigma^2{}_{t-1}) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sigma^2{}_{t-1}}} + \alpha \left[\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{\sigma^2{}_{t-1}}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \quad (19)$$

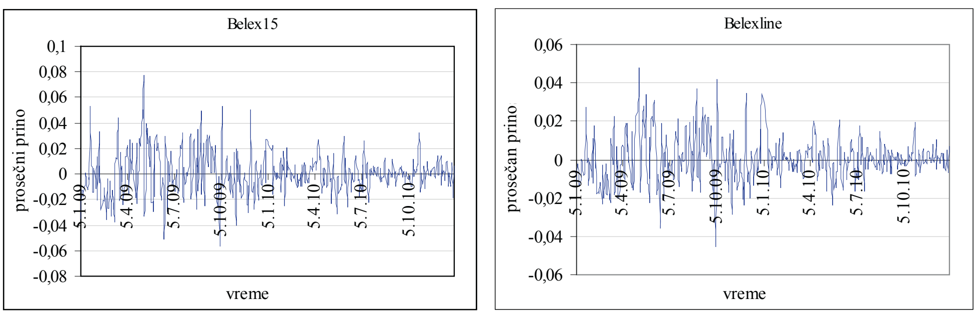
Pri čemu je γ koeficijent leveridža, odnosno asimetrična komponenta modela.

REZULTATI EMPIRIJSKOG ISTRAŽIVANJA

Dizajn istraživanja i podaci

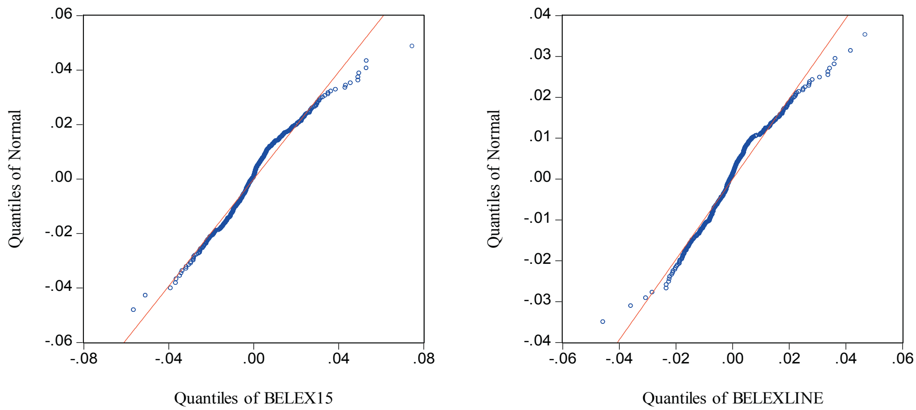
Podaci korišćeni u ovom radu su zaključne cene tržišnih indeksa Beogradske berze Belex15 i Belexline. Estimacioni period obuhvata uzorak od 505 dnevnih opservacija prinosa (od 31.12.2008. do 31.12.2010. godine). Cene iz estimacionog perioda su korišćene prilikom izračunavanja sumarne statistike prinosa i procene GARCH modela. U radu su korišćene kontinuelno obračunate logaritamske stope prinosa.

Slika 1. Dnevne vrednosti logaritamskih prinosa Belex15 i Belexline



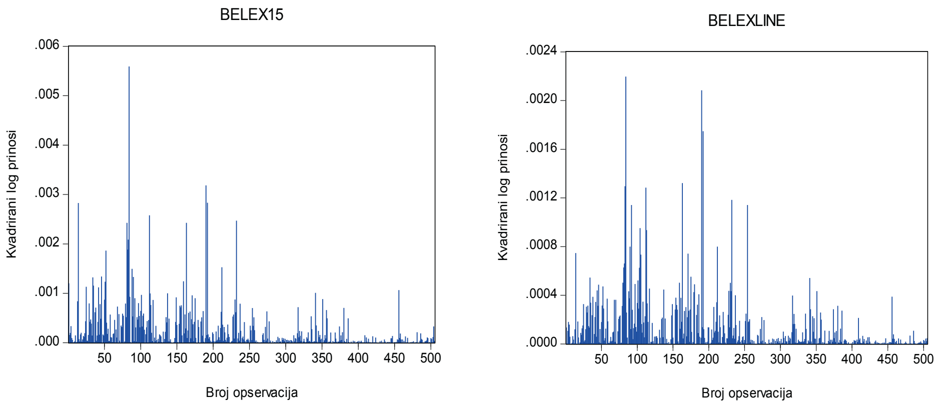
Na slici 1. prikazani su dnevni prinosi Belex15 i Belexline u estimacionom periodu. Vizuelnom analizom se odmah uočava da su srednji prinosi konstantni, ali da se varijanse menjaju tokom vremena oko „normalnog" nivoa i da formiraju klastere. Periodi visoke volatilnosti jasno su diferencirani od perioda niske volatilnosti. U narednom delu rada prezentovani su rezultati formalnih testova GARCH efekata prinosa, koji potvrđuju pretpostavku da su efekti promenljive varijanse evidentni u posmatranim vremenskim serijama prinosa. Korišćenje GARCH modela se stoga potvrđuje kao nezaobilazna aparatura prilikom modeliranja rizika. Korišćenjem QQ dijagrama (engl. quantile-quantile plot), izvršena je provera u kojoj meri empirijske distribucije standardizovanih prinosa posmatranih indeksa odstupaju od Gaussove distribucije, pri čemu je dijagram linearan ako empirijska distribucija odgovara pretpostavljenoj distribuciji.

Slika 2. Gaussov QQ dijagram



QQ dijagrami na slici 2. pokazuju da su krajevi distribucije oba indeksa deblji u odnosu na krajeve koje pretpostavlja Gaussova normalna distribucija i potvrđuju pretpostavku o postojanju leptokurtozisa. Budući da uslovnu varijabilnost nije moguće direktno posmatrati, u praksi se najčešće koriste kvadrirane vrednosti logaritamskih prinosa.

Slika 3.a. Kvadrirani logaritamski prinosi Belex15 i Belexline



Na slici 3.a. prikazane su kvadrirane vrednosti prinosa Belex15 i Belexline uz pripadajuće autokorelacione funkcije predstavljene na slici 3.b.. Najpre uočavamo da obe vremenske serije poseduju „šiljke" koji ukazuju na prisustvo varijacije uslovne varijanse. Na slici uočavamo da ekstremne vrednosti u većoj meri doprinose uslovnoj volatilnosti, dominirajući dijagramom kvadrata logaritamskih prinosa. Korelogramom na slici 3.b. prikazane su korelacije između tekuće vrednosti i pojedinih vrednosti vremenske serije preko autkorelacione funkcije (AC) i parcijalne autokorelacione funkcije (PAC). Posmatranjem autokorelacione funkcije kvadrata reziduala, jasno se uočava da kretanje prinosa Belex15 i Belexline sledi ARCH proces. Iako vrednosti autukorelacionih koeficijenata nisu visoke, one su statistički značajne.

Slika 3.b. Korelogram autokorelacione funkcije kvadriranih logaritamskih prinosa

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.305	0.305	47.274	0.000
		2	0.274	0.199	85.404	0.000
		3	0.159	0.036	98.311	0.000
		4	0.178	0.088	114.43	0.000
		5	0.141	0.047	124.56	0.000
		6	0.134	0.040	133.79	0.000
		7	0.093	0.004	138.20	0.000
		8	0.139	0.075	148.18	0.000
		9	0.128	0.048	156.63	0.000
		10	0.064	-0.041	158.76	0.000
		11	0.110	0.056	165.01	0.000
		12	0.092	0.026	169.43	0.000
		13	0.093	0.013	173.92	0.000
		14	0.080	0.013	177.29	0.000
		15	0.100	0.041	182.49	0.000
		16	0.138	0.077	192.49	0.000
		17	0.132	0.035	201.68	0.000
		18	0.081	-0.019	205.13	0.000
		19	0.075	-0.000	208.12	0.000
		20	0.201	0.156	229.51	0.000
		21	0.117	-0.007	236.72	0.000
		22	0.124	0.007	244.86	0.000
		23	0.056	-0.034	246.50	0.000
		24	0.126	0.057	255.01	0.000
		25	0.044	-0.056	256.06	0.000
		26	0.034	-0.044	256.67	0.000
		27	0.102	0.100	262.23	0.000
		28	0.149	0.077	274.16	0.000
		29	0.186	0.086	292.81	0.000
		30	0.123	0.005	300.99	0.000
		31	0.145	0.042	312.31	0.000
		32	0.126	0.015	320.91	0.000
		33	0.139	0.016	331.45	0.000
		34	0.032	-0.072	332.00	0.000
		35	0.021	-0.064	332.24	0.000
		36	0.098	0.061	337.48	0.000

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.314	0.314	50.143	0.000
		2	0.292	0.215	93.580	0.000
		3	0.137	-0.003	103.10	0.000
		4	0.192	0.113	122.02	0.000
		5	0.135	0.041	131.38	0.000
		6	0.133	0.030	140.39	0.000
		7	0.132	0.059	149.42	0.000
		8	0.239	0.169	178.80	0.000
		9	0.193	0.057	198.09	0.000
		10	0.121	-0.043	205.67	0.000
		11	0.111	0.020	212.07	0.000
		12	0.138	0.055	221.91	0.000
		13	0.097	-0.017	226.80	0.000
		14	0.071	-0.019	229.45	0.000
		15	0.106	0.055	235.35	0.000
		16	0.133	0.039	244.56	0.000
		17	0.133	0.017	253.82	0.000
		18	0.071	-0.027	256.45	0.000
		19	0.104	0.043	262.17	0.000
		20	0.261	0.216	298.18	0.000
		21	0.200	0.047	319.43	0.000
		22	0.218	0.073	344.65	0.000
		23	0.103	-0.045	350.32	0.000
		24	0.143	-0.001	361.17	0.000
		25	0.081	-0.032	364.70	0.000
		26	0.029	-0.075	365.17	0.000
		27	0.088	0.062	369.32	0.000
		28	0.091	-0.032	373.77	0.000
		29	0.198	0.095	394.85	0.000
		30	0.079	-0.060	398.22	0.000
		31	0.110	0.009	404.78	0.000
		32	0.058	-0.027	406.58	0.000
		33	0.055	-0.030	408.22	0.000
		34	0.008	-0.006	408.26	0.000
		35	-0.010	-0.062	408.32	0.000
		36	0.061	0.043	410.36	0.000

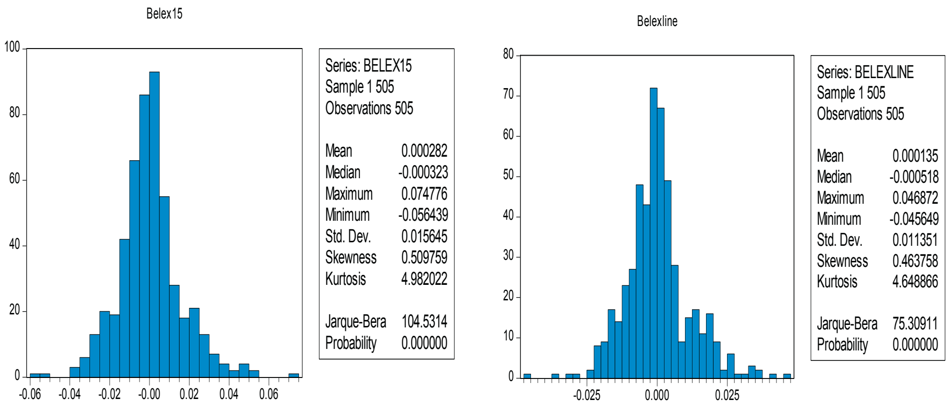
Vrednost autokorelacionog koeficijenta na prvoj docnji je 0,305 (Belex15) i 0,314 (Belexline), a zatim postepoeno opada do vrednosti 0,098 (belex15) i 0,061 (Belexline) na 36-toj docnji. U poslednjoj koloni prikazane su p-vrednosti, koje su nula do vrednosti četvrte decimale, na osnovu kojih odbacujemo hipotezu o odsustvu ARCH strukture. Posmatrani autokorelacioni koeficijenti, AC i PAC ukazuju na mogućnost primene GARCH (1,1) modela. Pored toga, AC i PAC pokazuju sporo geometrijsko opadanje, što se može interpretirati kao jedan od znakova dugoročne uslovljenosti.

Deskriptivna statistika i preliminarni rezultati dobijeni ocenom GARCH (1,1) modela

Naredni grafički prikazi predstavljaju histograme frekvencija kontinuelnih stopa prinosa analiziranih finansijskih vremenskih serija Belex15 i Belexline.

Koeficijent asimetrije (engl. skewness) u slučaju normalnog rasporeda uzima vrednost 0. Iznos ovog koeficijenta od 0,5098, odnosno 0,4638 pokazuju blago pozitivno asimetričnu distribuciju prinosa Belex15 i Belexline, respektivno. Koeficijent spljoštenosti (engl. kurtozis) u slučaju normalnog rasporeda uzima vrednost 3. Iznos ovog koeficijenta od 4,9820, odnosno 4,6489, pokazuje da su date finansijske vremenske serije izduženije u odnosu na normalan raspored, odnosno da postoji veći broj vrednosti stopa prinosa koje su približno jednaki nuli. JB statistika (Jarque, Bera, 1987, str. 163–172) za normalni raspored testira nultu hipotezu o postojanu normalnog rasporeda. S obzirom da data vrednost ove statistike prelazi kritičnu od vrednost od 9,21 za rizik greške od 5 %, zaključujemo da se odbacuje nulta hipoteza i da serija stopa prinosa indeksa cena akcija ne prati normalan raspored.

Slika 4. Histrogrami frekvencija prinosa Belex15 i Belexline



Dakle, raspodela posmatranih vremenskih serija je izduženija, špicastija i ima debele repove. Pod pretpostavkom postojanja 250 opservacija u jednoj godini izračunata je bezuslovna varijansa (i.i.d.) Belex15 koja iznosi 24, 47 % i Belexline 17,95 %.

Tabela 1. Deskriptivna statistika

	Belex15	Belexline
Uzorak (broj opservacija)	505	505
Prosečna vrednost prinosa	0,0282 %	0,0135 %
Medijana	- 0,0323 %	- 0,0518 %
Maksimalna vrednost prinosa	7,4776 %	4,6872 %
Minimalna vrednost prinosa	- 5,6439 %	- 4,5649 %
Standardna devijacija prinosa	1,5645 %	1,1351 %
Koeficijent asimetrije (α_3, Skewness)	0,5098	0,4638
Koeficijent spljoštenosti (α_4, Kurzosis)	4,9820	4,6489
Jarque-Bera (verovatnoća)	104,5314 0,0000	75,3091 0,0000

Rezultati dobijeni ocenjivanjem GARCH (1,1) modela dati su u tabeli 2. Procena parametara jednačine varijanse izvršena je primenom ML - ARCH (Marquardt) metoda uz normalnu distribuciju. Prilikom procene parametara za maksimiziranje funkcije verodostojnosti bilo je potrebno 11 iteracija za Belex15, dok u slučaju Belexline proces konvergira nakon 10 iteracija. Standardne greške dobijene su robusnim metodom Bollerslev-Wooldridge (Bollerslev, Wooldridge 1993).

Tabela 2. Parametrizacija GARCH (1,1) modela

BELEX15				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	8,71E-05	0,000454	0,191937	0,8478
Variance Equation				
C	6,26E-06	1,94E-06	3,233564	0,0012
RESID(-1)^2	0,259454	0,045862	5,657241	0,0000
GARCH(-1)	0,739808	0,034847	21,23033	0,0000
R-squared	-0,000156	Mean dependent var		0,000282
Adjusted R-squared	-0,006145	S.D. dependent var		0,015645
S.E. of regression	0,015693	Akaike info criterion		-5,795195
Sum squared resid	0,123387	Schwarz criterion		-5,761733
Log likelihood	1467,287	Hannan-Quinn criter.		-5,782070
Durbin-Watson stat	1,333738			
BELEXLINE				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-4,85E-05	0,000336	-0,144278	0,8853
Variance Equation				
C	3,31E-06	8,68E-07	3,808102	0,0001
RESID(-1)^2	0,283180	0,060260	4,865278	0,0000
GARCH(-1)	0,712963	0,042629	16,72476	0,0000
R-squared	-0,000261	Mean dependent var		0,000135
Adjusted R-squared	-0,006250	S.D. dependent var		0,011351
S.E. of regression	0,011387	Akaike info criterion		-6,461673
Sum squared resid	0,064959	Schwarz criterion		-6,428211
Log likelihood	1635,572	Hannan-Quinn criter.		-6,448548
Durbin-Watson stat	1,212132			

Jednačina prinosa Belex15 ima oblik $r_t = 0{,}0000871 + \varepsilon_t$, a Belexline $r_t = -0{,}0000485 + \varepsilon_t$.

Tri ocenjena koeficijenta u jednačini varijanse predstavljaju C – konstantu jednačine, ARCH (1) - koeficijent ispred kvadrata reziduala sa pomakom od jednog perioda (λ) i GARCH(1) - koeficijent ispred uslovne varijanse (β), takođe sa pomakom od jednog perioda. Uočavamo da je zbir ocenjenih koeficijenata (α i β) manji od 1 što je potreban uslov da varijansa bude stabilna. Kako je ovaj zbir vrlo blizak vrednosti 1, reč je procesu koji sporo oscilira oko srednje vrednosti i pokazuje efekte duge memorije u seriji (šokovi u serijama prinosa sporo se guše u seriji), što je čest slučaj kod tržišnih indeksa. Vrednosti ova dva parametra potvrđuju pretpostavku da se u slučaju tržišnih indeksa sa efektima duge memorije mogu primeniti i jednostavniji modeli IGARCH tipa, koje smo u tu svrhu i posebno obradili, pa i EWMA.

Jednačina varijanse Belex15: $\sigma_t^2 = 0{,}00000626 + 0{,}2595\,\sigma_{t-1}^2 + 0{,}7398\,\varepsilon_{t-1}^2$ (20)

Jednačina varijanse Belexline: $\sigma_t^2 = 0{,}00000331 + 0{,}2832\,\sigma_{t-1}^2 + 0{,}7130\,\varepsilon_{t-1}^2$ (21)

U tabeli 3. prikazana je parametrizacija E-GARCH (1,1)-GED modela. Prilikom procene parametara za maksimiziranje funkcije verodostojnosti bilo je potrebno 42 iteracije za Belex15, dok u slučaju Belexline proces konvergira nakon 26 iteracija.

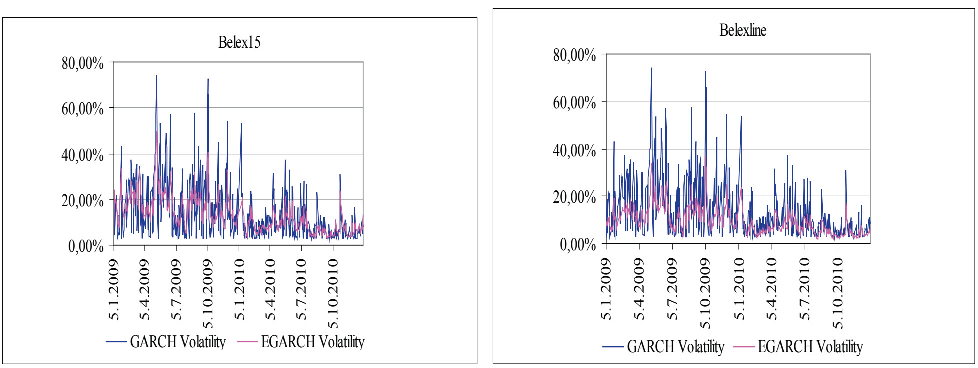
Durbin-Watson statistika pokazuje meru serijskih korelacija, odnosno autokorelacija reziduala. Uvažavajući date kritične vrednosti, ukoliko se statistika nađe između vrednosti 1 i 3, što je i slučaj sa testiranim modelima (tabele 2 i 3) može se konstatovati da nema značajne autokorelacije reziduala koja nepovoljno utiče na karakteristike modela. Više vrednosti log verodostojnosti E-GARCH (1,1)-GED modela, kao i niže vrednosti Akaike i Schwarz kriterijuma potvrđuju pretpostavku da E-GARCH (1,1)-GED model bolje opisuje uslovnu volatilnost za Belex15 i Belexline. U odnosu na GARCH (1,1), E-GARCH (1,1)-GED poseduje dva unapređenja: obuhvata efekat asimetrije i distribuciju koja nije normalno raspoređena, te iz tog razloga predstavlja i bolji estimacioni model u uslovima opaženim na domaćem tržištu. E-GARCH (1,1)-GED model pokazuje pozitivnu i značajnu vrednost parametra γ za Belex15 i Belexline, što se interpretira kao snažniji uticaj pozitivnih šokova iz prošlosti na buduću volatilnost.

Tabela 3. Parametrizacija E-GARCH (1,1)-GED modela

BELEX15				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	7,04E-06	0,000442	0,015929	0,9873
Variance Equation				
ω	-0,700340	0,204822	-3,419272	0,0006
γ	0,400358	0,081457	4,914937	0,0000
q	0,000254	0,040089	0,006347	0,9949
β	0,955023	0,019621	48,67317	0,0000

GED PARAMETER	1,515769	0,129449	11,70935	0,0000
R-squared	-0,000310	Mean dependent var		0,000282
Adjusted R-squared	-0,010333	S.D. dependent var		0,015645
S.E. of regression	0,015726	Akaike info criterion		-5,824987
Sum squared resid	0,123406	Schwarz criterion		-5,774794
Log likelihood	1476,809	Hannan-Quinn criter.		-5,805300
Durbin-Watson stat	1,333532			
BELEXLINE				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-3,15E-05	0,000331	-0,095088	0,9242
Variance Equation				
ω	-0,815195	0,213220	-3,823267	0,0001
γ	0,436146	0,091305	4,776811	0,0000
q	0,005719	0,041843	0,136666	0,8913
β	0,949142	0,018477	51,36874	0,0000
GED PARAMETER	1,628413	0,129971	12,52904	0,0000
R-squared	-0,000215	Mean dependent var		0,000135
Adjusted R-squared	-0,010237	S.D. dependent var		0,011351
S.E. of regression	0,011409	Akaike info criterion		-6,480683
Sum squared resid	0,064956	Schwarz criterion		-6,430490
Log likelihood	1642,372	Hannan-Quinn criter.		-6,460996
Durbin-Watson stat	1,212188			

Slika 5. Procena volatilnosti Belex15 i Belexline modelima GARCH (1,1) i E-GARCH (1,1)-GED



Slika 5. ilustruje komparativnu analizu GARCH (1,1) i E-GARCH (1,1)-GED modela procene volatilnosti Belex15 i Belexline. Na grafikonu primećujemo da u periodu značajno povećane volatilnosti (na primer, 08.05.2009. i 05.10.2009.), E-GARCH-GED model ne predviđa toliko visoku kratkoročnu volatilnost kao standardni GARCH (1,1) model. Za oba indeksa, E-GARCH (1,1)-GED volatilnost

je manja u odnosu na simetričnu GARCH volatilnost, i E-GARCH (1,1)-GED je manje reaktivan na šokove na tržištu. Takođe, E-GARCH (1,1)-GED volatilnosti nisu ograničene kao GARCH volatilnosti, tako da pri nižim nivoima volatilnosti ne uočavamo ekstremno niske vrednosti, tzv. „podove" kao sa standardnim GARCH modelom, što je još jedna prednost korišćenja E-GARCH (1,1)-GED, jer volatilnosti retko imaju toliko niske vrednosti. Drugim rečima, rezultati sprovedenog empirijskog istraživanja su pokazali da E-GARCH (1,1)-GED poseduje bolje specifikacije prilikom objašnjenja Belex15 i Belexline uslovne volatilnosti u odnosu na standardni GARCH (1,1) model.

ZAKLJUČAK

Za ocenu rizika portfolija finansijskih instrumenata, pojedinačnih hartija od vrednosti ili valuta koristi se predviđanje drugih momenata u vremenskim serijama. Brojne empirijske studije pokazale su heteroskedastičnost finansijskih vremenskih serija. Stoga su u pokušaju da se prevaziđu manjkavosti standardne devijacije kao mere rizika, razvijeni su GARCH modeli, kao alatka prilikom upravljanja rizicima, koji efekte heteroskedastičnosti uzimaju u obzir. Ono što potvrđuje njihovu atraktivnost je postojanje velikog broja podvrsta osnovnog modela, koji svakom dodatnom korekcijom daju bolje rezultate i prevazilaze izvesne nedostatke. U ovom radu pokazano je kako se pomoću GARCH modela mogu predvideti volatilnosti akcijskih indeksa Beogradske berze. U radu je utvrđeno da uslovna varijansa pokazuje značajnu vremensku promenljivost za tržišne indekse Belex15 i Belexline. Empirijska analiza sprovedena u ovom radu je potvrdila validnost E-GARCH (1,1)-GED modela imajući u vidu karakteristike srpskog tržišta kapitala, prevashodno nisku likvidnost koja se očituje u nesinhronom trgovanju, situaciju kada veća transakcija može da poremeti celokupno tržište, što su u krajnjoj instanci i uzročnici efekta leveridža, i kada empirijske distribucije prinosa odstupaju od normalnog rasporeda.

BIBLIOGRAFIJA

Alexander, C., 2008, „Market Risk Analysis – Practical Financial Econometrics", John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester,

Black, F. 1976. „Studies of stock prices volatility changes", Proceedings of the 976 Meeting of the American Statistical Association, *Business and Economic Statistics Section*, pp. 177-181.

Bollerslev, T., Engle R. F., Nelson D. B. 1993. „*The Handbook of Econometrics*", Vol. 4, 1993, pp. 2959-3038.

Bollerslev, T. 1986. „Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity“, *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.

Bolleslev, T., Wooldridge, J. M. 1993. „Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances“, *Econometric Reviews,* 11:2, pp. 143-72.

Engle, R. 1982. „Autorregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of United Kingdom Inflation“, *Econometrica*, 50, pp. 987-1008.

Engle, R. 2001. „The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics“, *Journal of Economic Perspectives*, 15, pp. 157-168.

Fama, E. 1965. „The Behavior of Stock Market Prices“, *Journal of Business*, 38, pp. 34-105.

Jarque, C. M., Bera, A. K. 1987. „A Test for Normality of Observations and Regression Residuals“, *International Statistical Reviews,* 55, pp. 163–172, 1987.

J. P. Morgan and Reuters, 1996. *Risk Metrics: Technical Document*.

Mandelbrot, B. 1967. „The Variation of Some Other Speculative Prices“, *The Journal of Business*, Vol. 40, Issue 4, pp. 393 – 413.

Mandelbrot, B., 1963, „The Variation of Certain Speculative Prices“, *The Journal of Business,* Vol. 36, No. 4, pp. 394 – 419.

Nelson, D. B. 1991. „Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach“, *Econometrica*, Vol. 59, pp. 347-370.

Taylor, S. J. 1994. „Modelling Stochastic Volatility: A Review and Comparative Study“, *Mathematical Finance*, 4, pp. 183-204.

MODELLING VOLATILITY OF BELGRADE STOCK EXCHANGE MARKET INDICES: BELEX15 AND BELEXLINE

Borjana B. Mirjanić[1], Nenad B. Branković[2]
[1]Lecturer, MSc, Belgrade Business School – Higher Educational Institution of Applied Studies, Belgrade
(borjana.mirjanic@bbs.edu.rs)
[2]Lecturer, MSc, Belgrade Business School – Higher Educational Institution of Applied Studies, Belgrade
(nenad.brankovic@bbs.edu.rs)

Abstract: *For measuring the risk to which the portfolio of financial assets is exposed, it is necessary to forecast the second moment of finacial time series. The empirical investigations shows that financial time series are heteroskedastic. To overcome the weakness of the standard deviation as risk measure, the appropriate mathematical models were developed, particulary GARCH models which take into account heteroskedastic effect. This paper investigates the behavior of stock market indices returns in an emerging stock market and presents empirical analysis of Serbia capital market volatility – na-*

mely Belgrade Stock Exchange. In this paper we applied comparative analysis of GARCH (1.1) and E-GARCH (1.1)-GED model on daily data for Belex15 and Belexline in order to examine its implication on risk forecasting in the case of asymmetric shocks in volatility and empirical distribution deviations from normal Gaussian pattern which are one of the main characteristics at emerging capital markets .

Key words: *volatility, conditional standard deviation, GARCH (1,1) model, E-GARCH (1,1)-GED, Belgrade Stock Exchange.*

JEL Classification: *C22, C52,G10, G12.*