<u>Originalni naučni rad</u>

UDK 339.176:005.932

DOI 10.7251/SVR1510030M

MODEL ZALIHA SA PROMJENJIVOM CIJENOM I POZNATOM VJEROVATNOĆOM

Dr sc Branka Marković, prof. dr Marinko Markić[1]

Nezavisni univerzitet Banja Luka

Apstrakt: Problem zaliha postaje sve relevantniji u modernoj ekonomiji. Problem se javlja kao problem zalihe sirovina i problema zaliha gotove robe. I jedna i druga grupa problema ne tretiraju se u izolaciji, nego uključuju i šire aspekte povezane s poslovanjem. Zbog prirode problema postoji opšti model koji uključuje sva rješenja za optimizaciju zaliha. Opšta formulacija rješenja može se izraziti u smislu određivanja volumena zaliha uz minimalne troškove. Ovaj zahtjev se čini jednostavan, ali postavljanje i rješavanje problema može biti kompleksno, i ovisi o velikom broju elemenata. Na prvom mjestu je potrebno odrediti troškove, ali moraju se uzeti u obzir različite proizvodne organizacije. U radu se raspravlja o slučaju zaliha sa različitim cijenama i sa poznatom vjerovatnoćom.

Ključne riječi: *zalihe, model, cijena, vjerovatnoća.*

1. UVOD

Između ostalih modela zaliha interesantan je model zaliha sa promjenjivim cijenama i sa poznatom vjerovatnoćom. Pored već promatranih troškova uzimaju se u obzir eksplicitno i drugi elementi, u prvom redu cijene promatranog proizvoda i vjerovatnoća nastanka određenih aktivnosti. Razmotrićemo problem optimiziranje zaliha pod uslovom da cijena poznate vjerovatnoće figurira eksplicitno u modelu. Model zaliha sa poznatom vjerovatnoćom je uvijek moguće primijeniti u saobraćajnim preduzećima, kada preduzeće koristi velik broj istih vozila koja se zbog kvara često nalaze van saobraćaja. Ako preduzeće ima na zalihama rezervne dijelove, popravka se može izvršiti bez zastoja. Nedostatak rezervnih dijelova prouzrokuje gubitke.

2. MODEL ZALIHA SA PROMJENJIVOM CIJENOM

Definišimo elemente modela:

a) c_2 – fiksni troškovi za jednu narudžbu;

b) px– troškovi – odnosno vrijednost narudžbe od x jedinica:

c) $c_2\frac{xT}{2k}\, r$- troškovi stokiranja u intervalu Δt ;

d) $px\frac{xT}{2k}\, r$- troškovi stokiranja za px u intervalu Δt,

[1] Profesori ekonomije na NUBL Banja Luka

gđe je $\frac{xT}{2k}$ korektivni faktor u intervalu Δt, to jest

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{\Delta t}{x}=\frac{\Delta t}{2}=\frac{xT}{2k}.$$

Zbir troškova od a) do d) daje troškove u intervalu Δt, to jest

$$c_2+px+c_2\frac{xT}{2k}r+px\frac{xT}{2k}r, \qquad (1)$$

a ukupne troškove za cijelo razdoblje dobijemo poslije množenja (1) sa brojem narudžba $\frac{k}{x}$,

odnosno

$$C=\frac{c_2k}{x^2}+pk+\frac{c_2T}{2}r+\frac{pxT}{2}r. \qquad (2)$$

Optimalnu veličinu narudžbe *x* određujemo iz

$$C'=-\frac{c_2k}{x^2}+\frac{pT}{2}r,$$

odakle, poslije rješavanja, $C'=0$, imamo

$$x_{opt}=\sqrt{\frac{c_2}{p}\cdot\frac{2K}{rT}}. \qquad (3)$$

sa minimalnim troškovima

$$C_{min}=\sqrt{2rpc_2kT}+pk+\frac{c_2T}{2}r, \qquad (4)$$

pri čemu je $C''(x_{opt})=\frac{2c_2k}{x^3}>0.$

Pri nepromijenjenoj cijeni *p*, broj narudžbi u razdoblju *T jeste*

$$\frac{k}{x_{opt}}=\sqrt{\frac{r}{2}\cdot\frac{p}{c_2}\cdot kT}, \qquad (5)$$

a interval između narudžbina

$$\Delta t=\frac{T}{k}x_{opt}=\sqrt{\frac{2}{r}\cdot\frac{c_2}{p}\cdot\frac{T}{k}} \qquad (6)$$

Dobijeni rezultati značajni su u prvom redu zbog toga što u njima cijena proizvoda figurira eksplicitno. Primjećujemo da pri ostalim konstantnim uslovima veličina narudžbi stoji u obrnutoj srazmjeri sa cijenom, to jest ukoliko je cijena proizvoda viša, utoliko je narudžba po obimu manja (3), i obrnuto. Iz (5) vidimo da je broj narudžbi srazmjeran cijeni, i veći je kad je cijena viša.[2]

Iskoristimo dobijene rezultate u jednom specijalnom slučaju, kada cijena *p* varira u zavisnosti od veličine narudžne. Naime, čest je slučaj da se u zavisnosti od obima narudžbe daje određeni popust, tako da se kupac nalazi pred više alternativnih mogućnosti u pogledu konačne odluke. Ispitajmo neke od tih mogućnosti.[3]

---

[2] Charnes, A., Cooper, W. and Henderson, A.: An Introduction to Linear Programming, John Wiley, New York, 1956.

[3] Dantzig, G.B.: Linear Programming and Extensions, Princenton University Press, Princeton, 1963.

Označimo sa $x = m$ veličinu narudžbe za koju proizvođač daje popust. Drugim riječima, proizvođač prodaje proizvod X po cijeni p_1 za svaku narudžbu koja je po obimu manja od m jedinica, a po cijeni $p_2 < p_1$ za narudžbe koje su jednake ili veće od m jedinica.[4]

Prema izrazu (3), proizlazi da će optimalni obim narudžbe za različito p stajati u sljedećem odnosu:

$$x_{opt}\,(p_1) < x_{opt}(p_2)\; za\; p_1 > p_2 \quad (7)$$

odnosno, uopšteno

$$x_{opt}\,(p_1) < x_{opt}(p_2) < \; \dots \; < x_{opt}(p_n)(8)$$

$$\text{za} \;\; p_1 > p_2 > \; \dots \; > p_n.$$

Sa druge strane, ukupni troškovi izraženi jednačinom (2) za $x < m$ i $x \; > m$ jedinica iznose:

$$C(x) = \frac{c_2 k}{x} + p_1 k + \frac{c_2 T}{2} r + \frac{p_1 x T}{2} r(9)$$

$$C(m) = \frac{c_2 k}{m} + p_2 k + \frac{c_2 T}{2} r + \frac{p_2 m T}{2} r\,. \qquad (10)$$

Poređenjem (9) i (10) dolazimo do sljedećih nejednakosti

$$\left(\frac{c_2 k}{x} + p_1 k + \frac{c_2 T}{2}\, r\right) > \left(\frac{c_2 k}{m} + p_2 k + \frac{c_2 T}{2}\, r\right), \qquad (11)$$

dok se za posljednje članove $\frac{p_1 x T}{2}\, r$ i $\frac{p_2 m T}{2}\, r$ne može ništa određeno reći.

3. MODEL ZALIHA SA POZNATOM VJEROVATNOĆOM

Definišimo kako se dolazi do opšteg kriterija za određivanje optimuma.

Pođimo od funkcije troškova:

$$C(z) = \alpha \sum_{r=0}^{z} (z - r) P(r) + \beta \sum_{r=z+1}^{\infty} (r - z) P(r)$$

i odredimo

$$C(z+1),$$

to jest

$$C(z+1) = \alpha \sum_{r=0}^{z+1} (z + 1 - r) P(r) + \beta \sum_{r=z+2}^{\infty} (r - z - 1) P(r)$$

Model zaliha sa poznatom vjerovatnoćom možemo posmatrati u dva specijalna slučaja. Prvo, kada je obim zaliha da je $(\alpha + \beta)\; P\;(\,r < z_0\,) - \beta = 0$, što ima za posljedicu $C\;(Z_0 + 1) = C(z_0)$. Prema jednadžbi, odnosno nejednadžbama imamo[5]:

---

[4] I. Fischer: Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices, 1892.

[5] A. Conrnot : Recherches sur les principes matématiques de la thèorie des richesses, 1838.

$$P(r < z_0) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

ili

$$P(r \leq z_0 - 1) < \frac{\beta}{\alpha + \beta} = P(r < z_0)$$

Drugo, kad je obim zaliha z_0 takav da je

$$P(r < Z_0 - 1) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

$$P(r < Z_0 - 1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} < P(r < z_0).$$

U oba slučaja optimalna vrijednost od *z* nije jednoznačna, već se javlja alternativno kao $z_0$ili $z_0 + 1$ u prvom, odnosno kao $z_0 - 1$ ili z_0u drugom, sa istim minimalnim troškovima.

Problem se može posmatrati i u kontinuelnom slučaju, tako da se troškovi za neprekidnu aleatornu mogu pisati[6]

$$C = \alpha \int_0^s (z - r) f(r) dr + \beta \int_s^\infty (r - z) f(r) dr$$

Gdje je $\int_{r1}^{r2} f(r)dr$ vjerovatnoća javljanja događaja u intervalu (r_1, r_2), a $F(z) \int_0^z f(r)dr$.

Preko funkcije moguće je odrediti optimalnu vrijednost *z*, za koju su troškovi minimalni. Primjetimo da se to postiže diferenciranjem integrala po parametru, to jest za

$$L(x) - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dy$$

Imamo:

$$\frac{dL}{dx} - \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\sigma f(x,y)}{\sigma x} dy + f(b,x)\frac{db}{dx} - f(a,x)\frac{da}{dx}$$

Za funkciju troškova imamo:

$$\frac{dL}{dz} = \infty \int_o^z f(r)dr - \beta \int_z^\infty f(r)dr$$

$$= \propto F(z) - \beta(1 - F(z))$$

$$= (\alpha + \beta)F(z) - \beta$$

Kako α i β nisu jednovremeno jednaki nuli a $f(z_0) \geq 0$, to će biti uvjet za minimum funkcije C biti ispunjen u oba slučaja (veće ili jednako nuli), sa tim što za $f(z_0) + 0$ funkcija $f(r) > 0$, kao neprekidna funkcija, mora imati nulu kao minimu za z_0.

[6]A. Marshall: Principles of Economics, MacMilon and Co., London 1890.

ZAKLJUČAK

Opšta formulacija problema može se izraziti na sljedeći način: odrediti obim zaliha tako da odgovarajući troškovi budu minimalni. I dok je zahtjev relativno jednostavan, postavljanje i rješavanje problema može biti složeno, jer zavisi od velikog broja elemenata. Naime, u prvom redu, potrebno je precizirati o kojim troškovima je riječ, da li se posmatraju samo troškovi stokiranja, ili su druge vrste troškova u proizvodnom procesu. Troškovi proizvodnje različiti su pri različitoj organizaciji proizvodnje, proizvodnje u različitim serijama i tako dalje. Drugim riječima, složenost problema zaliha proizlazi iz toga što se simultano moraju posmatrati tehničko – tehnološki odnosi sa elementima tržišta (ponuda i potražnja) u određenom vremenskom intervalu.

MODEL STOCK WITH VARIABLE PRICE AND KNOW PROBABILITY

Assistant professor Branka Marković PhD, professor Marinko Markić PhD

Abstract: Inventory problem is becoming more relevant in the modern economy. The problem arises as a problem of supplies of raw materials and finished goods inventory problem. And one other group of problems are not treated in isolation, but also includes broader aspects associated with the business. Due to the nature of the problem one general model which includes all solutions optimize inventory. A general formulation solutions can be expressed in terms of determining the volume of stocks at minimal cost. This request seems simple but postavljanje and resolve probleem can be complex, and depends on a large number of elements. In the first place it is necessary to specify the cost but it must take into account the different production organization. This paper discusses the case unit stock with varying prices and with known probability.

Keywords: *stocks, model, price, probability.*

LITERATURA

1. Allen, R.: *Mathematical Analyis for Economists*, Macmillan, London, 1953.
2. Allen, R.: *Mathematical Economics*, London, 1957.
3. Baumal, W.: *Economic Dyinamics*, New York, 1959.
4. Charnes, A., Cooper, W. and Henderson, A.: *An Introduction to Linear Programming*, John Wiley, New York, 1956.
5. Dantzig, G.B.: Linear Programming and Extensions, Princenton University Press, Princeton, 1963.
6. Conrnot: Recherches sur les principes matématiques de la thèorie des richesses, 1838.
7. Marshall: Principles of Economics, MacMilon and Co., London 1890.
8. Fischer: Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices, 1892.
9. Pareto, V.: Cors d´economic politique, 1896.
10. Fischer: Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices, 1892.
11. Schultz, H.: Statistical Lews of Demand and Supply, 1928.
12. Moor, H.: Forecasting the Yield and Price of Cotton, New York, 1917.
13. Persons, W.: Indicis of Business, «The Review of Economic Statistics» VOL. 1, Cambridge, 1919.
14. Klark: Business Acceleration and the Law of Demand, «Journal of Political Economy».