Proceedings of the Faculty of Economics in East Sarajevo
Year 2014, Issue 8, pp. 145-157
Received: 31 October 2013
UDC 336.226.3:336.71
DOI: 10.7251/ZREFIS1408145P
Review Article

Весна Пророк

Економски факултет Пале,
Универзитет у Источном Сарајеву,
БиХ

✉ vesna.prorok@ekofis.org

МОДЕЛИРАЊЕ РОЧНЕ СТРУКТУРЕ КАМАТНИХ СТОПА НА БАЗИ ЈЕДНОФАКТОРСКОГ ВАСИЧЕК МОДЕЛА

MODELING THE TERM STRUCTURE OF INTEREST RATES BASED ON THE ONE-FACTOR VASICEK MODEL

Резиме: *Каматне стопе и модели њихове динамике постали су једна од најзначајнијих области модерне финансијске теорије у посљедње двије деценије. Иако је појава финансијских деривата на хартије од вриједности са фиксним приносом умногоме допринијела да се развију иновативнији и прецизнији модели који описују динамику каматних стопа, ипак се још увијек првобитни и једноставнији модели нису заборавили. Васичек модел, који је приказан у раду, представља један од првих и најпознатијих модела каматних стопа који се, због своје једноставности, још увијек активно користи. Циљ рада је да се покаже како и на који начин се једнофакторски Васичек модел користи приликом формирања рочне структуре каматних стопа, те како оцијенити параметре самог модела на бази историјских података о кретању краткорочних каматних стопа. Оцјена параметара приказана је на симулираној серији података примјеном метода најмањих квадрата и метода максималне вјеродостојности.*

Кључне ријечи: *Васичек модел, Ито-ва лемма, метод најмањих квадрата, метод максималне вјеродостојности.*

JEL класификација: *G12, C01, C02, C13, C15, C58, C87.*

Summary: *The interest rates and models of their dynamics have become one of the most important areas of modern financial theory in the last two decades. Although the appearance of financial derivatives on fixed-income securities has contributed greatly to the development of more innovative and more precise models that describe the dynamics of interest rates, however, there are still some original and simpler models which have not been forgotten. Vasicek model, which is shown in this paper, is one of the first and most popular interest rate models, which, due to its simplicity, is still actively used. The aim of this paper is to show the way in which one-factor Vasicek model is used in the formation of the term structure of interest rates, as well as to show how to estimate the parameters of this model using historical data of interest rates. Estimation of the parameters is shown in a series of simulated data using the method of least squares and maximum likelihood estimation method.*

Key words: *Vasicek model, Ito's Lemma, The Method of Least Squares, Maximum Likelihood Estimation Method*

JEL classification: *G12, C01, C02, C13, C15, C58, C87*

1. УВОД

Разумијевање и моделирање рочне структуре каматних стопа представља једну од најизазовнијих тема у оквиру савремене финансијске теорије и праксе. Поље изучавања које се базира на каматним стопама је изузетно широко и као такво привлачи значајну пажњу великог броја финансијских аналитичара, како практичара, тако и теоретичара. Ова тврдња огледа се и у чињеници да је у посљедњој деценији публикован велики број научних радова из ове области, посебно оних који се односе на вредновање опција и на каматне стопе. Анализа рочне структуре каматних стопа може се сматрати као базна, у смислу да се каматне стопе користе у свим аспектима финансијског вредновања, процјене ризика на бази формирања различитих мјера ризика, те формирања стратегија заштите од таквог ризика. Ово се првенствено односи на вредновање и процјену ризика финансијских деривата на каматне стопе, што може представљати веома сложен и комплексан проблем у зависности од модела који се користи за описивање понашања каматних стопа. У раду ће се описати Васичек модел, који представља један од најранијих и уједно најзначајнијих једнофакторских модела рочне структуре каматних стопа. Циљ рада је да се покаже како и на који начин се једнофакторски Васичек модел користи приликом формирања рочне структуре каматних стопа, те како оцијенити параметре самог модела на бази историјских података. Оцјена параметара приказана је на симулираној серији података примјеном метода најмањих квадрата и метода максималне вјеродостојности.

2. ОСНОВНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ ВАСИЧЕК МОДЕЛА

Једнофакторски модели који су се први пут појавили седамдесетих година двадесетог вијека, још увијек се у многим банкама и на финансијским тржиштима користе као основни модели приликом формирања рочне структуре каматних стопа. Један од разлога је тај што су једнофакторски модели били први модели којима се описало кретање каматних стопа, док се други разлог, можда и важнији, огледа у чињеници да су заиста једноставни за коришћење. Важно је напоменути да не постоји модел који у потпуности описује кретање каматних стопа на тржишту. Како су каматне стопе различите на различитим финансијским тржиштима, веома је тешко пронаћи модел који вјеродостојно описује тако разнолике и компликоване структуре каматних стопа. Један од најранијих и најпознатијих једнофакторских модела који се појавио 1977. године је Васичек модел, познат и као Gauss-ov модел или Ornstein-Uhlenbeck модел који се стабилизује око средње вриједности (mean-reverting).

Према Васичек моделу кретање краткорочне каматне стопе представља стохастички процес дефинисан на сљедећи начин:

$$dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t \tag{1.1}$$

гдје су:

r_t – каматне стопа у тренутку t,

α – коефицијент брзине обртаја око дугорочне средње вриједности,

μ – ниво дугорочне средње вриједности,

σ – волатилност краткорочне каматне стопе.

Параметри α, μ и σ су позитивне константе, док dW_t представља прираст стандардног Wiener-овог процеса.

Модел има како својих предности, тако и недостатака. Предност Васичек модела је та што пружа експлицитно рјешење. С друге стране, главни недостатак лежи у чињеници да каматне стопе, слиједећи Васичек модел, могу заузимати негативне вриједности, а познато је да је таква претпоставка на стварним финансијским тржиштима нереална.

У моделу параметар μ представља дугорочну средњу вриједност каматне стопе. Овај параметар указује на то да стохастиски процес кретања каматних стопа посједује карактеристику стабилизовања око средње вриједности. Ако је тренутна каматна стопа већа од дугорочне средње вриједности $(r_t > \mu)$, коефицијент $\alpha > 0$ ће проузроковати да помјерање (дрифт) каматне стопе буде негативно, односно да њено кретање буде усмјерено у правцу дугорочне средње вриједности. Слично томе, ако је тренутна каматна стопа нижа од дугорочне средње вриједности $(r_t < \mu)$, коефицијент $\alpha > 0$ ће проузроковати позитивно помјерање каматне стопе усмјерено у правцу дугорочне средње вриједности. Овакво кретање каматних стопа је и економски оправдано. Ниже каматне стопе подстичу привредну активност, повећавају тражњу за финансијским средствима, изазивајући тим економску експанзију. Временом, то неминовно води цикличном паду екомске активности, а самим тим и расту каматних стопа које теже неком природном нивоу. Обртнута ситуација се дешава када су каматне стопе високе.

Ако би каматну стопу написали у експлицитном облику $f(t, r_t) = e^{\alpha t}(r_t - \mu)$, онда би се за рјешавање стохастичке диференцијалне једначине из израза (1.1) могла примијенити Итова лема на сљедећи начин:

$$\begin{aligned} df &= \alpha e^{\alpha t}(r_t - \mu)dt + e^{\alpha t} dr_t \\ &= \alpha e^{\alpha t}(r_t - \mu)dt + \alpha e^{\alpha t}(\mu - r_t)dt + \sigma e^{\alpha t} dW_t \\ df &= \sigma e^{\alpha t} dW_t \end{aligned} \tag{1.2}$$

Интеграцијом израза (1.2) добијамо:

$$e^{\alpha t}(r_t - \mu) - (r_0 - \mu) = \sigma \int_0^t e^{au} dW_u$$

Даљим сређивањем израза добија се:

$$r_t = e^{-\alpha t}\left[r_0 + \mu\left(e^{\alpha t} - 1\right) + \int_0^t \sigma e^{\alpha u} dW_u \right]$$

$$r_t = r_0 e^{-\alpha t} + \mu\left(1 - e^{-\alpha t}\right) + \sigma \int_0^t e^{\alpha(u-t)} dW_u \tag{1.3}$$

Рјешење стохастичке диференцијалне једначине из израза (1.1) за неки интервал између s и t, уз услов $0 \le s < t$, може се представити у облику

$$r_t = r_s e^{-\alpha(t-s)} + \mu\left(1 - e^{-\alpha(t-s)}\right) + \sigma \int_{t=s}^t e^{\alpha(u-t)} dW_u \tag{1.4}$$

Интеграл на десној страни израза (1.3) $\sigma \int_0^t e^{\alpha(u-t)} dW_u$ слиједи нормалан распоред чија је средња вриједност једнака нули, а варијанса:

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^t \sigma e^{\alpha(u-t)} dW_u\right)^2\right] &= E\left[\int_0^t \left(\sigma e^{\alpha(u-t)}\right)^2 du\right] \\ &= \sigma^2 e^{-2\alpha t} E\left[\int_0^t e^{2\alpha u} du\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right) \end{aligned}$$

Условна очекивана вриједност и варијанса промјенљиве r_t ако је познато r_0 биће:

$$E_0[r_t] = \mu + (r_0 - \mu)e^{-\alpha t}$$

$$Var_0[r_t] = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right)$$

Ако је позната вриједност r_s, условна очекивана вриједност и варијанса промјенљиве r_t биће једнака:

$$E_s[r_t] = \mu + (r_s - \mu)e^{-\alpha(t-s)} \tag{1.5}$$

$$Var_s[r_t] = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t-s)}\right) \tag{1.6}$$

Са порастом времена, очекивана вриједност тежи дугорочној средњој вриједности, а варијанса остаје ограничена, указујући на то да се процес стабилизује око средње вриједности.

То значи да је процес, посматрајући у дужем временском периоду, стационаран и да посједује нормалан распоред са средњом вриједношћу μ и варијансом $\frac{\sigma^2}{2\alpha}$.

3. ВРЕДНОВАЊЕ БЕСКУПОНСКИХ ОБВЕЗНИЦА НА БАЗИ ВАСИЧЕК МОДЕЛА

Извођење обрасца за вредновање бескупонских обвезница заснива се на чињеници да r_u представља Марковљев процес. Другим ријечима, ако би кренули од тренутка t са циљем да одредимо вриједност краткорочне каматне стопе r_u у тренутку u, гдје је $u \geq t$, потребно је само да познајемо вриједност краткорочне каматне стопе r_t.

Цијена обвезнице у тренутку t са роком доспијећа T представља фунцкију краткорочне каматне стопе изражена на сљедећи начин:

$$\begin{aligned} B(t,T,r_t) &= E\left[\exp\left(-\int_t^T r_u du | r_t\right)\right] \\ &= E\left[\exp\left(-\int_t^T r_u(r_t) du\right)\right] \end{aligned} \tag{2.1}$$

гдје је r_u стохастички процес описан Васичек моделом:

$$r_u = e^{-\alpha(u-t)}\left[r_t + \mu\left(e^{\alpha(u-t)} - 1\right) + \sigma\int_t^u e^{\alpha(v-t)} dW_v\right]$$

На основу израза (2.1) добија се да је цијена бескупонске обвезнице једнака (Nazir 2009):

$$B(t,T,r_t) = \exp\left(E\left[-\int_t^T r_u(r_t) du\right] + \frac{1}{2} Var\left(-\int_t^T r_u(r_t) du\right)\right) \tag{2.2}$$

гдје је

$$\begin{aligned} E\left[-\int_t^T r_u(r_t) du\right] &= -\int_t^T \left(r_t e^{-\alpha(u-t)} + \mu\left(1 - e^{-\alpha(u-t)}\right)\right) du \\ &= -\left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}\right) r_t + \mu\left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} - (T-t)\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$Var\left(-\int_t^T r_u(r_t) du\right) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\left((T-t) - \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}\right) - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}\right)^2 \tag{2.4}$$

Уврштавајући изразе (2.3) и (2.4) у израз (2.2) добија се коначно затворено рјешење за цијену бескупонске обвезнице:

$$B(t,T,r_t) = \exp\left(\begin{array}{l} -\left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}\right) r_t + \mu\left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} - (T-t)\right) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}\right) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(T-t) - \\ \frac{\sigma^2}{4\alpha}\left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}\right)^2 \end{array}\right)$$

$$= \exp\left(-A(t,T)r_t + \mu A(t,T) - \mu(T-t) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}A(t,T) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{4\alpha}A(t,T)^2\right)$$
$$= \exp(-A(t,T)r_t + D(t,T)) \tag{2.5}$$

гдје је

$$A(t,T) = \frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}$$
$$D(t,T) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right)[A(t,T)-(T-t)] - \frac{\sigma^2 A(t,T)^2}{4\alpha}$$

На основу израза (2.5) може се закључити да је за утврђивање цијене бескупонске обвезнице примјеном Васичек модела потребно уврдити параметре модела (μ,α,σ), познавати вриједност краткорочне каматне стопе у тренутку t, те рок доспијећа обвезнице T. Полазећи од израза за цијену бескупонске обвезнице, лако се могу израчунати стопе приноса до доспијећа на бази Васичек модела. Узимајући у обзир то да је стопа приноса до доспијећа на бази континуираног капиталисања дефининисана као

$$B(t,T,r_t) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

одакле је

$$R(t,T) = -\frac{\ln B(t,T,r_t)}{T-t} \tag{2.6}$$

једноставним уврштавањем израза (2.5) у израз (2.6) добија се функција стопе приноса до доспијећа изражена на сљедећи начин:

$$R(t,T) = \frac{A(t,T)r_t - D(t,T)}{T-t}$$

У наставку рада приказана су два метода оцјене параметаре Васичек модела на основу историјских података о кретању краткорочних каматних стопа, који су добијени симулацијом у програмском софтверу R.

4. ТЕСТИРАЊЕ ОСНОВНИХ ПРЕТПОСТАВКИ ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ ЗА ПРИМЈЕНУ ВАСИЧЕК МОДЕЛА

Чињеница је да је на стварним финансијским тржиштима веома тешко пронаћи краткорочне каматне стопе чије се кретање може описати примјеном Васичек модела, тако да ћемо оцјену параметара Васичек модела приказати на симулираној серији података која у потпуности задовољава основну претпоставку модела која се односи на стабилиозовање временске серије око дугорочне средње вриједности.

Ако је позната вриједност r_s у тренутку s, гдје је $s<t$, случајна промјенљива r_t имаће нормалан распоред чија су очекивана вриједност и варијанса:

$$r_t \sim N\left(r_s e^{-\alpha(t-s)} + \mu\left(1-e^{-\alpha(t-s)}\right), \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1-e^{-2\alpha(t-s)}\right)\right)$$

Симулација Васичек модела извршена је на бази рекурзивне формуле (Sypkens 2010):

$$r_{t_{ii+1}} = r_{t_i} e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)} + \mu\left(1-e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)}\right) + \sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\alpha(t_{i+1}-t_i)}}{2\alpha}} Z_{i+1} \tag{3.1}$$

гдје Z представља случајну промјењиву која има нормалан распоред са средњом вриједношћу нула и варијансом 1 (Van den Berg 2011). R-код за симулацију Васичек модела приказан је у оквиру 1.

Оквир 1. R-код за симулацију Васичек модела

```
Vasicek_simulation<-function(mu,alpha,sigma,r0,n,dt,d){
r=matrix(nrow=n,ncol=d)
r[,1]=r0
        for(i in 1:(d-1))
        r[,i+1]=r[,i]*exp(-alpha*dt)+mu*(1-exp(-alpha*dt))+
        sigma*sqrt((1-exp(- 2*alpha*dt))/(2*alpha))*rnorm(n,0,1)
r
}
```

Извор: обрада аутора

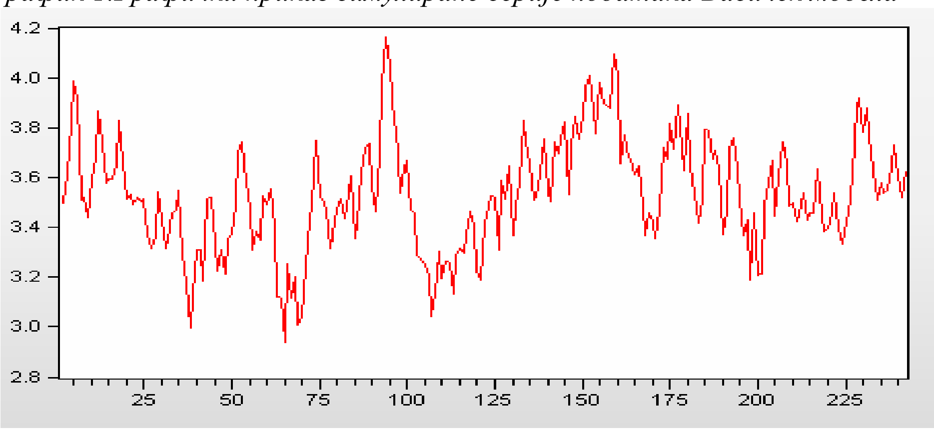
У табели 1 приказана је симулирана серија података са параметрима $dt = 0.25$, $\mu = 3.5$, $\alpha = 1$, $\sigma = 0.30$, $r_0 = 3.5$, док је на графику 1 дат њен графички приказ.

Табела 1: Симулирана серија Васичек модела

i	t_i	r_i
0		3,5000
1	0,25	3,6089
2	0,50	3,8134
3	0,75	3,9873
4	1,00	3,9139
5	1,25	3,5084
6	1,50	3,5224
7	1,75	3,4377
8	2,00	3,5963
9	2,25	3,6811
⋮	⋮	⋮
233	58,25	3,5746
234	58,50	3,5398
235	58,75	3,5487
236	59,00	3,6419
237	59,25	3,7322
238	59,50	3,6061
239	59,75	3.5224
240	60,00	3,6258

Извор: обрада аутора

График 1.Графички приказ симулиране серије података Васичек модела



Извор: обрада аутора на бази симулиране серије података

Примјеном одговарајућих тестова испитаћемо да ли симулирана серија из табеле 1.1 испуњава претпоставку Васичек модела, као што је стационарност, односно стабилизовање око дугорочне средње вриједности.

Анализа стационарности временске серије извршена је примјеном проширеног Dickey-Fuller теста (*Augmented Dickey-Fuller Test*), а резултати теста приказани су у табели 2. Приликом примјене проширеног Dickey-Fuller теста тестиран је АР модел првог реда који се у финансијској литератури и користи за описивање кретања каматних стопа.

Табела 2: Проширени Dickey Fuller-ов (Augmented Dickey-Fuller Test) тест провјере стационарности симулиране временске серије

Null Hypothesis: SIMULIRANA_SERIJA has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Fixed)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-5.194331	0.0000
Test critical values:	1% level	-3.457515	
	5% level	-2.873390	
	10% level	-2.573160	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Извор: обрада аутора на бази симулиране серије података.

Резултат проширеног Dickey-Fuller теста показује да је апсолутна вриједност теста већа од апсолутних критичних вриједности за нивое значајности од 1%, 5% и 10%, те на основу тога одбацујемо нулту хипотезу о постојању јединичног коријена и прихватамо алтернативну хипотезу о стационарности серије.

Такође, стационарност временске серије, односно њено стабилизовање око дугорочне средње вриједности може се потврдити и примјеном других тестова, с обзиром на чињеницу да Dickey-Fuller-ов тест јединичног коријена има одређених недостатака и није увијек поуздан. Неки од тестова који се користе у ову сврху, а које ћемо приказати у наставку јесу групни тестови значајности коефицијената корелације реда p, попут тестова *Box-Pierce* и *Ljung-Box*.

Box-Pierce-ов Q^*-тест дефинисан је на сљедећи начин:

$$Q^* = n\sum_{i=1}^{p} \rho^2(p)$$

гдје је n број чланова временске серије, а p највећи ред коефицијената корелације. *Box-Pierce*-ов тест има χ^2 расподјелу

$$Q^* \overset{H_0}{\sim} \chi^2(p)$$

на бази које се врши тестирање нулте хипотезе.

Пошто економетријски програм *Eviews* не пружа могућност употребе Q^* теста, за тестирање постојања аутокорелације користићемо *Ljung-Box* Q-тест који представља модификовани облик *Box-Pierce* теста. Q-тест у коначном узорку тежи χ^2 расподјели са p степени слободе. Q-статистика дефинише се:

$$Q = n(n+2)\sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{\rho}_i^2}{n-i}$$

$$Q \overset{H_0}{\sim} \chi^2(p)$$

Нултом хипотезом Q теста, као што је случај и код Q^* теста, претпоставља се непостојање аутокорелације p реда. Одлука о присутности аутокорелације у посматраној серији доноси се на бази упоређивања вриједности Q теста и теоријске вриједности χ^2 теста за p степени слободе уз одређени степен значајности (Ben Vogelvang 2005).

Табела 3: Корелограм аутокорелације, парцијалне аутокорелације и вриједност Q статистике

Date: 11/05/13 Time: 12:36
Sample: 3 242
Included observations: 240

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.028	0.028	0.1847	0.667
		2	-0.046	-0.047	0.7120	0.700
		3	-0.087	-0.084	2.5565	0.465
		4	-0.010	-0.008	2.5808	0.630
		5	0.055	0.049	3.3417	0.647
		6	0.062	0.052	4.3020	0.636
		7	0.103	0.105	6.9611	0.433
		8	0.030	0.040	7.1873	0.517
		9	-0.056	-0.039	7.9771	0.536
		10	0.052	0.073	8.6642	0.564
		11	0.030	0.025	8.8925	0.632
		12	-0.059	-0.079	9.7857	0.635
		13	-0.018	-0.020	9.8714	0.704
		14	0.025	0.015	10.029	0.760
		15	0.083	0.062	11.799	0.694
		16	-0.055	-0.063	12.583	0.703
		17	-0.047	-0.043	13.169	0.725
		18	0.074	0.085	14.604	0.689
		19	-0.050	-0.050	15.261	0.706
		20	0.018	0.016	15.351	0.756
		21	0.010	0.004	15.376	0.804
		22	0.083	0.082	17.211	0.752
		23	0.004	0.015	17.214	0.799
		24	-0.094	-0.083	19.596	0.719
		25	0.042	0.036	20.069	0.743
		26	-0.060	-0.067	21.055	0.739
		27	-0.020	-0.015	21.165	0.778
		28	0.016	-0.014	21.238	0.815
		29	0.036	0.009	21.598	0.836
		30	0.020	0.025	21.705	0.865

Извор: обрада аутора на бази симулиране серије података.

У табели 3 приказани су корелограми аутокорелационе и парцијалне аутокорелационе функције временске серије, те вриједности Q теста које указују на групну значајност коефицијената корелације реда n. Узето је да највећи ред коефицијената корелације износи 30.

Вриједност *Ljung-Box* Q-теста за ред коефицијената корелације 30 износи:

$$Q = 21.705 < \chi^2_{30,0.05} = 43.773$$

На основу резултата Q теста нулта хипотеза о непостојању аутокорелације реда 30 се прихвата, што значи да се серија стабилизује око средње вриједности.

На бази тестова којима се потврдила стационарност серије и њено стабилизовање око средње вриједности (mean-reverting) закључујемо да су испуњене основне претпоставке за примјену Васичек модела приликом описивања динамике временске серије.

У наставку рада приказаће се два метода оцјене параметара Васичек модела: метод најмањих квадрата и метод максималне вјеродостојности (*Maximum Likelihood Method*). На основу теста нормалности резидуала објашњена је могућност појаве разлике у оцјени параметара приликом примјене наведених метода.

5. ОЦЈЕНА ПАРАМЕТАРА ВАСИЧЕК МОДЕЛА НА БАЗИ МЕТОДА НАЈМАЊИХ КВАДРАТА

Приликом одређивања параметара Васичек модела из израза (1.1) на бази метода најмањих квадрата, потребно је посматрати да између двије сукцесивне вриједности промјенљиве r_{t_i} и $r_{t_{i/1}}$ постоји линеарна веза, која се може изразити на сљедећи начин:

$$r_{t_i} = a + br_{t_{i/1}} + \varepsilon \tag{4.1}$$

гдје је

$$a = \mu\left(1 - e^{-\alpha\Delta t}\right) \qquad b = e^{-\alpha\Delta t} \qquad \varepsilon_{sd} = \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha\Delta t}}{2\alpha}} \tag{4.2}$$

Метод најмањих квадрата заснива се на начелу да су најбољи они параметри a и b за које је сума квадрата разлика између стварних и оцијењених вриједности минимална.

$$F(a,b) := \sum_{i=1}^{n}\left[r_{t_i} - a - br_{t_{i/1}}\right]^2$$

Функција F често се назива функција циља. Потребно је одредити параметре a и b у којима функција F постиже своју минималну вриједност. Проналажењем парцијалних извода функције F по парамтерима a и b и њиховим изједначавањем са нулом, што представља услов локалног екстреме, добијају се сљедећи изрази за оцјену параметара (Sypkens 2010):

$$\hat{b} = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2} \quad , \qquad \hat{a} = \frac{S_y - bS_x}{n}$$

$$\hat{\varepsilon}_{sd} = \sqrt{\frac{nS_{yy} - S_y^2 - \hat{b}\left(nS_{xy} - S_x S_y\right)}{n(n-2)}}$$

гдје је

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} r_{t_{i-1}} \qquad S_y = \sum_{i=1}^{n} r_{t_i}$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} r_{t_{i-1}}^2 \qquad S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} r_{t_i}^2 \qquad S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} r_{t_{i-1}} r_{t_i} \tag{4.3}$$

Уз помоћ оцијењених параметара $\hat{a}$, $\hat{b}$ и $\hat{\varepsilon}_{sd}$, те на бази једначина из израза (4.2) могу се добити вриједности оцијењених параметара Васичек модела $\hat{\mu}$, $\hat{\alpha}$ и $\hat{\sigma}$:

$$\hat{\alpha} = -\frac{\ln \hat{b}}{\Delta t} \quad , \qquad \hat{\mu} = \frac{S_y - \hat{b}S_x}{n\left[1 - \hat{b}\right]}$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\varepsilon}_{sd}\sqrt{\frac{-2\ln \hat{b}}{\Delta t\left(1 - \hat{b}^2\right)}}$$

R-код за оцјену параметара Васичек модела примјеном метода најмањих квадрата приказан је у оквиру 2.

Оквир 2: R-код за оцјену параметара Васичек модела примјеном метода најмањих квадрата

```
Vasicek_OLS<-function(data,dt=0.25){
n=length(data)-1
Sx=sum(data[1:n])
Sy=sum(data[2:(n+1)])
Sxx=sum(data[1:n]^2)
Syy=sum(data[2:(n+1)]^2)
Sxy=sum(data[1:n]*data[2:(n+1)])
b=(n*Sxy-Sx*Sy)/(n*Sxx-Sx^2)
a=(Sy-b*Sx)/n
sd=sqrt((n*Syy-Sy^2-b*(n*Sxy-Sx*Sy))/(n*(n-2)))
alpha_hat=-log(b)/dt
mu_hat=a/(1-b)
sigma_hat=sd*sqrt(-2*log(b)/((1-b^2)*dt))
c(alpha_hat,mu_hat,sigma_hat)
}
```

Извор: обрада аутора

За симулирану серију из табеле 1.1, оцијењени параметри Васичек модела износе:

$$\alpha = 0.9125375 \quad \mu = 3.5336372 \quad \sigma = 0.3006362$$

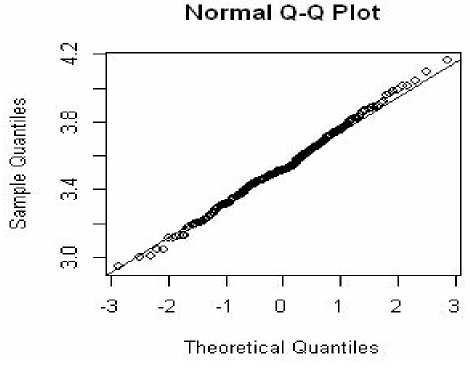
Приликом оцјене параметара потребно је извршити тест постојања нормалног рапореда серије, да би се утврдило да ли метод најмањих квадрата даје добре оцјене параметара. Уколико тест укаже на то да је нарушена претпоставка о нормалном распореду, оцјене параметара методом најмањих квадрата ће још увијек бити непристрасне, али не и ефикасне. У суштини, Gauss-Markova теорема наводи да метод најмањих квадрата представља најбољу линеарну непристрасну оцјену параметера све док су задовољени сљедећи услови:

- средња вриједност резидуала једнака је нули,
- не постоји корелација између резидуала,
- варијанса резидуала је константна.

Међутим, иако метод најмањих квадрата даје најбољу линеарну оцјену параметара, неиспуњавање услова нормалности указало би на то да би примјена неког нелинеарног модела оцјене параметара дала ефикасније резултате. Нелинеарни метод оцјене параметера који је приказан у наставку рада је метод максималне вједостојности. Метод најмањих квадрата и метод максималне вјеродостојности даће приближно исте резултате у случају да серија има нормалан распоред. У супротном, што распоред серије више одступа од нормалног распореда, параметри израчунати на бази метода најмањих квадрата доста ће се разликовати од параметера израчунатих методом максималне вјеродостојности.

Један од тестова који се користи у сврху испитивања нормалности серије података јесте квантил-квантил дијаграм (QQ-плот). На графику 2. приказан је квантил-квантил дијаграм за симулирану серију података из табеле 1.

График 2: Квантил-квантил дијаграм симулиране серије података Васичек модела



Извор: обрада аутора на бази симулиране серије података

Дијаграм указује на то да симулирана серија Васичек модела посједује нормалан распоред, те да су и оцјене параметара добијене примјеном метода најмањих квадрата непристрасне и ефикасне.

6. ОЦЈЕНА ПАРАМЕТАРА ВАСИЧЕК МОДЕЛА НА БАЗИ МЕТОДА МАКСИМАЛНЕ ВЈЕРОДОСТОЈНОСТИ

Основна идеја метода максималне вјеродостојности је избор параметара при којој је вјероватноћа реализације узорка највећа. Овај метод даје оцјене које су асимптотски (тј. за велики узорак) ефикасније од оцјена добијених примјеном других метода.

Нека је $r_{t_1}, r_{t_2}, \ldots, r_{t_k}$, $t = 1, 2, \ldots, n$ узорак серије r_{t_i} која има нормалан распоред са условном очекиваном вриједношћу $E_{t_{i-1}}\left[r_{t_i}\right] = r_{t_{i-1}} e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})} + \mu\left(1 - e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})}\right)$ и условном варијансом $Var_{t_{i-1}}\left[r_{t_i}\right] = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t_i - t_{i-1})}\right)$. Сматрајући да су $r_{t_1}, r_{t_2}, \ldots, r_{t_k}$ константне величине, функција густине вјероватноће случајне промјенљиве r_{t_i} имаће облик (Sypkens 2010):

$$f_i\left(r_{t_i} : \mu, \alpha, \hat{\sigma}\right) = \left(2\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t_i - t_{i-1})}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{-\left(r_{t_i} - r_{t_{u-1}} e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})} - \mu\left(1 - e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})}\right)\right)^2}{2\hat{\sigma}^2}\right] \tag{5.1}$$

где је

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t_i - t_{i-1})}\right)$$

Узимајући у обзир претпоставку да су све опсервације r_{t_i} независне, функција вјеродостојности се добија као производ функција густине вјероватноће за појединачне опсервације (Rencher & Schaalje, 2008):

$$L\left(r_{t_i} : \mu, \alpha, \hat{\sigma}\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(r_{t_i} : \mu, \alpha, \hat{\sigma}\right)$$

Логаритмовањем претходног израза проблем се своди на одређивање максимума функције:

$$\begin{aligned}\Lambda\left(\mu, \alpha, \hat{\sigma}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \ln L\left(r_{t_i} : \mu, \alpha, \hat{\sigma}\right) \\ &= -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\right) - n\ln\left(\hat{\sigma}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}\left[r_{t_i} - r_{t_{i-1}} e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})} - \mu\left(1 - e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})}\right)\right]^2\end{aligned} \tag{5.2}$$

Максимум логаритамске функције максималне вјеродостојности $\Lambda\left(\mu, \alpha, \sigma\right)$ налази се у тачки где су парцијални изводи по сваком од параметара изједначени са нулом. Проналажењем парцијалних извода у изразу (5.2) добија се сљедећи систем једначина (Van den Berg 2011):

$$\frac{\partial\Lambda\left(\mu, \alpha, \hat{\sigma}\right)}{\partial\mu} = 0$$

$$= \frac{1}{\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}\left[r_{t_i} - r_{t_{i-1}} e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})} - \mu\left(1 - e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})}\right)\right]$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[r_{t_i} - r_{t_{i-1}} e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})}\right]}{n\left(1 - e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})}\right)}$$

$$\frac{\partial \Lambda(\mu, \alpha, \hat{\sigma})}{\partial \alpha} = 0$$

$$= -\frac{(t_i - t_{i-1})e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})}}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^{n}\left[\left(r_{t_i} - \mu\right)\left(r_{t_{i-1}} - \mu\right) - e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})}\left(r_{t_{i-1}} - \mu\right)^2\right]$$

$$\alpha = -\frac{1}{(t_i - t_{i-1})} \ln \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(r_{t_i} - \mu\right)\left(r_{t_{i-1}} - \mu\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(r_{t_{i-1}} - \mu\right)^2}$$

$$\frac{\partial \Lambda(\mu, \alpha, \hat{\sigma})}{\partial \hat{\sigma}} = 0$$

$$= \frac{n}{\hat{\sigma}} - \frac{1}{\hat{\sigma}^3} \sum_{i=1}^{n}\left[r_{t_i} - \mu - e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})}\left(r_{t_{i-1}} - \mu\right)\right]^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n}\left[r_{t_i} - \mu - e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})}\left(r_{t_{i-1}} - \mu\right)\right]^2$$

Rјешењем овог система једначина, те на основу израза (4.3) добијају се изрази за оцјену параметара Васичек модела:

$$\mu = \frac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{n\left(S_{xx} - S_{xy}\right) - \left(S_x^2 - S_x S_y\right)} \tag{5.3}$$

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta t} \ln \frac{S_{xy} - \mu S_x - \mu S_y + n\mu^2}{S_{xx} - 2\mu S_x + n\mu^2} \tag{5.4}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left[S_{yy} - 2bS_{xy} + b^2 S_{xx} - 2\mu(1-b)\left(S_y - bS_x\right) + n\mu^2(1-b)^2\right] \tag{5.5}$$

$$\sigma^2 = \hat{\sigma}^2 \frac{2\alpha}{1-b^2} \tag{5.6}$$

гдје је

$$b = e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})}$$

Оквир 3: R-код за оцјену параметара Васичек модела примјеном метода максималне вјеродостојности

```
Vasicek_MLE<-function(data,dt=0.25){
n=length(data)-1
Sx=sum(data[1:n])
Sy=sum(data[2:(n+1)])
Sxx=sum(data[1:n]^2)
Syy=sum(data[2:(n+1)]^2)
Sxy=sum(data[1:n]*data[2:(n+1)])
mu_hat=(Sy*Sxx-Sx*Sxy)/(n*(Sxx-Sxy)-(Sx^2-Sx*Sy))
alpha_hat=-(log((Sxy-mu_hat*(Sx+Sy)+n*mu_hat^2)/(Sxx-2*mu_hat*Sx+n*mu_hat^2)))/dt
b=exp(-alpha_hat*dt)
sigmah2=(Syy-2*b*Sxy+b^2*Sxx-2*mu_hat*(1-b)*(Sy-b*Sx)+n*mu_hat^2*(1-b)^2)/n;
sigma_hat = sqrt(sigmah2*2*alpha_hat/(1-b^2))
c(alpha_hat,mu_hat,sigma_hat)
}
```

Извор: обрада аутора

За симулирану серију из табеле 1.1 оцијењени параметри Васичек модела износе:

$$\alpha = 0.9125375 \quad \mu = 3.5336372 \quad \sigma = 0.2993809$$

Оцјене параметара примјеном метода максималне вјеродостојности приближне су оцјенама добијеним на бази метода најмањих квадрата. Овакав резултат је реално очекиван, с обзиром на то да је квантил-квантил дијаграм показао да симулирана серија посједује нормалан распоред.

7. ЗАКЉУЧАК

Васичек модел још увијек се данас активно користи на финансијским тржиштима, јер се првенствено одликује својом једноставношћу и лакоћом примјене. Међутим, и поред тога што је једноставан за коришћење, Васичек модел има и низ недостатака. Један од главних недостатака Васичек модела је тај што представља неарбитражни модел, тако да су и цијене обвезница добијених на бази модела неарбитражне и доста одступају од стварних тржишних цијена. Затим, Васичек модел је једнофакторски модел и не може описати комплексније закривљености које се могу појавити у оквиру рочне структуре каматних стопа, а и заснива се на претпоставци да каматне стопе свих рокова доспијећа имају исту волатилност. Такође, модел не уклања могућност појаве негативних каматних стопа што није реално оправдана претпоставка.

Међутим, поред свих недостатака које има, несумњиво је да познавање Васичек модела представља добру полазну основу за разумијевање сложенијих и иновативнијих модела динамике каматних стопа који су својом појавом у посљедњој деценији обиљежили како развијена финансијска тржишта тако и модерну финансијску теорију.

ЛИТЕРАТУРА

Dagistan, Cagatay. 2008. *Quantifying the Interest Rate Risk of Bonds by Simulation*. MS Thesis. Istanbul: Istanbul Technical University.

Mladenović, Zorica i Pavle Mladenović. *Ocena parametara vrednosti pri riziku: Ekonometrijska analiza i pristup teorije ekstremnih vrednosti.* http://anali.ekof.bg.ac.rs/pdf/171/1_2%20Mladenovic-Mladenovic.pdf.

Nazir, M. Naveed. 2009. *Short rates and bond prices in one-factor models*. Upssala University.

Neftci, Salih N. 2000. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives.* Second Edition, Academic Press.

Pascucci, Andrea. 2011. *PDE and Martignale Methods in Option Pricing*. Italy: Springer Verlag.

Rencher, C. Alvin and Bruce G. Schaalje. 2008. *Linear Models in Statistics*. Second Edition. New Jersey: John Wiley & Sons.

Sitmo. 2013. Pristupljeno 15. oktobar http://www.sitmo.com/article/calibrating-the-ornstein-uhlenbeck-model.

Sypkens, Roelf. 2010. *Risk Properties and Parameter Estimation on Maen Reversion and GARCH Model*. MS Thesis. University of South Africa.

Vogelvang, Ben. 2005. *Econometrics Theory and Applications with EViews*. Pearson Education Limited